

具有无理压缩比的卷积测度的非谱性研究

郑鹏辉

长沙理工大学数学与统计学院, 湖南 长沙

收稿日期: 2025年1月20日; 录用日期: 2025年2月28日; 发布日期: 2025年3月11日

摘要

设 $\mu_{\rho,D,\{n_k\}}$ 是由以下离散测度的无限卷积定义的Borel概率测度: $\mu_{\rho,D,\{n_k\}} = \delta_{\rho^{n_1}D} * \delta_{\rho^{n_2}D} * \delta_{\rho^{n_3}D} * \dots$, 其中 $0 < \rho < 1$, $D \subset \mathbb{R}$ 是一有限集, $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是一个严格递增的正整数序列, 且 $\sup_{k \geq 1} \{n_{k+1} - n_k\} < \infty$ 。本文证明了: 若 $Z(\hat{\delta}_D)$ 包含在Lattice集中且对任意的 $r > 1$, 无理数 $\rho \notin \mathbb{Q}^{1/r} := \{\rho = u^{1/r} : 0 < u < 1 \text{ 是一有理数}\}$, 那么 $\mu_{\rho,D,\{n_k\}}$ 不是谱测度。

关键词

测度, 卷积, 非谱性, 傅里叶变换

A Study of Non-Spectrality of Convolutional Measures with Irrational Contraction Ratio

Penghui Zheng

School of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science & Technology, Changsha Hunan

Received: Jan. 20th, 2025; accepted: Feb. 28th, 2025; published: Mar. 11th, 2025

Abstract

Let $\mu_{\rho,D,\{n_k\}}$ be a Borel probability measure defined by the following infinite convolution of discrete measures: $\mu_{\rho,D,\{n_k\}} = \delta_{\rho^{n_1}D} * \delta_{\rho^{n_2}D} * \delta_{\rho^{n_3}D} * \dots$, where $0 < \rho < 1$, $D \subset \mathbb{R}$ is a finite set, and $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ is a strictly increasing sequence of positive integers with $\sup_{k \geq 1} \{n_{k+1} - n_k\} < \infty$. In this paper, we will show

that if $Z(\hat{\delta}_D)$ is contained in a Lattice set and for any $r > 1$, the irrational number $\rho \notin \mathbb{Q}^{1/r} := \{\rho = u^{1/r} : 0 < u < 1 \text{ is rational}\}$, then $\mu_{\rho, D, \{n_k\}}$ is not a spectral measure.

Keywords

Measure, Convolution, Non-Spectrality, Fourier Transform

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

设 μ 为 $\mathbb{R}^n$ 上具有紧支撑的 Borel 概率测度, 若在 $L^2(\mu)$ 中存在指数正交基 $E(\Lambda) := \{e^{2\pi i(\lambda, \cdot)} : \lambda \in \Lambda\}$, 则称 μ 为谱测度, Λ 为测度 μ 的谱. 特别的, 若存在可测集 Ω 使得 $\mu = L|_{\Omega}$, 则称 Ω 为谱集.

对测度 μ 而言, 是否存在谱 Λ ? 1974 年, Fuglede 在毕业论文中提出著名的谱集猜想[1]: Ω 为谱集 $\Leftrightarrow \Omega$ 为平移 Tile. 尽管 $n \geq 3$ 时被 Tao 等人证伪[2]-[4]; 但 $n=1, 2$ 时仍成立, 引发了许多数学家的兴趣, 其基本问题分为充分必要两个方向.

1998 年, Jorgensen 和 Pedersen [5] 提出了谱测度的概念, 与调和分析、数论、动力系统、分形几何有着很密切的联系[6], 打破了经典调和分析中一直以来只能考虑 Lebesgue 测度的桎梏, 将分形测度和调和分析相结合, 为经典调和分析注入了新的生命力, 开创了调和分析与分形几何相交叉的全新的研究方向: 分形谱测度或分形上的调和分析. 从那时起, 人们发现了许多分形谱测度, 还发现了许多方法来分析分形测度的谱性, 例如 Ruelle 算子, Hadamard 矩阵等. 因为调和分析在统计学、医学、地球物理、量子物理学中有着广泛的应用, 随着研究的不断深入, 我们发现分形上的调和分析在图像压缩和物理学中有广泛的应用[7]. 分形谱测度方向吸引了许多世界著名数学家如 Jorgensen、Laba、Strichartz、Dutkay [8]-[10] 等人的研究与关注, 成为了众多学者与专家钻研的一个十分热门的研究方向, 其相关成果多次在国际权威数学期刊上发表. 读者可以参阅[11]-[17]及其参考文献以了解最新进展.

定义 1.1 设迭代函数系统(IFS)定义为

$$S_d(x) = R^{-1}(x+d), \quad x \in \mathbb{R}^n, d \in D,$$

其中 n 阶实矩阵 R 的所有特征值的模大于 1, D 为 $\mathbb{R}^n$ 的有限子集. 设 $P = \{p_d\}_{d \in D}$ 为概率加权, 则存在唯一的非空紧集 T (不变集或者吸引子), 以及唯一的 Borel 概率测度 μ (以 T 为支撑)使得

$$T = \bigcup_{d \in D} S_d(T), \quad \mu(\cdot) = \sum_{d \in D} p_d \mu(S_d^{-1}(\cdot)).$$

此时, 称 T 为自仿集, μ 为自仿测度. 特别地, 若 S_d 为压缩相似的, 则称 T 为自相似集, μ 为自相似测度.

设 $0 < \rho < 1$, $D \subset \mathbb{R}$ 是一有限集, $\#D$ 表示集合 D 的基数. 假设 $\mu_{\rho, D}$ 是由迭代函数系统 $\{S_d\}_{d \in D}$ 生成的自相似测度, 其中

$$S_d(x) = \rho(x+d), \quad \mu_{\rho, D}(x) = \frac{1}{\#D} \sum_{d \in D} \mu(S_d^{-1}(x)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

自相似测度 $\mu_{\rho,D}$ 的另一个重要描述是离散测度的无限卷积, 即

$$\mu_{\rho,D}(\cdot) = \delta_{\rho D} * \delta_{\rho^2 D} * \delta_{\rho^3 D} * \cdots.$$

这里, 对有限集 D ,

$$\delta_D := \frac{1}{\#D} \sum_{d \in D} \delta_d,$$

其中 δ_d 是在 d 点的 Dirac 测度。

定义 1.2 设 $x \geq 2$ 是一整数, 设 $D, C \subseteq \mathbb{Z}$ 是有限集且 $\#D = \#C = N$ 。若矩阵

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \left[e^{\frac{2\pi i dc}{x}} \right]_{d \in D, c \in C}$$

是酉矩阵, 则称 $(x^{-1}D, C)$ 是兼容对。此外, 我们称 (x, D, C) 是 Hadamard 三元组。

2002 年, Laba 和汪扬[8]证明了 Hadamard 三元组在 $\mathbb{R}$ 上生成自相似谱测度, 并对自相似测度 $\mu_{\rho,D}$ 的谱性给出了如下猜想。

猜想 1.3 [8] 若 $\mu_{\rho,D}$ 是谱测度, 则 ρ^{-1} 必是一个整数。

此后, 许多研究者开始考虑自相似测度的谱性, 并试图证明猜想 1.3 是正确的。在此过程中, 有了丰厚的研究成果。如下,

设 $D := \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$, $\mu = \sum_{j=1}^m p_j \mu^\circ f_j(x)$ 是迭代函数系统 $\{f_j(x) = \rho(x + \alpha_j)\}_{j=1}^m$ 生成的自相似测度。

2021 年, 邓起荣和陈建宝[14]研究 Laba 和汪扬的猜想, 证明了自相似谱测度权重的一致性。

2021 年, 安丽想和王聪[16]也对猜想展开了研究。在 $Z(\hat{\delta}_D)$ 包含在 Lattice 集中的前提下, 给出了 $\mu_{\rho,D}$ 为谱测度的必要条件, 即若 $\mu_{\rho,D}$ 是谱测度, 则 $\rho^{-1} \in \mathbb{N}$ 。

我们计划研究猜想 1.3, 推广安丽想和王聪[16]的结果, 给出 $\mu_{\rho,D,\{n_k\}}$ 为谱测度的必要条件。将通过消除以下不是谱的情况来完成证明:

- 1) $\rho = \frac{q}{p}$ 是一有理数, 其中 p, q 是互素的且 $q > 1$;
- 2) ρ 是 $\frac{p}{r}$ 无理数且 $\rho \notin \mathbb{Q}^{1/r}$ ($r > 1$)。

本文主要考虑压缩比为无理数时 $\mu_{\rho,D,\{n_k\}}$ 的非谱性, 以此将猜想的结果控制在有理数的情形, 从而为完成猜想做出铺垫。若 $L^2(\mu)$ 中没有指数正交系构成的正交基, 则 μ 不是谱测度。一个测度 μ 的非谱问题, 将会属于以下类型之一:

- $L^2(\mu)$ 中至多存在有限个相互正交的指数函数。
- $L^2(\mu)$ 中存在无限正交指数函数系, 但均不能构成此空间的正交基。

我们研究具有无理压缩比的卷积测度的非谱性情况。设 $\mu_{\rho,D,\{n_k\}}$ 是由以下离散测度的无限卷积定义的 Borel 概率测度:

$$\mu_{\rho,D,\{n_k\}} = \delta_{\rho^{n_1} D} * \delta_{\rho^{n_2} D} * \delta_{\rho^{n_3} D} * \cdots,$$

其中 $\rho \in (0, 1)$, D 是有限集, $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ 是一个严格递增的正整数序列, 且 $\sup_{k \geq 1} \{n_{k+1} - n_k\} < \infty$ 。 D 的 Mask 多项式的零点 $Z(\hat{\delta}_D)$ 包含在 Lattice 集中, 即存在 $\alpha > 0$ 使得零点在 $\alpha\mathbb{Z}$ 中。

定理 1.4 设 $Z(\hat{\delta}_D) \subset \alpha\mathbb{Z}$, 对任意的 $r > 1$, $\rho \notin \mathbb{Q}^{1/r}$ 是一个无理数, 则 $\mu_{\rho,D,\{n_k\}}$ 不是谱测度。

本文的其余部分组织如下。在第 2 节中, 介绍预备知识以及需要用到的定理。在第 3 节中, 给出定理 1.4 的证明。最后一部分对所得到的结论进行了讨论和总结。

2. 谱测度的定义与性质

定义 2.1 设 μ 为 $\mathbb{R}^n$ 上具有紧支撑的 Borel 概率测度, 若在 $L^2(\mu)$ 中存在指数正交基

$$E(\Lambda) := \{e^{2\pi i \langle \lambda, \cdot \rangle} : \lambda \in \Lambda\},$$

则称 μ 为谱测度, Λ 为测度 μ 的谱, (μ, Λ) 为谱对。特别地, 若存在可测集 Ω 使得

$$\mu = L|_{\Omega},$$

则称 Ω 为谱集。

定义 2.2 设 μ 为 $\mathbb{R}^n$ 上具有紧支撑的 Borel 概率测度, 对任意的 $f \in L^2(\mu)$,

$$\hat{f}(\xi) = \int f(x) e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle} dx$$

称为 f 的 Fourier 变换。特别地,

$$\hat{\mu}(\xi) = \int e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle} d\mu(x), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

是测度 μ 的 Fourier 变换。

设 $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ 是可数集。那么 $E(\Lambda) = \{e^{2\pi i \lambda x} : \lambda \in \Lambda\}$ 形成 $L^2(\mu)$ 的正交集当且仅当对 $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \Lambda$, $\hat{\mu}(\lambda_1 - \lambda_2) = 0$, 这等价于

$$(\Lambda - \Lambda) \setminus \{0\} \subseteq Z(\hat{\mu}), \quad (2.1)$$

其中 $Z(f) = \{\xi : f(\xi) = 0\}$ 表示函数 $f(\xi)$ 的零集。

如果满足(2.1), 我们还称 Λ 是 μ 的双零集。显然, Λ 是一个双零集, 对于任意 $a \in \mathbb{R}$ 来说, $\Lambda - a$ 也是双零集。

对于任意 $\xi \in \mathbb{R}$, 令

$$Q_{\Lambda}(\xi) := \sum_{\lambda \in \Lambda} |\hat{\mu}(\xi + \lambda)|^2.$$

Jorgensen 和 Pedersen [5] 给出了一个确定 Λ 是否为 μ 的双零集(谱)的结果。

定理 2.3 [5] 设 μ 是在 $\mathbb{R}$ 上具有紧支撑的 Borel 概率测度, 并令 $\Lambda \subset \mathbb{R}$ 为可数集。则

- 1) Λ 是 μ 的双零集当且仅当对 $\xi \in \mathbb{R}$, $Q_{\Lambda}(\xi) \leq 1$;
- 2) Λ 是 μ 的谱当且仅当对 $\xi \in \mathbb{R}$, $Q_{\Lambda}(\xi) \equiv 1$;
- 3) 若 Λ 是 μ 的双零集, 那么 $Q_{\Lambda}(\xi)$ 具有一个到 $\mathbb{C}$ 的解析延拓。

引理 2.4 [15] Λ 是 $\mu_{\rho, D, \{n_k\}}$ 的谱当且仅当对任意的 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\frac{1}{\alpha} \Lambda$ 是 $\mu_{\rho, \alpha D, \{n_k\}}$ 的谱。

3. 本文主要结果

这一部分, 我们主要证明定理 1.4。对于任意整数 $r \geq 1$, 设

$$\mathbb{Q}^{1/r} = \{\rho = u^{1/r} : 0 < u < 1 \text{ 是一个有理数}\}$$

我们约定, 上述的 $u = \frac{q}{p}$ 是最简形式, r 是 $\rho = u^{1/r}$ 的最小整数。例如 $\rho = \left(\frac{9}{16}\right)^{1/4} = \left(\frac{3}{4}\right)^{1/2}$, 我们取 $u = \frac{3}{4}$,

$r = 2$ 。

在本节中, 我们总是假设零集 $Z(\hat{\delta}_D)$ 包含在格子集 $\alpha\mathbb{Z}$ 中, $\alpha \neq 0$ 。由引理 2.4, $\mu_{\rho, D}$ 和 $\mu_{\rho, \alpha D}$ 的谱性是等价的, 并且

$$Z(\hat{\delta}_{\alpha D}) = \frac{1}{\alpha} Z(\hat{\delta}_D).$$

不失一般性, 我们可以假设 $Z(\hat{\delta}_D) \subset \mathbb{Z}$ 。

定理 3.1 设 $Z(\hat{\delta}_D) \subset \mathbb{Z}$, ρ 是一个无理数, 对任意的 $r > 1$, $\rho \notin \mathbb{Q}^{1/r}$ 。则 $\mu_{\rho, D, \{n_k\}}$ 不是谱测度。

证明 我们先给出一个关于 $|\hat{\delta}_D(x)|$ 的重要观察结果, 它将用于保证测度 $\mu_{\rho, D, \{n_k\}}$ 的非谱性。设 f 是一个实值函数, 其定义为

$$f(x) = 1 - |\hat{\delta}_D(x)|^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

那么 f 可以延拓成一个整函数, 记为 $f(z)$, $z \in \mathbb{C}$ 。注意

$$f(z) = 1 - \frac{1}{(\#D)^2} \sum_{d_1, d_2 \in D} e^{2\pi i(d_1 - d_2)z}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

设

$$h := \inf_{d_1 \neq d_2 \in D} |d_1 - d_2|, \quad H := \sup_{d_1 \neq d_2 \in D} |d_1 - d_2|.$$

经计算有 $f(0) = 0$ 以及

$$f'(z) = -\frac{1}{(\#D)^2} \sum_{d_1, d_2 \in D} (2\pi i)(d_1 - d_2) e^{2\pi i(d_1 - d_2)z},$$

从而 $f'(0) = 0$ 。重复上述步骤, 我们有

$$f''(z) = \frac{4\pi^2}{(\#D)^2} \sum_{d_1, d_2 \in D} (d_1 - d_2)^2 e^{2\pi i(d_1 - d_2)z}.$$

从而,

$$f''(0) = \frac{4\pi^2}{(\#D)^2} \sum_{d_1, d_2 \in D} (d_1 - d_2)^2 \in [2\pi^2 h^2, 4\pi^2 H^2].$$

因此可知存在一个整函数 g 使得 $f(z) = z^2 g(z)$, $z \in \mathbb{C}$ 。又 $f''(z)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一致连续函数, 故存在一个 $\eta_0 \in (0, (4\pi H)^{-1})$ 使得对 $|x| \leq \eta_0$, 有

$$f''(x) \in [\pi^2 h^2, 8\pi^2 H^2].$$

对每个 $x \in [-\eta_0, \eta_0]$, 存在一个实数 $\theta(x) \in [-\eta_0, \eta_0]$ 使得 $f(x) = \frac{1}{2} x^2 f''(\theta(x))$ 。这意味着

$g(x) = \frac{1}{2} f''(\theta(x))$, $|x| < \eta_0$ 。因此我们可以计算出

$$\frac{1}{2} \pi^2 h^2 \leq g(x) \leq 4\pi^2 H^2, \quad |x| < \eta_0. \quad (3.1)$$

设 N^* 表示所有正整数 n_k 的集合, 其中 $k \geq 1$, 即 $N^* = \{n_k : k \geq 1\}$ 。设 $\beta := \sqrt{1 - \frac{1}{2}(\pi h \rho^L \eta_0)^2} \in (0, 1)$, 其中 $L = \sup_{k \geq 1} \{n_{k+1} - n_k\} < \infty$ 。由此, 我们给出以下断言。

断言 1. 对每个 $n \in N^*$ 以及 $a \in Z(\hat{\delta}_D)$, 存在一个整数 $m = m(n, a) \geq 1$ 使得 $n + m \in N^*$ 且 $\hat{\delta}_D(\rho^m a) \leq \beta$ 。事实上, 根据(3.1)有

$$1 - (2\pi Hx)^2 \leq |\hat{\delta}_D(x)|^2 \leq 1 - \frac{1}{2}(\pi Hx)^2, \quad |x| \leq \eta_0. \quad (3.2)$$

因此对 $|x| \leq \eta_0$, 有

$$|\hat{\delta}_D(x)| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

然而易知 $|\hat{\delta}_D(a)| = 0 < \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。这意味这 $|a| > \eta_0$ 。设 $\{l_k\}_{k=1}^\infty$ 是一正整数序列, 定义如下

$$l_1 = n_1, \quad l_k = n_k - n_{k-1}, \quad k \geq 2.$$

那么存在唯一一个整数 $k' \geq 1$ 使得 $n = n_{k'} = l_1 + l_2 + \cdots + l_{k'}$ 。因此我们可以找到一个整数 $i' \geq 1$ 使得

$$\rho^{l_{k'+1}+l_{k'+2}+\cdots+l_{k'+i'}} |a| \in [\rho^L \eta_0, \eta_0].$$

若不然, 则存在一个整数 $i_0 \geq 1$ 使得

$$\rho^{l_{k'+1}+l_{k'+2}+\cdots+l_{k'+i_0-1}} |a| > \eta_0, \quad \rho^{l_{k'+1}+l_{k'+2}+\cdots+l_{k'+i_0}} |a| < \rho^L \eta_0.$$

我们约定若 $i_0 = 1$, 则 $l_{k'+1} + l_{k'+2} + \cdots + l_{k'+i_0-1} = 0$ 。这意味着 $l_{k'+i_0} > L$, 矛盾。因此整数 i' 可以被找到。由此, 取

$$m = l_{k'+1} + l_{k'+2} + \cdots + l_{k'+i'}.$$

因此我们可以验证 $n + m = n_{k'+i'} \in N^*$ 。利用(3.2), 我们有

$$|\hat{\delta}_D(\rho^m a)| = |\hat{\delta}_D(\rho^m |a|)| \leq \max_{x \in [\rho^L \eta_0, \eta_0]} |\hat{\delta}_D(x)| \leq \beta.$$

因此我们完成了断言的证明。

我们只需证明任何双零集 Λ 都不是 $\mu_{\rho, D, \{n_k\}}$ 的谱。设 $0 \in \Lambda$ 是 $\mu_{\rho, D, \{n_k\}}$ 的双零集。那么 Λ 可以分解成

$$\Lambda = \{0\} \cup \bigcup_{n \in N^*} \Lambda_n,$$

其中对 $n \in N^*$, $\Lambda_n := \Lambda \cap Z(\hat{\delta}_{\rho^n D})$ 。若对任意的 $r > 1$, ρ 是一个无理数且 $\rho \notin \mathbb{Q}^{1/r}$, 则对任意两个不同的整数 k, j 使得

$$\rho^{-k} \mathbb{Z} \cap \rho^{-j} \mathbb{Z} = \{0\}.$$

注意

$$Z(\hat{\delta}_{\rho^n D}) = \rho^{-n} Z(\hat{\delta}_D) \subset \rho^{-n_k} (\mathbb{Z} \setminus \{0\}), \quad n \in N^*.$$

那么我们可以验证 $\{\Lambda_n\}_{n \in N^*}$ 是不交的。此外, 若 $\Lambda_n \neq \emptyset$, 那么 $\Lambda_n \cup \{0\}$ 是 $\delta_{\rho^n D}$ 的双零集。因此我们有

$$Q_\Lambda(x) = \left| \hat{\mu}_{\rho, D, \{n_k\}}(x) \right|^2 + \sum_{n \in N^*} \sum_{\lambda \in \Lambda_n} \left| \hat{\mu}_{\rho, D, \{n_k\}}(x + \lambda) \right|^2. \quad (3.3)$$

我们约定若 $\Lambda_n = \emptyset$, 那么 $\sum_{\lambda \in \Lambda_n} \left| \hat{\mu}_{\rho, D, \{n_k\}}(x + \lambda) \right|^2 = 0$ 。设 $F: [-\eta_0, \eta_0] \rightarrow [0, +\infty)$ 是一个函数, 其定义如下

$$F(x) := \sum_{n \in N^*} f(\rho^n x).$$

由(3.1)我们可以计算出对 $x \in [-\eta_0, \eta_0]$, 有

$$\frac{(\pi h \rho^{n_1})^2}{2(1-\rho^{2L})} x^2 \leq \sum_{n \in N^*} f(\rho^n x) \leq \frac{(2\pi H \rho^{n_1})^2}{1-\rho^2} x^2. \quad (3.4)$$

因此函数 F 能被很好的定义。另外，当 x 趋向于 0 时， $F(x)$ 的阶与 x^2 相同。因此，存在一个常数 $\eta_1 \in (0, \eta_0)$ 使得对 $|x| \leq \eta_1$ ，有

$$\left| \hat{\mu}_{\rho, D, \{n_k\}}(x) \right|^2 = \prod_{n \in N^*} (1 - f(\rho^n x)) \leq e^{-F(x)} \leq 1 - \frac{3+\beta^2}{4} F(x). \quad (3.5)$$

若 $\Lambda_n \neq \emptyset$ ，则

$$\left| \hat{\delta}_{\rho^n D}(x) \right|^2 + \sum_{\lambda \in \Lambda_n} \left| \hat{\delta}_{\rho^n D}(x + \lambda) \right|^2 \leq 1.$$

这意味着

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_n} \left| \hat{\delta}_{\rho^n D}(x + \lambda) \right|^2 \leq f(\rho^n x). \quad (3.6)$$

对每个 $\lambda \in \Lambda_n$ ，存在 $a \in Z(\hat{\delta}_D)$ 使得 $\lambda = \rho^{-n} a$ 。由断言 1 可知，存在一个整数 $m = m(n, a) \geq 1$ 使得 $n + m \in N^*$ 且 $|\hat{\delta}_D(\rho^m a)| \leq \beta$ 。因函数 $\left\{ |\hat{\delta}_D|^2 \right\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上是一致连续的，故我们可以找到一个常数 $\eta_2 \in (0, \eta_1)$ 使得对每个 $x \in [-\eta_2, \eta_2]$ 有

$$\left| \hat{\delta}_D(x + \rho^m a) \right|^2 \leq \frac{1+\beta^2}{2} < 1.$$

那么对 $x \in [-\eta_2, \eta_2]$ ，我们有

$$\left| \hat{\delta}_{\rho^{n+m} D}(x + \lambda) \right|^2 = \left| \hat{\delta}_D(\rho^{n+m} x + \rho^m a) \right|^2 \leq \frac{1+\beta^2}{2}.$$

与(3.6)联立，我们有

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \in \Lambda_n} \left| \hat{\mu}_{\rho, D, \{n_k\}}(x + \lambda) \right|^2 &\leq \sum_{\lambda \in \Lambda_n} \left| \hat{\delta}_{\rho^n D}(x + \lambda) \right|^2 \cdot \left| \hat{\delta}_{\rho^{n+m} D}(x + \lambda) \right|^2 \\ &\leq \frac{1+\beta^2}{2} \sum_{\lambda \in \Lambda_n} \left| \hat{\delta}_{\rho^n D}(x + \lambda) \right|^2 \\ &\leq \frac{1+\beta^2}{2} f(\rho^n x). \end{aligned} \quad (3.7)$$

显然，当 $\Lambda_n = \emptyset$ 时，上述不等式也成立。将(3.5)和(3.7)代入(3.3)， $x \in [-\eta_2, \eta_2]$ ，我们可以得到

$$Q_\Lambda(x) \leq 1 - \frac{1-\beta^2}{4} F(x). \quad (3.8)$$

由(3.4)可知，

$$F(\eta_2) \geq \frac{(\pi h \rho^{n_1} \eta_2)^2}{2(1-\rho^{2L})} > 0. \quad (3.9)$$

(3.8)和(3.9)联立意味着， $Q_\Lambda(\eta_2) < 1$ 。因此由定理 2.3(2)， Λ 不能是 $\mu_{\rho, D, \{n_k\}}$ 的谱。因此 $\mu_{\rho, D, \{n_k\}}$ 不是谱测度。定理证明完毕。

4. 结论

谱测度是调和分析、分形几何、泛函分析等多个学科的交叉研究。本文研究了具有无理压缩比时，

一类无穷卷积的非谱性。证明了当 $\rho \notin \mathbb{Q}^{1/r}$ 时, $\mu_{\rho, D, \{n_k\}}$ 满足非谱条件之一, 不是谱测度。为之后研究猜想 1.3, 即压缩比的倒数是一个整数做了铺垫。对于 $\rho \in \mathbb{Q}^{1/r}$ 的情况, 由于具有某种规律, 我们猜测可能有不一样的结果。

参考文献

- [1] Fuglede, B. (1974) Commuting Self-Adjoint Partial Differential Operators and a Group Theoretic Problem. *Journal of Functional Analysis*, **16**, 101-121. [https://doi.org/10.1016/0022-1236\(74\)90072-x](https://doi.org/10.1016/0022-1236(74)90072-x)
- [2] Tao, T. (2004) Fuglede's Conjecture Is False in 5 and Higher Dimensions. *Mathematical Research Letters*, **11**, 251-258. <https://doi.org/10.4310/mrl.2004.v11.n2.a8>
- [3] Farkas, B., Matolcsi, M. and Mora, P. (2006) On Fuglede's Conjecture and the Existence of Universal Spectra. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, **12**, 483-494. <https://doi.org/10.1007/s00041-005-5069-7>
- [4] Kolountzakis, M.N. and Matolcsi, M. (2006) Tiles with No Spectra. *Forum Mathematicum*, **18**, 519-528. <https://doi.org/10.1515/forum.2006.026>
- [5] Jorgensen, P.E.T. and Pedersen, S. (1998) Dense Analytic Subspaces in Fractall 2-Spaces. *Journal d'Analyse Mathématique*, **75**, 185-228. <https://doi.org/10.1007/bf02788699>
- [6] Dai, X., He, X. and Lau, K. (2014) On Spectral N-Bernoulli Measures. *Advances in Mathematics*, **259**, 511-531. <https://doi.org/10.1016/j.aim.2014.03.026>
- [7] Terras, A. (1985) Harmonic Analysis on Symmetric Spaces and Applications I. Springer-Verlag.
- [8] Łaba, I. and Wang, Y. (2002) On Spectral Cantor Measures. *Journal of Functional Analysis*, **193**, 409-420. <https://doi.org/10.1006/jfan.2001.3941>
- [9] Strichartz, R.S. (2006) Convergence of Mock Fourier Series. *Journal d'Analyse Mathématique*, **99**, 333-353. <https://doi.org/10.1007/bf02789451>
- [10] Dutkay, D., Haussermann, J. and Lai, C. (2018) Hadamard Triples Generate Self-Affine Spectral Measures. *Transactions of the American Mathematical Society*, **371**, 1439-1481. <https://doi.org/10.1090/tran/7325>
- [11] An, L., Fu, X. and Lai, C. (2019) On Spectral Cantor-Moran Measures and a Variant of Bourgain's Sum of Sine Problem. *Advances in Mathematics*, **349**, 84-124. <https://doi.org/10.1016/j.aim.2019.04.014>
- [12] An, L., He, L. and He, X. (2019) Spectrality and Non-Spectrality of the Riesz Product Measures with Three Elements in Digit Sets. *Journal of Functional Analysis*, **277**, 255-278. <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2018.10.017>
- [13] An, L. and Lai, C. (2023) Product-Form Hadamard Triples and Its Spectral Self-Similar Measures. *Advances in Mathematics*, **431**, Article 109257. <https://doi.org/10.1016/j.aim.2023.109257>
- [14] Deng, Q. and Chen, J. (2021) Uniformity of Spectral Self-Affine Measures. *Advances in Mathematics*, **380**, Article 107568. <https://doi.org/10.1016/j.aim.2021.107568>
- [15] An, L.-X., Li, Q. and Zhang, M.-M. (2022) Characterization of Spectral Cantor-Moran Measures with Consecutive Digits. *SSRN Journal*. <https://xs.gupiaoq.com/scholar?hl=en&q=Characterization+of+spectral+Cantor-Moran+measures+with+consecutive+digits>
- [16] An, L. and Wang, C. (2021) On Self-Similar Spectral Measures. *Journal of Functional Analysis*, **280**, Article 108821. <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2020.108821>
- [17] Dai, X., He, X. and Lai, C. (2013) Spectral Property of Cantor Measures with Consecutive Digits. *Advances in Mathematics*, **242**, 187-208. <https://doi.org/10.1016/j.aim.2013.04.016>