

一类凸曲线流在Ros等周不等式中的应用

陈晓

温州大学数理学院, 浙江 温州

收稿日期: 2025年1月20日; 录用日期: 2025年2月28日; 发布日期: 2025年3月11日

摘要

通过平面中一类面积非减的凸曲线流, 曲线在发展过程中保持凸性不变, 具有全局存在性, 且当时间趋于无穷大时, 曲线在 C^0 范数下收敛到圆。我们建立该曲线流的单调公式, 给出了平面上Ros等周不等式新的证明。

关键词

凸曲线流, Ros等周不等式, 单调公式

The Application of a Kind of Convex Curve Flows to Rose Isoperimetric Inequalities

Xiao Chen

College of Mathematics and Physics, Wenzhou University, Wenzhou Zhejiang

Received: Jan. 20th, 2025; accepted: Feb. 28th, 2025; published: Mar. 11th, 2025

Abstract

By convex curve flow with non-decreasing area in the plane, the curve remains convex and exists globally, and the evolving curve converges to a circle as the time goes to infinity. A new proof of the plane Rose isoperimetric inequalities is given by establishing the monotone formulas along the curve flow.

Keywords

Convex Curve Flow, Ros Isoperimetric Inequalities, Monotone Formulas



1. 引言

最早和最经典的几何不等式就是等周不等式，它刻画了平面域几何量之间的关系。即若 γ 是二维欧氏平面上一个简单严格闭曲线，曲线 γ 的周长为 L ，曲线 γ 所围区域的面积为 A ，则有

$$L^2 - 4\pi A \geq 0,$$

等号成立的条件当且仅当 γ 是圆。但等周问题的认识和研究经历了漫长的历史，尽管古希腊时代人们就知道了这一事实，但第一个严格的数学证明由德国数学家 Weierstrass 在 1870 年给出。

20 世纪 80 年代，Gage [1] 证明了一个涉及平面凸曲线曲率平方积分的不等式

$$\int_0^L \kappa^2 ds \geq \frac{\pi L}{A},$$

当且仅当曲线是圆周时等号成立。我们将其称为 Gage 等周不等式，同时也给出了 Jacobowitz 骨形非凸曲线的例子，说明该不等式对非凸曲线不成立。等周型不等式的研究一直备受数学家的关注，周家足等 [2] 得到了平面 R^2 上的 Ros 定理，

$$\int_0^L \frac{1}{\kappa} ds \geq 2A,$$

并对 Ros 等周不等式进行了深入研究，得到平面上的 Ros 等周不等式的加强形式

$$\int_0^L \frac{1}{\kappa} ds \geq \frac{L^2}{2\pi}.$$

Pan 和 Yang [3] 在研究一种保长度的非局部曲线收缩流时，为了估计演化曲线的等周差建立了如下的平面 Ros 等周不等式的加强形式，

$$\int_0^L \frac{1}{\kappa} ds \geq \frac{L^2 - 2\pi A}{\pi},$$

后来 Lin 和 Tsai [4] 利用 Andrew 和 Green-Osher 不等式研究保面积或保长度闭凸平面曲线流收敛性时，通过傅立叶级数将平面 Ros 等周不等式改进为

$$\int_0^L \frac{1}{\kappa} ds \geq \frac{2L^2 - 6\pi A}{\pi}.$$

Ros 等周不等式与经典的等周不等式不仅类似在等号的充要条件为圆，而且在物理、代数几何以及其他的数学分支中都有着重要的应用，特别是在研究经典的平面曲线收缩流以及其他曲线的演化过程都起着重要作用，如 Pan 和 Yang [3] 研究的保长度曲线流

$$\begin{cases} \frac{\partial X(u,t)}{\partial t} = \left(\frac{L}{2\pi} - \frac{1}{\kappa} \right) N_{in}(u,t), \\ X(u,0) = X_0(u), \end{cases}$$

Pan 和 Zhang [5] 研究的长度和面积均递增扩张流

$$\begin{cases} \frac{\partial X(u,t)}{\partial t} = \left(\frac{2A}{L} - \frac{1}{\kappa} \right) N_{in}(u,t), \\ X(u,0) = X_0(u), \end{cases}$$

因此研究 Ros 等周不等式有着十分重要的意义。

关于平面曲线流问题的研究最早要追溯到 Gage 于 1983 年在文献[1]中提出的经典曲线收缩流

$$\begin{cases} \frac{\partial X(u,t)}{\partial t} = \kappa N_{in}(u,t) \\ X(u,0) = X_0(u), \end{cases}$$

其中 $X(u,t): S^1 \times [0,T) \rightarrow R^2$ 是平面上一族闭曲线, $X_0(u) \subset R^2$ 是初始简单闭凸曲线(后文如果没有特殊说明, $X_0(u)$ 皆是这种曲线), κ 是相对曲率, N_{in} 是单位内法向量。Gage 和 Hamilton [6] 证明了在经典的曲线收缩流下, 演化曲线保持凸性不变, 且曲线的长度和所围面积都会减小, 最终在有限的时间内会收缩成一个圆点。在经典的曲线收缩流的基础上, 人们开始研究各类曲线流, 关于曲线流更多的研究结果可以参见文献[7] [8]。

平面曲线演化问题在在诸多领域中都发挥着至关重要的作用, 如图像处理、医学和相变等。近些年平面曲线流在在几何不等式的证明中非常受关注, Yang 和 Wu [9] 利用一种保长度的曲线收缩流给出了平面上逆等周不等式加强形式的证明, 该保长度抛物型曲线流在演化过程中保持凸性不变, 曲线所围面积递增, 且当时间 t 趋于无穷时, 曲线最终会在 C^∞ 度量下收敛到一个半径为 $\frac{L}{2\pi}$ 的圆。Xia 和 Guo [10] 通过一种保面积的非抛物型曲线流给出了平面 Ros 定理及加强形式的证明, 在这种保面积的非抛物型非局部曲线流下, 演化曲线保持凸性不变, 曲线长度递减, 且当时间 t 趋于无穷时, 曲线最终会在 Hausdorff 度量下收敛到一个半径为 $\frac{A}{\pi}$ 的圆(其中 A 是初始曲线所围的面积)。

因此, 利用曲线流的几何性质来证明几何不等式是确实可行的, 本文我们将引入 Guo 和 Sun [11] 提出的一类面积非减的曲线流的在演化过程中的几何性质来研究 Lin-Tsai 建立的平面 Ros 等周不等式加强形式, 该曲线流包含了许多已被其他几何分析学家研究的特殊曲线流模型。

本文内容安排如下: 第 2 节中, 我们引入 Guo 和 Sun [11] 所研究的一类面积递增的曲线流, 通过他们研究我们知道该曲线在演化过程中, 曲线的凸性保持不变, 曲线在演化过程中具有全局存在性, 且当时间 t 趋于无穷大时在 C^0 范数下收敛到圆。第三节中, 我们将建立该曲线流的单调公式, 给出 Lin-Tsai 建立的平面 Ros 等周不等式加强形式的分析证明。

2. 一类凸曲线流的应用

除了著名的曲线收缩流工作外, 几何分析学家还考虑了带非局部项的曲率流模型: 以平面内一条光滑的闭凸曲线 X_0 为初始曲线, Guo 和 Sun [11] 研究了如下的非局部曲线流模型:

$$\begin{cases} \frac{\partial X(u,t)}{\partial t} = \left(\gamma(t) - \frac{1}{\kappa} \right) N(u,t), \\ X(u,0) = X_0(u), \end{cases} \quad (1)$$

其中, $X(u,t): S^1 \times (0,\omega) \rightarrow E^2$ 为平面光滑闭曲线族, $0 \leq \gamma(t) \leq \frac{1}{L(t)} \int_0^{L(t)} \frac{1}{\kappa} ds$, $\kappa(u,t)$ 是曲线的相对曲率, $N(u,t)$ 是曲线的单位内法向量。

假设 θ 是曲线的法角, 即 N 与 x 轴正向夹角, 那么曲线的周长、面积及曲率可由曲线的支撑函数

$p = X, -N$ 唯一表示为如下形式:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} P(\theta) d\theta, \\ A &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p(\theta) (p_{\theta\theta}(\theta) + p(\theta)) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (p^2(\theta) - p_\theta^2(\theta)) d\theta, \\ \kappa(\theta) &= \frac{1}{p(\theta) + p_{\theta\theta}(\theta)}. \end{aligned}$$

由于改变发展方程的切向量只影响曲线的参数表示, 而不影响曲线最终的几何形状, 我们可以选择适当的切向量来简化曲线的几何分析, 并使得 θ 与时间 t 独立, 同样 T 和 N 都不依赖时间 t 。因此, 可以考虑与方程(1)等价的曲线流:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X(u, t)}{\partial t} &= \left(\gamma(t) - \frac{1}{\kappa} \right) N - \frac{\partial \left(\gamma(t) - \frac{1}{\kappa} \right)}{\partial \theta} T, \\ X(\theta, 0) &= X_0(\theta). \end{aligned} \quad (2)$$

引理 2.1 闭凸曲线按照方程(2)演化, 曲线的支撑函数、周长、面积以及曲率的发展方程如下:

$$p_t = \frac{1}{\kappa} - \gamma(t), \quad L_t = L - 2\pi\gamma(t), \quad A_t = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\kappa^2} d\theta - \gamma(t), \quad \kappa_t = \kappa^2 \left(\gamma(t) - \frac{1}{\kappa} - \left(\frac{1}{\kappa} \right)_{\theta\theta} \right). \quad (3)$$

证明: 计算可得

$$\begin{aligned} p_t &= \frac{\partial}{\partial t} X, -N = X_t, -N + X, -N_t = \left(\gamma(t) - \frac{1}{\kappa} \right) N, -N = \frac{1}{\kappa} - \gamma(t), \\ L_t &= \left(\int_0^{2\pi} p d\theta \right)_t = \int_0^{2\pi} p_t d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\kappa} d\theta - \int_0^{2\pi} \gamma(t) d\theta = L - 2\pi\gamma(t), \\ A_t &= \left(\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (p^2 - p_\theta^2) d\theta \right)_t \\ &= \int_0^{2\pi} (pp_t - p_\theta p_{t\theta}) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} p \left(\frac{1}{\kappa} - \gamma(t) \right) - p_\theta \left(\frac{1}{\kappa} - \gamma(t) \right)_\theta d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(p \frac{1}{\kappa} - p_\theta \left(\frac{1}{\kappa} \right)_\theta \right) d\theta - \gamma(t) L \\ &= \int_0^{2\pi} p(p + p_{\theta\theta}) - p_\theta(p_\theta + p_{\theta\theta\theta}) d\theta - \gamma(t) L \\ &= \int_0^{2\pi} (p^2 - 2p_\theta^2 + p_{\theta\theta}^2) d\theta - \gamma(t) L \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\kappa^2} d\theta - \gamma(t) L, \\ \kappa_t &= \left(\frac{1}{p + p_{\theta\theta}} \right)_t = - \frac{\frac{1}{\kappa} - \gamma(t) + \left(\frac{1}{\kappa} \right)_{\theta\theta}}{(p + p_{\theta\theta})^2} = \kappa^2 \left(\gamma(t) - \frac{1}{\kappa} - \left(\frac{1}{\kappa} \right)_{\theta\theta} \right). \end{aligned}$$

Guo 和 Sun 在文[11]得到了如下结果:

引理 2.2 假设 $X_0(u)$ 是平面上光滑的严格闭凸曲线, 若按照方程(1)演化, 则在演化过程中对任意

$t \in [0, \infty)$, 曲线流问题都有全局解, 曲线保持凸性不变, 且曲线在发展过程中变得越来越圆, 最终在 C^0 范数下收敛到圆。

特别地, 当 $\gamma(t)$ 取值不同时将会得到不同的曲线流。

- 1) $0 \leq \gamma(t) \leq \frac{L}{2\pi}$, 面积、长度非减;
- 2) $\frac{L}{2\pi} \leq \gamma(t) \leq \frac{1}{L} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\kappa^2} d\theta$, 面积非减而周长非增。

接下来, 我们将利用该曲线流在演化过程中的几何性质, 给出 Lin-Tsai 建立的平面 Ros 等周不等式加强形式的分析证明。

3. Ros 型等周不等式的研究

定理 3.1 设 $X(\theta, t)$ 是曲线流(2)的解, 初始曲线 $X(\theta, 0)$ 是闭凸曲线。定义函数

$$G(t) = 2\pi \oint \frac{1}{\kappa} ds - 4\pi A - \lambda(L^2 - 4\pi A),$$

若 $\lambda \leq 4$, 则 $G(t)$ 单调递减且收敛到 0。

证明 由方程(3)以及 $d\theta = \kappa ds$, 计算可得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} G(t) &= 2\pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\kappa} \right)^2 d\theta - 4\pi A_t - \lambda(L^2 - 4\pi A)_t \\ &= -4\pi \int_0^{2\pi} \frac{\kappa_t}{\kappa^3} d\theta - 4\pi \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{\kappa^2} d\theta - \gamma(t)L \right) - \lambda \left(2L^2 - 4\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{\kappa^2} d\theta \right) \\ &= -4\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{\kappa} \cdot \left(\gamma(t) - \frac{1}{\kappa} - \left(\frac{1}{\kappa} \right)_{\theta\theta} \right) d\theta - 4\pi \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{\kappa^2} d\theta - \gamma(t)L \right) - \lambda \left(2L^2 - 4\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{\kappa^2} d\theta \right) \\ &= -4\pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\kappa} \right)^2_\theta d\theta - 2\lambda L^2 + 4\pi \lambda \int_0^{2\pi} \frac{1}{\kappa^2} d\theta \\ &= -4\pi \int_0^{2\pi} (p_\theta + p_{\theta\theta})^2 d\theta - 2\lambda L^2 + 4\pi \lambda \int_0^{2\pi} (p + p_{\theta\theta})^2 d\theta \\ &= -4\pi \int_0^{2\pi} (p_\theta^2 - 2p_\theta p_{\theta\theta} + p_{\theta\theta}^2) d\theta + 4\pi \lambda \int_0^{2\pi} (p^2 - 2p_\theta^2 + p_{\theta\theta}^2) d\theta - 2\lambda L^2, \end{aligned}$$

由于 p 是周期为 2π 的周期函数, 不妨设其傅立叶展开式为

$$p = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta),$$

那么

$$p_\theta = \sum_{n=1}^{\infty} n(-a_n \sin n\theta + b_n \cos n\theta),$$

$$p_{\theta\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2(-a_n \cos n\theta - b_n \sin n\theta),$$

$$p_{\theta\theta\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} n^3(a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta).$$

由 $L = \int_0^{2\pi} p d\theta$, 那么 $L = 2\pi a_0$ 。

由帕塞尔恒等式可得,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} p^2 d\theta &= \int_0^{2\pi} \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \right)^2 d\theta = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2), \\ \int_0^{2\pi} p_{\theta}^2 d\theta &= \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2), \\ \int_0^{2\pi} p_{\theta\theta}^2 d\theta &= \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^4 (a_n^2 + b_n^2), \\ \int_0^{2\pi} p_{\theta\theta\theta}^2 d\theta &= \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^6 (a_n^2 + b_n^2),\end{aligned}$$

可得,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} G(t) &= -4\pi \int_0^{2\pi} (p_{\theta\theta\theta}^2 - (\lambda+2)p_{\theta\theta}^2 + (2\lambda+1)p_{\theta}^2) d\theta + 4\pi\lambda \int_0^{2\pi} p^2 d\theta - 8\pi^2 \lambda a_0^2 \\ &= -4\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (n^6 - (\lambda+2)n^4 + (2\lambda+1)n^2 - \lambda)(a_n^2 + b_n^2) \\ &= -4\pi^2 \sum_{n=2}^{\infty} (n^2 - 1)^2 (n^2 - \lambda)(a_n^2 + b_n^2),\end{aligned}$$

当 $\lambda \leq 4$ 时, $\frac{d}{dt} G(t) \leq 0$, 则 $G(t)$ 单调递减。因为 $X(u, t)$ 收敛到圆, 所以当 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$G(t) = 2\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{\kappa^2} d\theta - 4\pi A - \lambda(L^2 - 4\pi A) \rightarrow 0. \text{ 因此当 } t > 0 \text{ 时, 总有如下不等式成立}$$

$$\oint \frac{1}{\kappa} ds \geq \frac{4\pi A + \lambda(L^2 - 4\pi A)}{2\pi}.$$

若等号成立, 那么 $\frac{d}{dt} G(t) = -4\pi^2 \sum_{n=2}^{\infty} (n^2 - 1)^2 (n^2 - \lambda)(a_n^2 + b_n^2) = 0$, 于是当 $n \geq 2$ 时, $a_n = b_n = 0$, 此时曲线 X 的支撑函数 $p = a_0 + a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta$, 显然 X 是圆周; 或当 $n \geq 3$ 时, $a_n = b_n = 0$, 此时曲线 X 的支撑函数有如下形式:

$$p = a_0 + a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta + a_2 \cos 2\theta + b_2 \sin 2\theta.$$

在上面定理中令 $\lambda = 4$ 时, 得如下闭凸曲线的曲率积分不等式

$$\oint \frac{1}{\kappa} ds \geq \frac{2L^2 - 6\pi A}{\pi},$$

即由 Lin 和 Tsai 在文[4]所建立的平面 Ros 等周不等式加强形式, 我们通过曲线流给出了其新的分析证明。由于

$$\begin{aligned}\frac{2L^2 - 6\pi A}{\pi} &= 2A + \frac{2(L^2 - 4\pi A)}{\pi}; \\ \frac{2L^2 - 6\pi A}{\pi} &= \frac{L^2}{2\pi} + \frac{3(L^2 - 4\pi A)}{2\pi}; \\ \frac{2L^2 - 6\pi A}{\pi} &= \frac{L^2 - 2\pi A}{\pi} + \frac{L^2 - 4\pi A}{\pi},\end{aligned}$$

结合等周不等式 $L^2 - 4\pi A \geq 0$, 可以得到以下推论。

推论 3.2 平面简单闭凸曲线 Γ 上成立不等式

$$\int_0^L \frac{1}{\kappa} ds \geq 2A,$$

等号成立仅当 Γ 是圆周。

推论 3.3 平面简单闭凸曲线 Γ 上成立不等式

$$\int_0^L \frac{1}{\kappa} ds \geq \frac{L^2}{2\pi},$$

等号成立仅当 Γ 是圆周。

推论 3.4 平面简单闭凸曲线 Γ 上成立不等式

$$\int_0^L \frac{1}{\kappa} ds \geq \frac{L^2 - 2\pi A}{\pi}$$

等号成立仅当 Γ 是圆周。

致 谢

衷心感谢审稿人提出的宝贵建议及付出的辛勤劳动。

参考文献

- [1] Gage, M.E. (1983) An Isoperimetric Inequality with Applications to Curve Shortening. *Duke Mathematical Journal*, **50**, 1225-1229. <https://doi.org/10.1215/s0012-7094-83-05052-4>
- [2] 周家足, 姜德烁, 李明, 陈方维. 超曲面的 Ros 定理[J]. 数学学报, 2009, 52(6): 1075-1084.
- [3] Pan, S. and Yang, J. (2008) On a Non-Local Perimeter-Preserving Curve Evolution Problem for Convex Plane Curves. *Manuscripta Mathematica*, **127**, 469-484. <https://doi.org/10.1007/s00229-008-0211-x>
- [4] Lin, Y. and Tsai, D. (2012) Application of Andrews and Green-Osher Inequalities to Nonlocal Flow of Convex Plane Curves. *Journal of Evolution Equations*, **12**, 833-854. <https://doi.org/10.1007/s00028-012-0157-z>
- [5] Pan, S. and Zhang, H. (2010) On a Curve Expanding Flow with a Non-Local Term. *Communications in Contemporary Mathematics*, **12**, 815-829. <https://doi.org/10.1142/s0219199710003981>
- [6] Gage, M. and Hamilton, R.S. (1986) The Heat Equation Shrinking Convex Plane Curves. *Journal of Differential Geometry*, **23**, 69-96. <https://doi.org/10.4310/jdg/1214439902>
- [7] Tsai, D. and Wang, X. (2015) On Length-Preserving and Area-Preserving Nonlocal Flow of Convex Closed Plane Curves. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **54**, 3603-3622. <https://doi.org/10.1007/s00526-015-0915-1>
- [8] Ma, L. and Cheng, L. (2014) A Non-Local Area Preserving Curve Flow. *Geometriae Dedicata*, **171**, 231-247. <https://doi.org/10.1007/s10711-013-9896-4>
- [9] Yang, Y. and Wu, W. (2020) The Reverse Isoperimetric Inequality for Convex Plane Curves through a Length-Preserving Flow. *Archiv der Mathematik*, **116**, 107-113. <https://doi.org/10.1007/s00013-020-01541-5>
- [10] 夏康杰, 郭洪欣. 曲线流在平面曲线的几个不等式中的应用 [J]. 数学学报(中文版), 2023, 66(4): 687-692.
- [11] Guo, H. and Sun, Z. (2019) On a Family of Inverse Curvature Flows for Closed Convex Plane Curves. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **50**, 1-7. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2019.04.010>