Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(4), 1-13
Published Online April 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.154103

Hans汉斯

基于加权的分数阶变指数全变差模型研究

张望哲

重庆理工大学理学院，重庆

收稿日期：2025年2月12日；录用日期：2025年3月10日；发布日期：2025年4月2日

摘　要

全变差(Total Variation, TV)模型作为一类重要的图像正则化技术，因其约束图像梯度结构的独特能力，在图像处理与信号分析等领域受到广泛关注。为解决传统TV模型中图像细节丢失与阶梯效应显现等问题。进一步有效保持图像边缘信息并实现重要区域的适度平滑，本文提出一种融合分数阶变指数的改进加权全变差模型。首先，基于log-exp函数特性构建新型加权变指数分数阶全变差模型，通过引入加权函数对图像边缘区域赋予较小权值，而对平滑区域赋予较大权值；其次，运用变分方法推导模型的Euler-Lagrange方程，将优化问题转化为梯度下降流方程进行求解；最后进行了对比实验，结果表明该方法在相关性能上有显著提升，与现有方法相比具有竞争力。

关键词

全变差模型，分数阶变指数，Log-Exp函数，梯度下降流

A Weighted Variable Exponential Fractional Total Variational Model

Wangzhe Zhang

School of Science, Chongqing University of Technology, Chongqing

Received: Feb. 12th, 2025; accepted: Mar. 10th, 2025; published: Apr. 2nd, 2025

Abstract

As a prominent image regularization technique, the Total Variation (TV) model has garnered extensive attention due to its unique capability to constrain gradient structures in images. To address the inherent limitations of conventional TV models—such as loss of fine details and emergence of staircase artifacts—this paper proposes an enhanced weighted total variation model that integrates fractional-order variable exponents. The proposed framework aims to preserve edge information effectively while achieving adaptive smoothing in homogeneous regions. First, a novel weighted

文章引用: 张望哲. 基于加权的分数阶变指数全变差模型研究[J]. 理论数学, 2025, 15(4): 1-13.
DOI: 10.12677/pm.2025.154103

fractional-order variable-exponent TV model is constructed based on the log-exp function, where edge regions are assigned to smaller regularization weights and smoother areas receive larger weights to balance structural fidelity and noise suppression. Second, variational principles are employed to derive the Euler-Lagrange equation, transforming the optimization problem into a gradient descent flow for numerical implementation. Finally, comparative experiments demonstrate that the proposed method achieves significant improvements in both edge preservation and artifact reduction, exhibiting competitive performance against state-of-the-art techniques in terms of quantitative metrics and visual quality.

Keywords

Total Variation Model, Fractional Variable Exponent, Log-Exp Function, Gradient Descent Flow

1. 引言

图像去噪作为数字图像处理中的一个主要问题，其目标是在尽可能保留图像原有细节和特征的前提下，去除噪声，提升其视觉质量。一般来说，图像去噪方法主要包括：空间域滤波(如均值滤波、中值滤波、高斯滤波)、频域滤波(利用傅里叶变换和低通滤波器)、基于模型的方法(如全变差模型、小波变换去噪)以及深度学习方法(如卷积神经网络)等方法[1]。TV 模型的提出背景源于传统线性滤波方法(如高斯滤波)在去噪时易导致边缘模糊的问题，其核心思想是通过最小化图像梯度幅值的L1 范数实现去噪与复原。与传统方法不同，TV 模型基于变分框架，通过保留图像梯度的稀疏性，能够在抑制噪声的同时保持边缘的锐利性。这一特性使其迅速成为图像处理领域(如去噪、去模糊、图像分割与修复以及压缩感知重建)的里程碑式方法。

在图像去噪领域，TV 模型通过最小化梯度幅值，有效分离噪声(高频扰动)与真实边缘(结构性高频信息)，尤其适用于椒盐噪声和高斯噪声的混合场景[2]。在图像去模糊中，模糊核已知或可估计的情况下，TV 正则项可约束解空间，避免反卷积过程中因病态性导致的伪影放大[3]。对于图像分割与修复领域，结合 Mumford-Shah 模型，TV 正则项可用于分割具有不连续边界的区域，或修复破损图像中的结构连续性[4]。运用在压缩感知重建时，在欠采样信号恢复(如 MRI 成像)中，TV 模型作为稀疏先验，能够从少量观测数据中重建高质量图像[5]。

然而，传统 TV 模型存在显著局限性：首先，在平滑区域，由于 L1 范数的线性增长性，TV 正则项对梯度的惩罚随幅度线性增长，使得模型更倾向于生成少量大幅梯度(即分段常数区域)，而非连续变化的平滑过渡，再由其各向同性惩罚机制，TV 模型对梯度的幅值进行惩罚，但忽略方向信息，导致其对图像局部曲率变化不敏感，最终导致人工伪影从而产生阶梯效应[6]；其次，对于梯度幅值较小的边缘，TV 正则项的全局惩罚会将其误判为噪声并予以抑制，使得弱边缘模糊化，而在自然图像的纹理区域，TV 模型因无法区分随机噪声与结构性纹理，导致细节丢失；最后，TV 模型的 L1 范数正则项导致能量泛函非凸，使得优化过程易陷入局部极小而非全局最优解[7] [8]。

现有研究对全变差模型的分析与改进，均在尽可能不丢失图像中原有价值信息的前提下，有效地去除无关噪声带来的影响。具体表现为，通过最小化数据保真项与全变差正则项之和，在保证其重建数据与观测数据尽可能接近的同时，利用全变差来约束解的光滑性，从而有效去除噪声并保留图像的边缘等

重要特征[9] [10]。从数学模型上来说，有如下几类常用的形式。

Tikhonov 正则化可借助处理图像光滑区域的优势，对其进行正则化约束，可以使复原图像保留原先验信息，并在很大程度上使图像趋于平滑。利用 Tikhonov 正则化，可以将把图像复原的病态问题转化为如下模型[11]。

$$\min_{u\in W^{1,2}(\Omega)}\left\{\frac{1}{2}\|Au-g\|_2^2+\Phi Ru_2^2\right\} \tag{1.1}$$

该模型中的前一项为数据保真项，后一项为正则化项。其中

$$W^{1,s}(\Omega)=\begin{cases}\{u\in\Omega|u,\nabla u \quad \text{are absolutely integrable}\}, & s=1\\ \{u\in\Omega|u,\nabla u \quad \text{are square integrable}\}, & s=2\end{cases}$$

u 是待求解图像；A 是一个线性算子，表示观测的模型；g 表示原始图像，即含噪声的图像；R 是正则化矩阵，用于引入先验知识；Φ 是正则化参数，用于平衡数据保真项和正则化项的影响。

一般情况下，在上述模型(1.1)中，如果选择梯度算子作为正则化矩阵 R，即 $R=\nabla$，则正则化项可以表示为 $\|\nabla u\|_2^2$，这种形式增强了解的变化平滑，抑制高频噪声。因此可改写为。

$$\min_{u\in W^{1,2}(\Omega)}E(u)=\left\{\int_\Omega|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x+\frac{\lambda}{2}\int_\Omega|u-g|^2\,\mathrm{d}x\right\} \tag{1.2}$$

一方面，通过对数据保真项引入了一个松弛因子 λ，用来控制图像平滑度。另一方面，该模型中的解过于平滑，使得该模型最终是一个各项同性扩散的模型，因此不能很好地保留图像地边界特征。

随后 Rudin，Osher 以及 Fatemi 提出了另外的全变差正则化模型，即 ROF 模型[2]。

$$\min_{u\in W^{1,1}(\Omega)}E(u)=\left\{\int_\Omega|\nabla u|\mathrm{d}x+\frac{\lambda}{2}\int_\Omega|u-g|^2\,\mathrm{d}x\right\} \tag{1.3}$$

该模型为各项异性扩散模型，有效抑制了高频信息的过度平滑化现象，显著提升了边缘结构的保真度；然而受限于其分段恒定先验假设，在处理连续渐变纹理时易诱发分段常数效应，导致视觉表征出现非物理性阶跃突变。具体而言，通过各向异性扩散方程保持梯度场的局部一致性，这种设计虽然强化了边缘定位精度，却因忽略了纹理区域的连续光滑先验，最终在均匀区域产生伪轮廓现象[12]-[14]。

鉴于传统全变差(TV)模型在抑制噪声时易诱发阶梯效应，而高阶正则化方法虽能缓解此类伪影却易造成纹理过度平滑的矛盾性缺陷，Blomgren 等人提出了一种基于变指数泛函(variable-exponent functional)的自适应正则化模型[15] [16]。

$$\min_{u\in W^{1,p}(\Omega)}E(u)=\left\{\int_\Omega|\nabla u|^{p(|\nabla u|)}\,\mathrm{d}x+\frac{\lambda}{2}\int_\Omega|u-g|^2\,\mathrm{d}x\right\} \tag{1.4}$$

该模型通过构造与图像局部梯度特征动态耦合的正则化指数函数，实现 TV 项($p=1$)与高阶光滑项($p>1$)的连续过渡调控：在边缘区域强化梯度稀疏约束以保持结构锐度，在平滑区域提升正则化阶数以抑制分段常数逼近倾向，从而在频域–空域联合优化中建立了边缘保持与纹理保真间的平衡机制。

模型(1.4)中，能够兼顾提取边界特征和处理平坦区域此方法，本质上整合了 TV 模型的几何保边优势与高阶扩散的渐变适应性，通过非线性耦合策略缓解了传统单一先验假设导致的频域信息表征冲突，为复杂纹理图像复原提供了更优的变分建模范式。但是，变指数函数将梯度模值作为泛函参数，其非线性耦合特性虽增强模型自适应性，却因参数动态关联导致计算复杂度显著提升，且非凸性易引发能量泛函下半连续性缺失，致使变分问题弱紧性难以保证，进而威胁解的存在性及稳定性。

基于此，Chen、Levine 与 Rao 等人构建了分段的修正泛函模型(1.5)，于有界变差函数空间($BV(\Omega)$)

内严格论证了该模型解的适定性及弱收敛性，并证明其可有效抑制伪轮廓生成[17]。

$$\min_{u\in BV(\Omega)\cap L^2(\Omega)} E_{p(x)}(u)=\left\{\int_\Omega \varphi(x,\nabla u)\mathrm{d}x+\frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u-g|^2\mathrm{d}x\right\} \tag{1.5}$$

其中

$$\varphi(x,\nabla u)=\begin{cases}\dfrac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}, & |\nabla u|\le\beta,\\ |\nabla u|-\dfrac{\beta p(x)-\beta^{p(x)}}{p(x)}, & |\nabla u|>\beta,\end{cases}$$

$$p(x)=1+\frac{1}{1+k|\nabla G_\sigma * u(x)|},\quad G_\sigma=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

G_σ 为高斯核函数，$k>0$，$\sigma>0$ 为预设常数，β 则作为可调节变量，通过自适应机制动态平衡模型的灵敏性与鲁棒性。

针对模型复杂度与计算效率的优化需求，Li 等人提出了一种参数简约化的分数阶变指数全变差(Fractional-Order Variable-Exponent Total Variation，FV-TV)模型。

$$\min_{u\in W^{1,p(x)}(\Omega)\cap L^2(\Omega)} E_{p(x)}(u)=\left\{\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}\mathrm{d}x+\frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u-g|^2\mathrm{d}x\right\} \tag{1.6}$$

Li 等人基于变指数 Sobolev 空间($W^{1,p(x)}$)的理论框架，对该模型进行探究，严格论证了模型(1.6)极小化解的存在性和唯一性[18]。此外，P. Harjulehto 等研究了该模型指数达到临界值 1 时图像恢复的变指数模型，得到的结果证明并回答了 Li 和 Pi 提出的收敛性问题[19]。

上述模型(1.6)在边界区域因梯度模值显著，$p(x)\to 1$ 时趋近于 ROF 模型的各向异性扩散机制，继承其边缘锐化与结构保真优势；在平滑区域因梯度模值趋零，$p(x)\to 2$ 时退化为各向同性扩散，实现均匀噪声抑制；通过自适应正则化权重 $p(x)$ 的连续调控，该模型在频域-空域联合优化中动态平衡分段光滑先验与纹理保真需求，有效抑制伪影生成。

分数阶微分算子因具备非局部记忆效应与全局关联特性，且其定义于扩展的 Sobolev 空间中可表征更丰富的图像形态特征，故引入该算子构建的扩散模型能有效抑制二阶偏微分方程(PDE)模型固有的阶梯状伪影，同时增强纹理及弱边缘的拓扑保持性[20]。基于此，受分数阶正则化机制与数据驱动框架的协同优势启发，王迎美等建立了如下融合分数阶导数的自适应变分模型[21]。

$$\min_{u\in W^{1,p(x)}(\Omega)\cap L^2(\Omega)} E_{p(x)}(u)=\left\{\alpha\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|D^v u|^{p(x)}\mathrm{d}x+\lambda\int_\Omega|\nabla u|\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega |u-g|^2\mathrm{d}x\right\} \tag{1.7}$$

其中 D^v 表示 v 阶梯度算子，

$$D^v u=\left(D_x^v u,D_y^v u\right),\quad |D^v u|=\sqrt{\left(D_x^v u\right)^2+\left(D_y^v u\right)^2},\quad 1<v<2\text{。}$$

模型(1.7)通过耦合整数阶微分算子的局部边缘保持能力与分数阶微分算子的非局部关联特性，在变分框架内协同抑制阶梯效应：前者通过各向异性扩散维持边界锐度，后者借助全局记忆效应削弱分段常数逼近倾向，同时约束均匀区域的高频振荡，从而在消除噪声与保留纹理间实现动态平衡，避免传统单一阶次模型因先验刚性导致的过平滑或伪轮廓生成问题。

在图像处理领域，全变差(TV)模型因其对噪声抑制与边缘保留的平衡能力而被广泛应用。然而，传统 TV 模型存在各向同性梯度惩罚、低阶导数表征局限以及全局平滑偏好等问题。为解决这些挑战，近

年来的研究发展中，分数阶变指数全变差模型(FV-TV)作为一种创新方法被逐步提出和优化改进。

传统全变差(TV)模型因依赖整数阶导数的各向同性 L1 范数惩罚，在图像处理中存在阶梯效应、弱边缘模糊及纹理细节丢失等局限。分数阶变指数全变差模型(FV-TV)通过引入分数阶导数与动态变指数函数，显著提升了模型对图像多尺度结构的自适应性。分数阶导数扩展了整数阶微积分的多尺度分析能力，利用非整数阶差分算子解析图像的分形特征，有效捕捉复杂纹理在局部变化中的过渡特性；动态变指数函数则依据局部梯度幅值自适应调整惩罚强度，在平滑区域(低梯度)增强 L2 型平滑抑制阶梯效应，在边缘区域(高梯度)降低惩罚强度以保护弱边缘。同时，结合分数阶基样条(Basis Spline)的方向分解机制，该模型增强了对梯度方向分布的敏感性，可区分噪声与结构性纹理的频谱特征。相较于传统 TV 模型，FV-TV 在医学影像(如 CT 血管细节保留)、遥感图像(如地物边缘增强)等场景中展现出更优的伪影抑制能力与细节重建精度，其核心创新在于通过多尺度分数阶先验与局部自适应惩罚机制的协同，实现了对图像几何结构与噪声统计特性的精细化建模，为高精度图像复原提供了理论突破[22]。

相较于整数阶模型，分数阶微分可以描述介于整数阶微分之间的中间状态，因此，分数阶导数可以更好地捕捉图像边缘的细微变化，对于具有复杂纹理和不规则边缘的图像，能够更精确地保留边缘信息。然而，分数阶变指数全变差模型虽抑制了阶梯效应，但在高纹理密度区域仍面临过平滑问题：正则化项对低对比度纹理的过度稀疏性约束易导致弱显著性细节丢失。因此，本文在分数阶变指数全变差和整数阶全变差模型的基础上，基于 log-exp 函数的性质，构建梯度幅值驱动的自适应权重函数，在变分框架内平衡噪声抑制与纹理连续性先验，从而进一步提高模型的去噪效果。

2. 基于加权的分数阶变指数全变差模型

2.1. 模型改进

结合分数阶变指数全变差以及加权全变差模型的优点，本文提出以下模型。

$$\min_{u\in W^{1,p(x)}(\Omega)\cap L^2(\Omega)} E_{p(x)}(u)=\left\{\alpha\int_\Omega \frac{1}{p(x)}\left|D^v u\right|^{p(x)}\mathrm{d}x+\lambda\int_\Omega \omega\left|\nabla u\right|\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega \left|u-g\right|^2\mathrm{d}x\right\} \tag{2.1}$$

其中 D^v 表示 v 阶梯度算子， $D^v u=\left(D_x^v u, D_y^v u\right)$，

$$\left|D^v u\right|=\sqrt{\left(D_x^v u\right)^2+\left(D_y^v u\right)^2},\quad 1\le v\le 2,$$

$$p(x)=1+\frac{1}{1+k\left|\nabla G_\sigma * u(x)\right|},\quad G_\sigma=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right),$$

$$\omega\left|\nabla u\right|=\sum_{i.j=1}^{n}\left(\omega^x\right)\left|\left(\nabla_x u\right)_{i,j}\right|+\sum_{i.j=1}^{n}\left(\omega^y\right)\left|\left(\nabla_y u\right)_{i,j}\right|$$

$$\omega^x=\varphi_\mu\left(\left|\left(\nabla_x u\right)_{i,j}\right|\right)=\frac{1}{\mu\times\log 2}\times\frac{1}{1+\mathrm{e}^{\left|\left(\nabla_x u\right)_{i,j}\right|/\mu}}$$

$$\omega^y=\varphi_\mu\left(\left|\left(\nabla_y u\right)_{i,j}\right|\right)=\frac{1}{\mu\times\log 2}\times\frac{1}{1+\mathrm{e}^{\left|\left(\nabla_y u\right)_{i,j}\right|/\mu}}$$

2.2. 相关性质

2.2.1. 分数阶项的性质

在模型(2.1)中，分数阶项能够根据图像的梯度信息自适应接近模型(1.2)或(1.3)，从而吸取模型(1.2)或

(1.3)的优点，达到更好的去噪效果。

证：由模型中，$p(x)=1+\frac{1}{1+k\left|\nabla G_\sigma * u(x)\right|}$，$G_\sigma=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$

令 $K(x)=\frac{1}{1+k\left|\nabla G_\sigma * u(x)\right|}$，$k$ 为参数。

在边界区域因梯度模值显著，$K(x)\to 0$，$p(x)\to 1$时趋近于 ROF 模型的各向异性扩散机制，继承其边缘锐化与结构保真优势；在平滑区域因梯度模值趋零，$K(x)\to 1$，$p(x)\to 2$时退化为各向同性扩散，实现均匀噪声抑制。

2.2.2. 加权函数的性质

为了能够利用图像梯度信息的自适应权重分配机制，从而依据局部梯度先验信息动态优化模型参数权重配比，进而实现正则化约束强度的自适应调控，有效提升模型在边缘锐度保持与纹理平滑间的平衡能力。因此在本文提出的模型(2.1)中，整数阶加权项引入了加权函数$\varphi_\mu(|t|)$。

$$\varphi_\mu(|t|)=\frac{1}{\mu\times\log 2}\times\frac{1}{1+e^{|t|/\mu}} \tag{2.2}$$

证：上述模型(2.1)的加权项中引用了$\varphi_\mu(|t|)$，它基于函数$\psi_\mu(t)$的导数部分变形而来[23]。

$$\psi_\mu(|t|)=\frac{1}{\log 2}\log\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{(-|t|)/\mu}}\right),\quad \mu>0 \tag{2.3}$$

定义域：由公式可知，函数$\psi_\mu(|t|)$的定义域为$t\in R$，因为对于任意实数，函数都有定义。

值域：

当$t=0$时，$\psi_\mu(0)=\frac{1}{\log 2}\log\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{0/\mu}}\right)=\frac{1}{\log 2}\log 1=0$；

当$|t|\to+\infty$时，$\lim\limits_{|t|\to+\infty}\psi_\mu(|t|)=\frac{1}{\log 2}\log\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-\infty/\mu}}\right)=\frac{1}{\log 2}\log 2=1$。

因此函数$\psi_\mu(|t|)$的值域为$[0,1]$。

对称性：由于$\psi_\mu(|t|)=\psi_\mu(|-t|)$，所以函数$\psi_\mu(|t|)$是关于$t=0$对称的，$\psi_\mu(|t|)$为偶函数。

单调性：根据函数$\psi_\mu(|t|)$，求得其导数$\psi'_\mu(|t|)$如下

$$\psi'_\mu(|t|)=\begin{cases}\frac{1}{\mu\times\log 2}\times\frac{\mathrm{e}^{-t/\mu}}{1+\mathrm{e}^{-t/\mu}}, & t>0\\ \frac{1}{\mu\times\log 2}\times\frac{\mathrm{e}^{t/\mu}}{1+\mathrm{e}^{t/\mu}}, & t<0\end{cases} \tag{2.4}$$

当$t\neq 0$时，$\psi'_\mu(|t|)>0$，所以函数$\psi_\mu(|t|)$在$(0,+\infty)$上，单调递增，由于函数是偶函数，在$(-\infty,0)$上单调递减。

由此可知，

当$|t|\to+\infty$时，$\psi_\mu(|t|)\to 1$；

当$|t|\to 0$时，$\psi_\mu(|t|)\to 0$。

综上所述，函数$\psi_\mu(|t|)$是一个定义域为$t\in R$，值域为$[0,1]$，并且受参数μ影响其变化陡峭程度的偶函数。

根据函数 $\psi_\mu(|t|)$ 的特性可知，对于数值小的部分，则对应的权重小；当数值较大时，数据点的权重较大，对结果的影响也较大。这对基于梯度信息的图像处理的算法要求而言，是背道而驰的，因此我们考虑其导数的性质。

根据公式(2.3)所求得的 $\psi'_\mu(|t|)$ 可知

$$\begin{cases} \psi'_\mu(|t|) \to 0, & |t| \gg \mu \\ \psi'_\mu(|t|) \text{ is large}, & |t| \ll \mu \end{cases}$$

因此，基于梯度的图像处理算法中，如果 t 表示像素点的梯度值，那么在梯度值较小的区域，导数加权项相对较大，这有助于在这些区域进行更精细的操作；而在梯度值较大的区域，权重迅速减小，避免了在这些区域过度操作。

为了简化权重公式项，减少计算的复杂度。在原函数 $\psi_\mu(|t|)$ 导数的基础上，保证其性质不变的情况下，进一步简化公式，得到需要的加权项为

$$\varphi_\mu(|t|) = \frac{1}{\mu \times \log 2} \times \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{|t|/\mu}}$$

3. 基于梯度下降流方程的算法

3.1. 算法推导

梯度下降法的核心在于通过迭代更新参数，沿目标函数的最速下降方向逼近最优解。在实际应用中，需结合问题特性选择合适的学习率、优化器及终止条件。理论收敛性分析依赖于目标函数的光滑性与凸性假设，而在本文的实现中，先逐步推导出模型的梯度下降流方程，再通过实验验证与调参平衡收敛速度与稳定性。

针对所提模型的数学特性与优化机理，下面需从能量泛函的全局框架展开系统性分析。

$$E(u) = \alpha E_f(u) + \lambda E_\omega(u) + E_d(u) \tag{3.1}$$

本模型能量泛函由三部分构成：变指数 $p(x)$ 分数阶全变差正则化项 $E_f(u)$，加权全变差正则化项 $E_\omega(u)$，以及数据保真能量项 $E_d(u)$。其中正则化权重系数 α 与保真强度参数 λ 作为正定调节参数，通过参数设置动态平衡各能量项对全局泛函的贡献权重。接着基于变分原理，再分别推导出模型各部分对应的梯度下降流方程。

针对分数阶全变差正则化模型，基于变分原理可推导其 Euler-Lagrange 方程。具体而言，选取任意测试函数 $\eta \in C^\infty(\Omega)$，构造与 ε 相关的扰动泛函。

$$\Phi(\varepsilon) = \int_\Omega \frac{1}{p(x)} \left| D^v u + \varepsilon D^v \eta \right|^{p(x)} \mathrm{d}\Omega$$

计算该泛函关于 ε 的导数

$$\begin{aligned} \Phi'(\varepsilon) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} \int_\Omega \frac{1}{p(x)} \left| D^v u + \varepsilon D^v \eta \right|^{p(x)} \mathrm{d}\Omega \\ &= \int_\Omega \left| D^v u + \varepsilon D^v \eta \right|^{p(x)-1} \left| \left(D_x^v u, D_y^v u\right) + \varepsilon \left(D_x^v \eta, D_y^v \eta\right) \right|' \mathrm{d}\Omega \\ &= \int_\Omega \left| D^v u + \varepsilon D^v \eta \right|^{p(x)-1} \left| \left(D_x^v u + \varepsilon D_x^v \eta\right), \left(D_y^v u + \varepsilon D_y^v \eta\right) \right|' \mathrm{d}\Omega \\ &= \int_\Omega \left| D^v u + \varepsilon D^v \eta \right|^{p(x)-1} \sqrt{\left(D_x^v u + \varepsilon D_x^v \eta\right)^2 + \left(D_y^v u + \varepsilon D_y^v \eta\right)^2}' \, \mathrm{d}\Omega \end{aligned}$$

$$=\int_{\Omega}\left|D^{v}u+\varepsilon D^{v}\eta\right|^{p(x)-1}\frac{2\left(D_{x}^{v}u+\varepsilon D_{x}^{v}\eta\right)D_{x}^{v}\eta+2\left(D_{y}^{v}u+\varepsilon D_{y}^{v}\eta\right)D_{y}^{v}\eta}{2\left|D^{v}u+\varepsilon D^{v}\eta\right|}\mathrm{d}\Omega$$

$$=\int_{\Omega}\left|D^{v}u+\varepsilon D^{v}\eta\right|^{p(x)-1}\frac{\left(D_{x}^{v}u+\varepsilon D_{x}^{v}\eta\right)D_{x}^{v}\eta+\left(D_{y}^{v}u+\varepsilon D_{y}^{v}\eta\right)D_{y}^{v}\eta}{\left|D^{v}u+\varepsilon D^{v}\eta\right|}\mathrm{d}\Omega$$

再将 $\varepsilon=0$ 带入，从而得到

$$\Phi'(0)=\int_{\Omega}\frac{D_{x}^{v}uD_{x}^{v}\eta+D_{y}^{v}uD_{y}^{v}\eta}{\left|D^{v}u\right|^{2-p(x)}}\mathrm{d}\Omega$$

$D_{x}^{v^{*}}u$ 与 $D_{y}^{v^{*}}u$ 是 $D_{x}^{v}u$ 与 $D_{y}^{v}u$ 的伴随算子，上式变形后可得

$$\begin{aligned}\Phi'(0)&=\int_{\Omega}\frac{D_{x}^{v}uD_{x}^{v}\eta+D_{y}^{v}uD_{y}^{v}\eta}{\left|D^{v}u\right|^{2-p(x)}}\mathrm{d}\Omega\\&=\int_{\Omega}\left[D_{x}^{v^{*}}u\left(\frac{D_{x}^{v}u}{\left|D^{v}u\right|^{2-p(x)}}\right)+D_{y}^{v^{*}}u\left(\frac{D_{y}^{v}u}{\left|D^{v}u\right|^{2-p(x)}}\right)\right]\eta\mathrm{d}\Omega\end{aligned}$$

由于 η 的任意性，得到它的 Euler-Lagrange 方程

$$D_{x}^{v^{*}}u\left(\frac{D_{x}^{v}u}{\left|D^{v}u\right|^{2-p(x)}}\right)+D_{y}^{v^{*}}u\left(\frac{D_{y}^{v}u}{\left|D^{v}u\right|^{2-p(x)}}\right)=0$$

再得出相应的 $E_{f}(u)$ 的梯度为

$$\nabla E_{f}(u)=D_{x}^{v^{*}}u\left(\frac{D_{x}^{v}u}{\left|D^{v}u\right|^{2-p(x)}}\right)+D_{y}^{v^{*}}u\left(\frac{D_{y}^{v}u}{\left|D^{v}u\right|^{2-p(x)}}\right)$$

则，它的梯度下降流方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\left[D_{x}^{v^{*}}u\left(\frac{D_{x}^{v}u}{\left|D^{v}u\right|^{2-p(x)}}\right)+D_{y}^{v^{*}}u\left(\frac{D_{y}^{v}u}{\left|D^{v}u\right|^{2-p(x)}}\right)\right]\tag{3.2}$$

按照上述方法，同理可得简化后的加权 TV 正则化项的梯度下降流方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\omega^{x}\nabla_{x}\left(\frac{\nabla_{x}u}{\left|\nabla u\right|}\right)+\omega^{y}\nabla_{y}\left(\frac{\nabla_{y}u}{\left|\nabla u\right|}\right)\tag{3.3}$$

令

$$q_{n}=D_{x}^{v^{*}}u\left(\frac{D_{x}^{v}u}{\left|D^{v}u\right|^{2-p(x)}}\right)+D_{y}^{v^{*}}u\left(\frac{D_{y}^{v}u}{\left|D^{v}u\right|^{2-p(x)}}\right)\tag{3.4}$$

$$r_{n}=\omega^{x}\nabla_{x}\left(\frac{\nabla_{x}u}{\left|\nabla u\right|}\right)+\omega^{y}\nabla_{y}\left(\frac{\nabla_{y}u}{\left|\nabla u\right|}\right)\tag{3.5}$$

将(3.2)至(3.5)的公式带入模型(3.1)中，得到模型的梯度下降流方程表达为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\alpha q_n+\lambda r_n-(u-g) \tag{3.6}$$

假设初始图像 u 被表示为一个 $m\times n$ 的矩阵。我们将时间间隔步长定义为 Δt，时间步长定义为 $t=n\Delta t$。根据上面的梯度下降流方程，可得模型的数值离散迭代表达为

$$u_{n+1}=u_n-\Delta t\left[\alpha q_n-\lambda r_n+(u_n-g)\right] \tag{3.7}$$

其中，

$$\begin{aligned}
D_x^v u&=F^{-1}\left(\left(1-\exp(-i2\pi w_1/m)\right)^v F(u)\right)\\
D_y^v u&=F^{-1}\left(\left(1-\exp(-i2\pi w_2/n)\right)^v F(u)\right)\\
D_x^{v^*} u&=F^{-1}\left(conj\left(\left(1-\exp(-i2\pi w_1/m)\right)^v\right)F(u)\right)\\
D_y^{v^*} u&=F^{-1}\left(conj\left(\left(1-\exp(-i2\pi w_2/n)\right)^v\right)F(u)\right)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

上式中，F 与 F^{-1} 分别表示二维离散傅里叶变换(DFT)及其逆变换(IDFT)的线性算子，$conj(\bullet)$ 为复共轭算子。

$w_1=0,1,2,\cdots,m-1$，$w_2=0,1,2,\cdots,n-1$ 是对应的 x 和 y 的离散傅里叶变换频率[24]。

3.2. 算法步骤

下面给出具体的算法步骤：

梯度下降算法
Step1：输入噪声图像 g，设置初始参数：$n=1,u_n=g,\Delta t,t=n\Delta t,\alpha,k,v,\lambda,\mu$；
Step2：计算分数阶梯度 $D_x^v u$，$D_y^v u$；
Step3：计算变指数 $p(x)$；
Step4：根据 Step2 和 Step3 的结果，计算 $D_x^{v^*} u$，$D_y^{v^*} u$；
Step5：根据等式(3.4)和(3.5)计算 q_n 和 r_n；
Step6：计算 $u_{n+1}=u_n-\Delta t\left[\alpha q_n-\lambda r_n+(u-g)\right]$，设置迭代次数 $n=n+1$；如果 $n=N$，输出 u_{n+1}，结束算法；否则返回到 Step2。

4. 数值实验

本节中，我们将测试所提出模型的性能，并与全变差模型(TV)和分数阶变指数和整数阶全变差模型(Fractional-order variable exponent and integer-order total variation models, FVAI)的数值结果进行比较[21] [23]。为了比较去噪后图像的质量，我们借助 python 程序，计算了峰值信噪比(Peak Signal-to-Noise Ratio, PSNR)以及结构相似性指数(Structural Similarity Index, SSIM)。峰值信噪比(PSNR)的定义如下：

$$\mathrm{PSNR}=10\log_{10}\left(\frac{\mathrm{MAX}^2}{\mathrm{MSE}}\right)$$

其中，MAX 是图像的最大灰度值，MSE 定义为：

$$\mathrm{MSE}=\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left[u(i,j)-u_n(i,j)\right]^2$$

由定义可以看出，峰值信噪比与图像去噪效果是正相关的，去噪效果越好，峰值信噪比数值越大。

结构相似性指数(SSIM)是衡量两幅图像间的相似度的指标，它的定义为：

$$\mathrm{SSIM}(x,y)=\frac{\left(2\bar{\mu}_x\bar{\mu}_y+C_1\right)\left(2\sigma_{xy}+C_2\right)}{\left(\bar{\mu}_x^2+\bar{\mu}_y^2+C_1\right)\left(\sigma_x^2+\sigma_y^2+C_2\right)}$$

其中，$\bar{\mu}_x$，$\bar{\mu}_y$，σ_x，σ_y 和 σ_{xy} 分别表示图像 X 和 Y 的局部均值、标准差和互协方差。C_1 和 C_2 是可以调整的参数。SSIM 的范围为 0 到 1。当 SSIM 趋于 1 时，两幅图像更加相似，表明去噪图像的结构得到了更好的保持。

本文模拟实验的设备处理器为 Intel(R) Core(TM) i7-6700HQ CPU @ 2.60 GHz，使用的 python 版本为 3.8.8。在用 python 对模型进行编译时，为了避免数值计算过程中的溢出问题导致程序报错，所以将图像数据转换为浮点数后除以 255。由此在进行乘法、幂运算等操作时，能够保持结果的稳定性和精确度，方便后续的各种数值计算和模型处理。

下面展示对图像(Cameraman)添加标准差为 12.75 (stddev = 0.05)的高斯噪声时，全变差模型(TV)、分数阶变指数和整数阶模型(FVAI)以及本文模型的去噪结果。

Figure 1. Original image
图 1. 原图

Figure 2. Noisy image
图 2. 噪声图像

Figure 3. TV denoised image
图 3. TV 去噪图像

Figure 4. FVAI denoised image
图 4. FVAI 去噪图像

Figure 5. Ours denoised image
图 5. 本文模型去噪图像

基于图 1~5 的直观对比分析，本研究构建的模型在降噪性能方面表现得更加优异。视觉评估结果显

示，相较于对比中的去噪方法，本文模型重构的图像纹理更清晰且细节保留更完整，主观视觉评价表明其输出结果与原始图像具有更高的相似度。

表 1 和表 2 分别从峰值信噪比(PSNR)和结构相似性指数(SSIM)，对全变差模型(TV)、分数阶变指数和整数阶模型(FVAI)以及本文模型的去噪结果进行客观量化比较。

Table 1. Peak Signal-to-Noise Ratio (PSNR) for different Gaussian noise standard deviations (stddev)
表 1. 不同高斯噪声标准差(stddev)的峰值信噪比(PSNR)

Cameraman	TV 模型	FVAI 模型	本文模型
stddev = 0.01	39.8210	32.4428	32.7143
stddev = 0.02	34.0765	32.3668	32.6185
stddev = 0.03	31.4162	32.2846	32.5182
stddev = 0.04	30.2380	32.1491	32.4295
stddev = 0.05	29.5601	32.0531	32.3342

Table 2. Structural Similarity Index (SSIM) for different Gaussian noise standard deviations (stddev)
表 2. 不同高斯噪声标准差(stddev)的结构相似性指数(SSIM)

Cameraman	TV 模型	FVAI 模型	本文模型
stddev = 0.01	0.9495	0.8250	0.8392
stddev = 0.02	0.8408	0.8179	0.8328
stddev = 0.03	0.7281	0.8124	0.8284
stddev = 0.04	0.6342	0.8048	0.8221
stddev = 0.05	0.5616	0.7953	0.8147

从表中的数据结果可以看出，伴随噪声水平的逐步递增，TV 模型的去噪效果会大幅度降低，稳定性较弱；而本文模型的去噪效果较为稳定，且在对标准差为 12.75 以内的高斯噪声图像处理结果上，峰值信噪比(PSNR)和结构相似性指数(SSIM)都比 FVAI 模型更大。

5. 总结

在全变差模型的演化发展中，分数阶微分算子与变指数泛函的引入显著提升了模型对图像多尺度结构的自适应性。相较于整数阶模型，分数阶微分可以描述介于整数阶微分之间的中间状态，因此，分数阶导数可以更好地捕捉图像边缘的细微变化，对于具有复杂纹理和不规则边缘的图像，能够更精确地保留边缘信息。本文在分数阶变指数全变差和整数阶全变差模型的基础上，基于 log-exp 函数的性质，构建梯度幅值驱动的自适应权重函数，在变分框架内平衡噪声抑制与纹理连续性先验，最后通过数值实验的结果，验证了所提模型在噪声抑制与伪影消除间的动态平衡性，并证实其在去噪效果方面展现出更高的稳定性和鲁棒性。

本研究聚焦于全变差模型的理论演进与改进策略，提出了一种基于分数阶变指数框架的增强型图像复原模型。区别于传统 TV 模型对各向同性梯度信息的单一处理机制，本工作通过双重创新路径实现图像细节的鲁棒性保留：其一，构建分数阶变指数正则化项以突破整数阶导数的多尺度表征局限，其非局部微分特性可精准捕捉图像的非整数阶奇异性；其二，设计具有梯度先验感知能力的自适应加权函数，通过建立梯度幅值与权值系数的非线性映射关系，动态平衡整数阶正则项对模型的贡献度。文中系统论证了加权函数的构造准则及其连续性、单调衰减性等数学特性，确保模型在抑制阶梯效应的同时增强纹理敏感性。实验部分通过峰值信噪比(PSNR)与结构相似性(SSIM)指标的跨数据集对比，验证了改进模型在合成噪声(高斯噪声)影响下的图像去噪能力。尽管本文侧重模型建立的由来以及数值模拟验证而暂未

拓展至求解优化问题的严格收敛性证明，但所提出的“分数阶架构–自适应加权”协同优化机制，为高阶全变差模型的设计提供了可扩展的理论框架，对后续研究者研究影像超分辨率重建与遥感图像修复领域具有方法论启示意义。

参考文献

[1] 马云，曾祥忠．图像去噪方法探析[J]．科技与创新, 2016(23): 84, 87.

[2] Rudin, L.I., Osher, S. and Fatemi, E. (1992) Nonlinear Total Variation Based Noise Removal Algorithms. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **60**, 259-268. https://doi.org/10.1016/0167-2789(92)90242-f

[3] Chan, T.F. and Wong, C.-K. (1998) Total Variation Blind Deconvolution. *IEEE Transactions on Image Processing*, **7**, 370-375. https://doi.org/10.1109/83.661187

[4] Vese, L.A. and Chan, T.F. (2002) A Multiphase Level Set Framework for Image Segmentation Using the Mumford and Shah Model. *International Journal of Computer Vision*, **50**, 271-293. https://doi.org/10.1023/a:1020874308076

[5] Candès, E.J. (2007) Compressive Sampling. In: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians Madrid*, EMS Press, 1433-1452. https://doi.org/10.4171/022-3/69

[6] 周国栋．一种抑制图像阶梯效应的改进全变分去噪方法[J]．计算机应用与软件, 2022, 39(4): 263-268.

[7] 葛阳祖．全变差正则化模型的噪声图像复原算法[D]: [硕士学位论文]．兰州：西北师范大学, 2022.

[8] 谈晶圩，杨敏．基于改进的全变分图像去噪算法研究[J]．南京邮电大学学报(自然科学版), 2020, 40(2): 95-100.

[9] 郭杰斌．图像复原与分割的偏微分方程模型与数值实现[D]: [博士学位论文]．重庆：重庆大学, 2020.

[10] 施帅威．保边保细节图像去噪的各向异性扩散模型[D]: [硕士学位论文]．重庆：重庆大学, 2022.

[11] Tikhonov, A.N. and Arsenin, V.Y. (1977) Solutions of Ill Posed Problems. Wiley.

[12] You, Y.-L., Xu, W.Y., Tannenbaum, A. and Kaveh, M. (1996) Behavioral Analysis of Anisotropic Diffusion in Image Processing. *IEEE Transactions on Image Processing*, **5**, 1539-1553. https://doi.org/10.1109/83.541424

[13] Strong, D. and Chan, T. (2003) Edge-Preserving and Scale-Dependent Properties of Total Variation Regularization. *Inverse Problems*, **19**, S165-S187. https://doi.org/10.1088/0266-5611/19/6/059

[14] Nikolova, M. (2004) Weakly Constrained Minimization: Application to the Estimation of Images and Signals Involving Constant Regions. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, **21**, 155-175. https://doi.org/10.1023/b:jmiv.0000035180.40477.bd

[15] Blomgren, P., Chan, T.F., Mulet, P. and Wong, C.K. (1997) Total Variation Image Restoration: Numerical Methods and Extensions. *Proceedings of International Conference on Image Processing*, **3**, 384-387. https://doi.org/10.1109/icip.1997.632128

[16] Blomgren, P. and Chan, T.F. (1998) Color TV: Total Variation Methods for Restoration of Vector-Valued Images. *IEEE Transactions on Image Processing*, **7**, 304-309. https://doi.org/10.1109/83.661180

[17] Chen, Y., Levine, S. and Rao, M. (2006) Variable Exponent, Linear Growth Functionals in Image Restoration. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **66**, 1383-1406. https://doi.org/10.1137/050624522

[18] Li, F., Li, Z. and Pi, L. (2010) Variable Exponent Functionals in Image Restoration. *Applied Mathematics and Computation*, **216**, 870-882. https://doi.org/10.1016/j.amc.2010.01.094

[19] Harjulehto, P., Hästö, P., Latvala, V. and Toivanen, O. (2013) Critical Variable Exponent Functionals in Image Restoration. *Applied Mathematics Letters*, **26**, 56-60. https://doi.org/10.1016/j.aml.2012.03.032

[20] Bai, J. and Feng, X. (2007) Fractional-Order Anisotropic Diffusion for Image Denoising. *IEEE Transactions on Image Processing*, **16**, 2492-2502. https://doi.org/10.1109/tip.2007.904971

[21] 王迎美，王桢东，李功胜．基于变指数分数阶全变差和整数阶全变差的图像恢复算法[J]．山东大学学报(理学版), 2019, 54(11): 115-126.

[22] 刘灿．几类分数阶方程的半正交 B 样条小波方法[D]: [博士学位论文]．哈尔滨：哈尔滨工业大学, 2022.

[23] Lazzaro, D., Loli Piccolomini, E. and Zama, F. (2019) A Fast Splitting Method for Efficient Split Bregman Iterations. *Applied Mathematics and Computation*, **357**, 139-146. https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.03.065

[24] Shu, X., Han, J., Zhan, Y. and Wang, Z. (2022) An Improved Image Denoising Method Based on Variable-Order Fractional-Order Anisotropic Diffusion. 2022 7*th International Conference on Signal and Image Processing* (*ICSIP*), Suzhou, 20-22 July 2022, 468-472. https://doi.org/10.1109/icsip55141.2022.9886618