

具有上临界指数的 p -Choquard方程基态解的存在性

李银莹

广西师范大学数学与统计学院, 广西 桂林

收稿日期: 2025年2月17日; 录用日期: 2025年3月20日; 发布日期: 2025年4月16日

摘 要

该文讨论下列具有上临界指标的 p -Choquard方程

$$\begin{cases} -\Delta_p u + V(x)|u|^{p-2}u = \left[(-\Delta^D)^{\frac{-\alpha}{2}} * |u|^{p_\alpha^*} \right] |u|^{p_\alpha^*-2}u, & \text{in } \mathbb{R}^N; \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad \text{其中 } N \geq 3, \quad p_\alpha^* = \frac{p}{2} \left(\frac{N+\alpha}{N-p} \right) \text{ 是关于Hardy-}$$

Littlewood-Sobolev不等式的上临界指数, $2 \leq p < N$, $\Delta_p := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$, $(-\Delta^D)^{\frac{-\alpha}{2}}$ 是关于Dirichlet边界条件下的Riesz变分位势, 指数 $\alpha \in (0, N)$ 。该文通过Nehari流形和山路引理证明上述方程存在基态解。

关键词

p -Choquard方程, 上临界指数, 基态解, Nehari流形, 山路引理

Existence of Ground State Solution for p -Choquard Equation with Upper Critical Exponent

Yinying Li

College of Mathematics and Statistic, Guangxi Normal University, Guilin Guangxi

Received: Feb. 17th, 2025; accepted: Mar. 20th, 2025; published: Apr. 16th, 2025

Abstract

In this paper, we are concerned with the following p -Choquard equation with upper critical

exponent:
$$\begin{cases} -\Delta_p u + V(x)|u|^{p-2}u = \left[(-\Delta^D)^{\frac{-\alpha}{2}} * |u|^{p_\alpha^*}\right] |u|^{p_\alpha^*-2}u, & \text{in } \mathbb{R}^N; \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad \text{where } N \geq 3,$$

$p_\alpha^* = \frac{p}{2} \left(\frac{N+\alpha}{N-p} \right)$ is the upper critical Hardy-Littlewood-Sobolev exponent, $2 \leq p < N$,

$\Delta_p := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$, $(-\Delta^D)^{\frac{-\alpha}{2}}$ is the Riesz fractional potential with Dirichlet boundary condition. $\alpha \in (0, N)$. We study the existence of the ground state solution to above equation by using the methods of Nehari manifold and the Mountain Pass Lemma.

Keywords

p -Choquard Equation, Upper Critical Exponent, Ground State Solution, Nehari Manifold, Mountain Pass Lemma

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

本文考虑如下具有 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式的上临界指数的 p -Choquard 方程

$$\begin{cases} -\Delta_p u + V(x)|u|^{p-2}u = \left[(-\Delta^D)^{\frac{-\alpha}{2}} * |u|^{p_\alpha^*}\right] |u|^{p_\alpha^*-2}u, & \text{in } \mathbb{R}^N; \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (1.1)$$

基态解的存在性, 其中 $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 3$, $V(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ 。指数 $p_\alpha^* = \frac{p}{2} \left(\frac{N+\alpha}{N-p} \right)$ 是关于 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式的上临界指数, $\Delta_p := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ 是 p -Laplace 算子。目前在 Dirichlet 边界条件下的 Riesz 变分位势 $(-\Delta^D)^{\frac{-\alpha}{2}}$ 未被广泛研究。

Choquard 方程是一类重要的量子物理方程, 拥有深厚的物理背景。1954 年, Pekar [1] 在他关于量子力学理论的极化子模型的研究中首次介绍了著名的 Choquard-Pekar 方程

$$-\Delta u + u = \left(\frac{1}{|x|} * |u|^2 \right) u, \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \quad (1.2)$$

后来, Choquard 将方程(1.2)看作是一个电子阱模型, 并用其近似于单组分等离子体的 Hartree-Fock 理论。在文献[2]中, Lieb 研究了方程(1.2)基态解的存在唯一性。Penrose [3] 在 1996 年研究量子态的衰减

时,他提出了方程(1.2)作为一个自引模型,可以用来描述单个粒子在引力场中的运动。此时,方程(1.2)被称为 Schrödinger-Newton 方程。后来,基于球对称性和解的平滑性的假设下, Moroz 首先在[4]中对 Schrödinger-Newton 方程的解进行数值和分析后得到初步结论。随后,基于文献[5]的研究, Moroz 和 Schaftingen 在文献[6]中研究了下述非线性 Choquard 方程基态解的存在性结果:

$$-\Delta u + u = \left(I_\alpha * |u|^\xi \right) |u|^{\xi-2} u, \quad \text{in } \mathbb{R}^N, \quad (1.3)$$

其中 $I_\alpha: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ 是关于阶 $\alpha \in (0, N)$ 的 Riesz 位势。对于任意的 $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, I_α 可定义为:

$$I_\alpha(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{N-\alpha}{2}\right)}{2^\alpha \pi^{\frac{N}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) |x|^{N-\alpha}}.$$

当指数 $\xi \in \left(\frac{N+\alpha}{N}, \frac{N+\alpha}{N-2}\right)$ 时,他们利用变分法和常微分方程的技巧证明了方程(1.3)存在正的基态解。此外,他们还给出了该方程基态解的正则性结果以及每一个正的基态解都是径向对称的,并且在无穷远处单调衰减。我们将 $\frac{N+\alpha}{N-2}$ 和 $\frac{N+\alpha}{N}$ 分别称为关于 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式的上(下)临界指标。之后他们推广了文献[7]的结论,即当 $\xi = \frac{N+\alpha}{N}$ 时,方程(1.3)仍存在基态解。

近年来,许多学者关注具有局部非线性扰动和在无穷远处消失的位势函数 $V(x)$ 的 Choquard 方程:

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = \left(I_\alpha * |u|^\xi \right) |u|^{\xi-2} u + f(x, u), & \text{in } \mathbb{R}^N; \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (1.4)$$

其中 $N \geq 1$, $\frac{N+\alpha}{N} < \xi < \frac{N+\alpha}{N-\alpha}$, I_α 是 Riesz 位势函数。特别地,当指数 $\xi = \frac{N+\alpha}{N}$ 时, Wu 等学者在文献[8]中研究了上述方程在周期性和非对称周期性两种情形下基态解的存在性问题。同时,具有 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式的临界指数的 Choquard 方程的基态解问题同样吸引了许多数学学者。对于上临界指数的情形,可阅读文献[9]-[13]; 对于下临界指数的情形,可参考文献[14]-[16]。

对于双临界指标的情形, Seok 在文献[17]中考虑了方程,利用山路引理证得方程

$$-\Delta u + u = \left[I_\alpha * \left(\frac{|u|^{2_\alpha^*}}{2_\alpha^*} + \frac{|u|^{2_\alpha^*}}{2_\alpha^*} \right) \right] \left(|u|^{2_\alpha^*-2} u + |u|^{2_\alpha^*-2} u \right), \quad (1.5)$$

存在非平凡径向解。随后, Liu 和 Chen 将 Seok 的结论推广到 p-Laplace 的情形,在文献[18]中利用山路引理与 Nehari 流形研究了如下的 p-Choquard 方程的非负基态解的存在性问题:

$$-\Delta_p u + V(x)|u|^{p-2} u = \left[I_\alpha * \left(\frac{\lambda |u|^{p_\alpha^*}}{p_\alpha^*} + \frac{|u|^{p_\alpha^*}}{p_\alpha^*} \right) \right] \left(\lambda |u|^{p_\alpha^*-2} u + |u|^{p_\alpha^*-2} u \right), \quad (1.6)$$

其中 $N \geq 3$, $p \in (1, \sqrt{N})$, $\alpha \in (0, N)$ 。他们首先通过一些技巧得到了一个 $(PS)_c$ 序列,其中 c 小于所需的能量,并且 $(PS)_c$ 序列是 Non-vanishing 的,结合 Nehari 流形的一些性质,应用具有 Morrey 范数的 Sobolev 不等式和 Lion-type 定理,完成了方程存在非负基态解的证明。关于具有双临界指数的 Choquard 方程,可参考文献[19]-[22]。

文献[23]讨论在有限格点图 N^n 上的 p -Choquard 方程

$$-\Delta_p u + V(x)|u|^{p-2}u = \left(\sum_{y \in N_n, y \neq x} \frac{|u(y)|^q}{d(x, y)^\alpha} \right) |u|^{q-2}u, \quad (1.7)$$

其中 $n \in \mathbb{N}^+$ 是顶点的数量, 且 $p > 1$, $q > 1$, $0 \leq \alpha \leq n$ 是一些常数, $V(x)$ 是在 N^n 上的正函数。Liu 和 Zhang 借助 Nehari 方法证明了在 $1 \leq p \leq q$ 的条件下, 上述方程存在一个基态解。该研究结果涵盖了 $\alpha = 0$ 和 $\alpha = n$ 等临界情形, 从而进一步推进了格点图上 Choquard 方程的研究领域。

基于上述研究, p -Choquard 方程是在二阶 Choquard 方程的基础上, 结合了非线性项和 p -Laplace 算子的非线性椭圆方程, 研究 p -Choquard 方程可以推动数学工具的发展, 如山路引理、Nehari 流形等, 并将其应用于其他非线性问题。而 p -Choquard 方程基态解的存在性的研究对于量子力学和凝聚态物理中的模型验证也至关重要。

本文的主要定理如下:

定理 1.1 假设 $N \geq 3, \alpha \in (0, N)$, 则 p -Choquard 方程(1.1)存在基态解。

下面给出本文的主要证明思路。对山路水平的估计以及有界 Palais-Smale 序列的弱极限是否为零的临界点这两个问题给我们的证明带来了挑战。为了克服上述困难, 我们将能量泛函 $\mathcal{J}$ 约束在 Nehari 流形中, 接着, 我们证明山路水平不仅与 $\mathcal{J}$ 在 Sobolev 空间 $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 中的极小值相等, 还与 $\mathcal{J}$ 在 Nehari 流形中的极小值相等, 且它们都属于区间 $\left(0, k_* = \frac{\alpha + p}{p(N + \alpha)} S^{\frac{N + \alpha}{\alpha + p}}\right)$ 。然后我们证明了 Palais-Smale 序列的有界性。最后由集中紧性定理得到了定理 1.1 成立。

本文主要分为三个部分。第一部分主要介绍了 Choquard 方程的物理背景及研究方向, 第二部分给出了一些基本的定义和本文所需要的命题, 第三部分证明了方程(1.1)基态解的存在性。

2. 预备知识

令 $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ 是具有紧支集的光滑函数的全体。

定义 Sobolev 空间 $\mathcal{E} = \left\{ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^p + V(x)|u|^p) dx < \infty \right\}$ 是 $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ 的完备化, 空间 $\mathcal{E}$ 范数为

$$\|u\|_{\mathcal{E}}^p := \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^p + V(x)|u|^p) dx, u \in \mathcal{E},$$

其中 $V(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ 。

由 Gagliardo-Nirenberg 不等式得, 对于任意 $u \in \mathcal{E}$, $\|u\|_{L^r(\mathbb{R}^N)} \leq C_1 \|u\|_{\mathcal{E}}^p$, 其中 $p \leq r \leq p^* = \frac{Np}{N-p}$ 。

基于变分法, 在空间 $\mathcal{E}$ 上建立方程(1.1)的变分框架。对任意函数 $u \in \mathcal{E}$, 方程(1.1)对应的能量泛函为:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^p + V(x)|u|^p) dx - \frac{1}{2p_\alpha^*} \int_{\mathbb{R}^N} \left[(-\Delta^D)^{\frac{-\alpha}{2}} * |u|^{p_\alpha^*} \right] |u|^{p_\alpha^*} dx. \quad (2.1)$$

显然, $\mathcal{J}$ 是 $\mathcal{E}$ 上的 C^1 泛函, 且对任意的 $u, \varphi \in \mathcal{E}$, 有

$$\langle \mathcal{J}'(u), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi + V(x)|u|^{p-2} u \varphi) dx - \int_{\mathbb{R}^N} \left[(-\Delta^D)^{\frac{-\alpha}{2}} * |u|^{p_\alpha^*} \right] |u|^{p_\alpha^*-1} \varphi dx. \quad (2.2)$$

于是, 方程(1.1)的基态解对应能量泛函 $\mathcal{J}$ 的临界点。

定义 2.1 (Riesz 变分拉普拉斯位势[24])在有界区域 Ω 中, 具有 Dirichlet 边界条件的 Riesz 变分拉普拉

斯位势可被定义为

$$(-\Delta^D)^{\frac{-\alpha}{2}} = C(N, \alpha) \left(P.V. \int_{\Omega} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{N-\alpha}} dy + \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} \frac{u(x) - g(y)}{|x - y|^{N-\alpha}} dy \right),$$

其中 $P.V.$ 表示积分主值:

$$P.V. \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{N-\alpha}} dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{\varepsilon}(x)} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{N-\alpha}} dy,$$

且 $B_{\varepsilon}(x) := \{y \in \mathbb{R}^N : |x - y| < \varepsilon\}$, $x \in \Omega$ 。

定义 2.2 令 $\mathcal{E}$ 是实 Banach 空间, $\mathcal{J}$ 是 $\mathcal{E}$ 上的 C^1 泛函, 存在序列 $u_n \subset \mathcal{E}$ 满足, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

(1) 若 $\mathcal{J}(u_n) \rightarrow k$, $\mathcal{J}'(u_n) \rightarrow 0$, 则称序列 $\{u_n\}$ 为 $\mathcal{J}$ 的 $(PS)_k$ 序列;

(2) 若 $\mathcal{J}$ 的每个 $(PS)_k$ 序列都有收敛子列, 则称 $\mathcal{J}$ 满足在 $k \in \mathbb{R}$ 处的 Palais-Smale 条件。

注 2.1 Palais-Smale 条件是山路引理应用的前提之一。在本问题中, 为了满足 Palais-Smale 条件, 我们需要证明 $\mathcal{J}$ 的 $(PS)_k$ 序列 $\{u_n\}$ 在空间 $\mathcal{E}$ 中有界且具有非消失性。

命题 2.1 (Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式[25]) 假设 $s, t \in (1, \infty)$, $0 < \alpha < N$ 有 $\frac{1}{s} + \frac{1}{t} + \frac{\alpha}{N} = 2$ 成立, 则对任意的 $w_1 \in L^s(\mathbb{R}^N)$, $w_2 \in L^t(\mathbb{R}^N)$, 存在常数 $C(N, \alpha, s, t) > 0$ 使得

$$\left| \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{w_1(x) w_2(y)}{|x - y|^{N-\alpha}} dx dy \right| \leq C(N, \alpha, s, t) \|w_1\|_s \|w_2\|_t.$$

成立。特别地, 若 $s = r = 2N/(N + \alpha)$, 则

$$C(N, \alpha, s, t) = \pi^{(N-\alpha)/2} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma((N+\alpha)/2)} \left[\frac{\Gamma(N/2)}{\Gamma(N)} \right]^{-\alpha/N}.$$

命题 2.2 ([25]) 假设 $N \geq 1$, $\alpha \in (0, N)$, $s \in \left(1, \frac{N}{\alpha}\right)$ 。若 $\phi \in L^s(\mathbb{R}^N)$, 则有 $(-\Delta^D)^{\frac{-\alpha}{2}} * \phi \in L^{\frac{Ns}{N-\alpha s}}(\mathbb{R}^N)$ 及

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left| (-\Delta^D)^{\frac{-\alpha}{2}} * \phi \right|^{\frac{Ns}{N-\alpha s}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\phi|^s \right)^{\frac{N}{N-\alpha s}}, \quad (2.3)$$

其中常数 C 依赖于 α, N, s 。

注 2.2 特别地, 对任意的 $\xi > 0$, 令 $w_1 = w_2 = |u|^{\xi}$ 。根据命题 2.1, 若 $u \in L^{t\xi}(\mathbb{R}^N)$, $t > 1$, $\frac{2}{t} - \frac{\alpha}{N} = 1$ 满足 $\frac{2}{t} - \frac{\alpha}{N} = 1$, 则 $\int_{\mathbb{R}^N} \left[(-\Delta^D)^{\frac{-\alpha}{2}} * |u|^{\xi} \right] |u|^{\xi}$ 成立。由 Sobolev 嵌入定理, 若 $u \in \mathcal{E}$, 有 $t\xi \in [p, p^*]$ 。从而可知

$$\frac{p}{2} \left(\frac{N+\alpha}{N} \right) \leq \xi \leq \frac{p}{2} \left(\frac{N+\alpha}{N-p} \right) := p_{\alpha}^*.$$

于是, 在 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式的意义下, $\frac{p}{2} \left(\frac{N+\alpha}{N} \right)$ 与 $\frac{p}{2} \left(\frac{N+\alpha}{N-p} \right)$ 分别被称为下临界指标与上临界指标。

由命题 2.1 以及 Riesz 变分位势的性质 $(-\Delta^D)^{\frac{-\alpha}{2}} = (-\Delta^D)^{\frac{-\alpha}{4}} * (-\Delta^D)^{\frac{-\alpha}{4}}$ ([25], Corollary 5.10), 公式(2.3) 可写为

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left((-\Delta^D)^{\frac{-\alpha}{2}} * |u|^p \right) |u|^p = \int_{\mathbb{R}^N} \left| (-\Delta^D)^{\frac{-\alpha}{4}} * |u|^p \right|^2 \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 \right)^p.$$

另外, Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式(2.3)在本文中的情形为

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left((-\Delta^D)^{\frac{-\alpha}{2}} * |u|^{p_\alpha^*} \right) |u|^{p_\alpha^*} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 \right)^{p_\alpha^*} \leq C_1 \|u\|_{L^{p_\alpha^*}}^{2p_\alpha^*}, \quad (2.4)$$

其中 $C = C(\alpha, N)$ 是依赖于 α, N 的常数。

定义最佳 Sobolev 常数

$$\mathcal{S}_* := \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx : u \in \mathcal{E} \setminus \{0\}, \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p_\alpha^*} dx \right)^{\frac{p}{p_\alpha^*}} = 1 \right\}. \quad (2.5)$$

定义关于 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式的最佳常数

$$\mathcal{S} := \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx : u \in \mathcal{E} \setminus \{0\}, \int_{\mathbb{R}^N} \left[(-\Delta^D)^{\frac{-\alpha}{2}} * |u|^{p_\alpha^*} \right] |u|^{p_\alpha^*} dx = 1 \right\}. \quad (2.6)$$

3. 定理 1.1 的证明

在下面的引理中, 首先验证能量泛函 $\mathcal{J}$ 具有山路几何结构。

引理 3.1 能量泛函 $\mathcal{J}$ 满足山路几何结构, 即

(1) 存在常数 $\alpha, \sigma > 0$, 使得 $\mathcal{J}|_{S_\sigma} \geq \alpha > 0$, 其中

$$S_\sigma := \{u \in \mathcal{E} : \|u\|_\mathcal{E} = \sigma\};$$

(2) 存在函数 $u_0 \in \mathcal{E}$, $\|u_0\|_\mathcal{E} > \sigma$, 使得 $\mathcal{J}(u_0) < 0$ 。

证 (1) 设常数 $\mu > 0$ 。结合命题 2.1 和 Sobolev 嵌入定理得,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(u) &= \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^p + V(x)|u|^p) dx - \frac{1}{2p_\alpha^*} \int_{\mathbb{R}^N} \left[(-\Delta^D)^{\frac{-\alpha}{2}} * |u|^{p_\alpha^*} \right] |u|^{p_\alpha^*} \\ &\geq \frac{1}{p} \|u\|_\mathcal{E}^p - \mu \|u\|_\mathcal{E}^{2p_\alpha^*} \\ &= \|u\|_\mathcal{E}^p \left(\frac{1}{p} - \mu \|u\|_\mathcal{E}^{2p_\alpha^* - p} \right). \end{aligned}$$

则

$$\mathcal{J}|_{S_\sigma} \geq \sigma^p \left(\frac{1}{p} - \mu \|u\|_\mathcal{E}^{2p_\alpha^* - p} \right) \geq 0.$$

从而存在常数 α 和 σ 充分小时, 可知 $\mathcal{J}|_{S_\sigma} \geq \alpha > 0$ 。

(3) 对任意 $u \in \mathcal{E} \setminus \{0\}$ 和任意 $t > 0$, 有

$$\mathcal{J}(tu) = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla tu|^p + V(x)|tu|^p) dx - \frac{1}{2p_\alpha^*} \int_{\mathbb{R}^N} \left[(-\Delta^D)^{\frac{-\alpha}{2}} * |tu|^{p_\alpha^*} \right] |tu|^{p_\alpha^*}$$

$$= \frac{t^p}{p} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^p + V(x)|u|^p) dx - \frac{t^{2p_\alpha^*}}{2p_\alpha^*} \int_{\mathbb{R}^N} \left[(-\Delta^D)^{\frac{-\alpha}{2}} * |u|^{p_\alpha^*} \right] |u|^{p_\alpha^*} \\ \rightarrow -\infty (t \rightarrow +\infty).$$

综上, 能量泛函 $\mathcal{J}$ 满足山路几何结构。

在本问题中, 我们定义 Nehari 流形 $\mathcal{N}$ 为

$$\mathcal{N} := \{u \in \mathcal{E} \setminus \{0\} \mid \langle \mathcal{J}'(u), u \rangle = 0\}.$$

方程(1.1)的基态解是极小能量解, 即 $\mathcal{J}$ 约束在 Nehari 流形 $\mathcal{N}$ 中的极小值可被取到。

令

$$k_0 := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \mathcal{J}(\gamma(t)), k_1 := \inf_{u \in \mathcal{N}} \mathcal{J}(u), k_2 := \inf_{u \in \mathcal{E} \setminus \{0\}} \max_{t > 0} \mathcal{J}(tu),$$

其中

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], \mathcal{E}) \mid \gamma(0) = 0, \mathcal{J}(\gamma(1)) < 0\}.$$

证明 $\mathcal{N}$ 有如下性质:

引理 3.2 假设 $N \geq 3$, $\alpha \in (0, N)$, 对任意 $u \in \mathcal{E} \setminus \{0\}$, 存在唯一 $t_u > 0$ 使得 $t_u u \in \mathcal{N}$ 及 $\mathcal{J}(t_u u) = \max_{t > 0} \mathcal{J}(tu)$ 。

证明: 令 $w(t_u) = \max_{t > 0} w(t)$, 其中 $w(t) := \mathcal{J}(tu)$, $t > 0$ 。则有 $w(0) = 0$,

$$w(t) = \mathcal{J}(tu) = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla tu|^p + V(x)|tu|^p) dx - \frac{1}{2p_\alpha^*} \int_{\mathbb{R}^N} \left[(-\Delta^D)^{\frac{-\alpha}{2}} * |tu|^{p_\alpha^*} \right] |tu|^{p_\alpha^*} \\ = \frac{t^p}{p} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^p + V(x)|u|^p) dx - \frac{t^{2p_\alpha^*}}{2p_\alpha^*} \int_{\mathbb{R}^N} \left[(-\Delta^D)^{\frac{-\alpha}{2}} * |u|^{p_\alpha^*} \right] |u|^{p_\alpha^*}.$$

由 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[(-\Delta^D)^{\frac{-\alpha}{2}} * |u|^{p_\alpha^*} \right] |u|^{p_\alpha^*} \leq C_1 \|u\|_{L^{p_\alpha^*}}^{2p_\alpha^*} \leq C_2 \|u\|_{\mathcal{E}}^{2p_\alpha^*},$$

可得

$$w(t) \geq \frac{t^p}{p} \|u\|_{\mathcal{E}}^p - C_2 \frac{t^{2p_\alpha^*}}{2p_\alpha^*} \|u\|_{\mathcal{E}}^{2p_\alpha^*}.$$

从而, 存在 $t > 0$ 充分小时, $w(t) > 0$ 。另一方面, 由公式(2.1), 有 $\mathcal{J}(tu) \rightarrow -\infty (t \rightarrow +\infty)$ 。则 $w(t)$ 在 $t_u > 0$ 处取得极小值。综上, $w'(t_u) = \langle \mathcal{J}'(t_u u), u \rangle = 0$ 且 $t_u u \in \mathcal{N}$ 。

下面证明 t_u 的唯一性。若不然, 对任意 $u \in \mathcal{E} \setminus \{0\}$, 如果存在 $0 < t_u < \bar{t}_u$ 使得 $t_u u \in \mathcal{N}$, $\bar{t}_u u \in \mathcal{N}$ 。根据 Nehari 流形 $\mathcal{N}$ 的定义, 有

$$\langle \mathcal{J}'(t_u u), t_u u \rangle = \langle \mathcal{J}'(\bar{t}_u u), \bar{t}_u u \rangle = 0.$$

由方程(2.2)可知

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla(\bar{t}_u u)|^p + V(x)|\bar{t}_u u|^p) dx - \int_{\mathbb{R}^N} \left[(-\Delta^D)^{\frac{-\alpha}{2}} * |\bar{t}_u u|^{p_\alpha^*} \right] |\bar{t}_u u|^{p_\alpha^*} = 0, \\ \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla(t_u u)|^p + V(x)|t_u u|^p) dx - \int_{\mathbb{R}^N} \left[(-\Delta^D)^{\frac{-\alpha}{2}} * |t_u u|^{p_\alpha^*} \right] |t_u u|^{p_\alpha^*} = 0.$$

通过简单的计算可得

$$\begin{aligned}\bar{t}_u^{-p} \|u\|_{\mathcal{E}}^p &= \bar{t}_u^{-2p_\alpha^*} \int_{\mathbb{R}^N} \left[(-\Delta^D)^{\frac{-\alpha}{2}} * |u|^{p_\alpha^*} \right] |u|^{p_\alpha^*}, \\ t_u^{-p} \|u\|_{\mathcal{E}}^p &= t_u^{-2p_\alpha^*} \int_{\mathbb{R}^N} \left[(-\Delta^D)^{\frac{-\alpha}{2}} * |u|^{p_\alpha^*} \right] |u|^{p_\alpha^*}.\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\bar{t}_u^{-p-2p_\alpha^*} \|u\|_{\mathcal{E}}^p &= \int_{\mathbb{R}^N} \left[(-\Delta^D)^{\frac{-\alpha}{2}} * |u|^{p_\alpha^*} \right] |u|^{p_\alpha^*}, \\ t_u^{-p-2p_\alpha^*} \|u\|_{\mathcal{E}}^p &= \int_{\mathbb{R}^N} \left[(-\Delta^D)^{\frac{-\alpha}{2}} * |u|^{p_\alpha^*} \right] |u|^{p_\alpha^*}.\end{aligned}$$

最后得到

$$\left(\frac{1}{\bar{t}_u^{-2p_\alpha^*-p}} - \frac{1}{t_u^{-2p_\alpha^*-p}} \right) \|u\|_{\mathcal{E}}^p = 0,$$

这与 $u \in \mathcal{E} \setminus \{0\}$, $0 < t_u < \bar{t}_u$ 矛盾。

下面我们估计山路水平值 k_0 。

引理 3.3 设 $k_* = \frac{\alpha+p}{p(N+\alpha)} \mathcal{S}^{\frac{N+\alpha}{\alpha+p}}$, 则有 $k_0 = k_1 = k_2 \in (0, k_*)$ 。

证明: 我们将证明分为两步。

步骤 1: 由引理 3.2, 可得 $k_1 = k_2$ 。先证 $k_0 = k_1$ 。

令 $\gamma: [0, 1] \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, 定义 $\gamma(t) = tt_1 u$, 其中 $t_1 > 0$ 充分大, 使得 $\mathcal{J}(t_1 u) < 0$ 。显然 $\gamma \in \Gamma$ 。由 k_0 的定义得

$$k_0 \leq \max_{t \in [0,1]} \mathcal{J}(tt_1 u) \leq \max_{t > 0} \mathcal{J}(tu). \quad (3.1)$$

则 $k_0 \leq k_1$ 。

令 $l(t) = \langle \mathcal{J}'(\gamma(t)), \gamma(t) \rangle$, 其中 $\gamma \in \Gamma$ 。由 Γ 的定义得 $\mathcal{J}(\gamma(1)) < 0$ 。显然, 当 $t > 0$ 充分小时, $l(t) > 0$ 。设 $\mu = \min\{2p_\alpha^*, p^*\}$, 则有

$$\begin{aligned}& \mathcal{J}(\gamma(1)) - \frac{1}{\mu} \langle \mathcal{J}'(\gamma(1)), \gamma(1) \rangle \\ &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\mu} \right) \|\gamma(1)\|_{\mathcal{E}}^p + \left(\frac{1}{\mu} - \frac{N-p}{2p_\alpha^*} \right) \int_{\mathbb{R}^N} \left[(-\Delta^D)^{\frac{-\alpha}{2}} * |u|^{p_\alpha^*} \right] |u|^{p_\alpha^*} dx \\ &> 0\end{aligned}$$

因此

$$\langle \mathcal{J}'(\gamma(1)), \gamma(1) \rangle < \mu \mathcal{J}(\gamma(1)) < 0$$

从而可知存在 $t_2 \in (0, 1)$ 使得 $\langle \mathcal{J}'(\gamma(t_2)), \gamma(t_2) \rangle = 0$, 这意味着 $\gamma(t_2) \in \mathcal{N}$ 。因此, $k_1 \leq k_0$ 。

综上可知, $k_0 = k_1 = k_2$ 。

步骤 2: 这里我们证明 $k_0 = k_1 = k_2 \in (0, k_*)$ 。

由公式(2.6)易证得 $\mathcal{S} > 0$ 。结合 Lieb 和 Loss 在文献[25]中所述, 给定 $A \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, 当

函数 $u_0 \in \mathcal{E}$ 且 $u_0 = A \left(\frac{\varepsilon^{\frac{1}{p-1}}}{\varepsilon^{\frac{p}{p-1}} + |x|^{\frac{p}{p-1}}} \right)^{\frac{N-p}{p}}$ 时, 最佳 Hardy-Littlewood-Sobolev 常数 $\mathcal{S}$ 可达。

假设截断函数 $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, [0, 1])$ 满足

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & x \in B_\rho, \\ 0, & x \in B_\rho^c. \end{cases}$$

其中 $\rho > 0$ 为常数。

记 $\eta_n(x) = \eta\left(\frac{x}{n}\right)$, 因此在 $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 中 $\eta_n u_0 \rightarrow u_0$, $n \rightarrow \infty$, 并且存在 $t_0 > 0$ 充分大, 使得

$\mathcal{J}(t_0 \eta_n u_0) < 0$ 。下面令 $\gamma(t) = t t_0 \eta_n u_0$, 则有

$$\begin{aligned} k_0 &\leq \max_{t \in [0, 1]} \mathcal{J}(\gamma(t)) \\ &= \max_{t \in [0, 1]} \left[\frac{(t t_0)^p}{p} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla(\eta_n u_0)|^p + V(x) |\eta_n u_0|^p) dx - \frac{(t t_0)^{2p_\alpha^*}}{2p_\alpha^*} \int_{\mathbb{R}^N} \left((-\Delta^D)^{\frac{-\alpha}{2}} * |\eta_n u_0|^{p_\alpha^*} \right) |\eta_n u_0|^{p_\alpha^*} dx \right] \\ &\leq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2p_\alpha^*} \right) \frac{\left[\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla(\eta_n u_0)|^p + V(x) |\eta_n u_0|^p) dx \right]^{\frac{2p_\alpha^*}{2p_\alpha^* - p}}}{\left[\int_{\mathbb{R}^N} \left((-\Delta^D)^{\frac{-\alpha}{2}} * |\eta_n u_0|^{p_\alpha^*} \right) |\eta_n u_0|^{p_\alpha^*} dx \right]^{\frac{p}{2p_\alpha^* - p}}}. \end{aligned}$$

特别地, 由

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(\eta_n u_0)|^p dx &\rightarrow \mathcal{S}, n \rightarrow \infty, \\ \int_{\mathbb{R}^N} \left((-\Delta^D)^{\frac{-\alpha}{2}} * |\eta_n u_0|^{p_\alpha^*} \right) |\eta_n u_0|^{p_\alpha^*} dx &\rightarrow 1, n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

可知

$$k_0 < \frac{\alpha + p}{p(N + \alpha)} \mathcal{S}^{\frac{N + \alpha}{\alpha + p}}.$$

综上, $k_0 = k_1 = k_2 \in (0, k_*)$ 。

引理 3.4 假设 $\{u_n\} \subset \mathcal{E}$ 是能量泛函 $\mathcal{J}$ 的 $(PS)_{k_0}$ 序列, 那么 $\{u_n\}$ 在 $\mathcal{E}$ 中有界。

证明: 由 $(PS)_{k_0}$ 序列的定义,

$$\begin{aligned} k_0 + o(1) &= \frac{1}{p} \|u_n\|_{\mathcal{E}}^p - \frac{1}{2p_\alpha^*} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\left((-\Delta^D)^{\frac{-\alpha}{2}} * |u_n|^{p_\alpha^*} \right) |u_n|^{p_\alpha^*} dx \right], \\ o(1) &= \|u_n\|_{\mathcal{E}}^p - \int_{\mathbb{R}^N} \left[\left((-\Delta^D)^{\frac{-\alpha}{2}} * |u_n|^{p_\alpha^*} \right) |u_n|^{p_\alpha^*} dx \right]. \end{aligned}$$

综上, $\{u_n\}$ 在 $\mathcal{E}$ 中有界。

由于 $\{u_n\}$ 在 $\mathcal{E}$ 中有界, 可能会出现下面两种情形:

情形(i): 消失, 即, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p dx = 0$ 。

情形(ii): 非消失, 即, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p dx > 0$ 。

下面我们证明能量泛函 $\mathcal{J}$ 的有界 $(PS)_{k_0}$ 序列 $\{u_n\}$ 是非消失的。

引理 3.5 假设 $\{u_n\} \subset \mathcal{E}$ 是关于泛函 $\mathcal{J}$ 的有界 $(PS)_{k_0}$ 序列, 其中 $k_0 \in (0, k_*)$, 则有 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p dx > 0$ 。

证明: 若不然, 假设 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p dx = 0$ 。利用 Lion's 集中紧性原理可得,

$$u_n \rightarrow 0 \quad L^t(\mathbb{R}^N), t \in [p, p^*].$$

由 $(PS)_{k_0}$ 序列的定义

$$\langle \mathcal{J}'(u_n), u_n \rangle = \|u_n\|_{\mathcal{E}}^p - \int_{\mathbb{R}^N} \left[(-\Delta^D)^{\frac{-\alpha}{2}} * |u_n|^{p_\alpha^*} \right] |u_n|^{p_\alpha^*} dx = o(1), \quad (3.2)$$

$$\mathcal{J}(u_n) = \frac{1}{p} \|u_n\|_{\mathcal{E}}^p - \frac{1}{2p_\alpha^*} \int_{\mathbb{R}^N} \left[(-\Delta^D)^{\frac{-\alpha}{2}} * |u_n|^{p_\alpha^*} \right] |u_n|^{p_\alpha^*} dx = k_0 + o(1). \quad (3.3)$$

令 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{\mathcal{E}} = \kappa$ 。显然, $\kappa \in [0, +\infty)$ 。由(2.6)与(3.2)得 $\kappa^p \leq \kappa^{2p_\alpha^*} S^{-p_\alpha^*}$, 求得 $\kappa = 0$ 或 $\kappa \geq S^{\frac{1}{2}(\frac{N+\alpha}{\alpha+p})}$ 。

我们容易证明当 $\kappa = 0$ 时, $k_0 = 0$ 。当 $\kappa \geq S^{\frac{1}{2}(\frac{N+\alpha}{\alpha+p})}$ 时, 结合(3.2)与(3.3), 易得

$$\begin{aligned} k_0 &\geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2p_\alpha^*} \right) \limsup_{n \rightarrow \infty} \|u\|_{\mathcal{E}}^p \\ &\geq \frac{\alpha+p}{p(N+\alpha)} \kappa^p \geq \frac{\alpha+p}{p(N+\alpha)} S^{\frac{p}{2}(\frac{N+\alpha}{N-p})} \geq k_*, \end{aligned}$$

均与已知条件 $k_0 \in (0, k_*)$ 矛盾。因此反设不成立, 引理 3.5 得证。

定理 1.1 由引理 3.1, 存在有界 $(PS)_{k_0}$ 序列 $\{u_n\} \subset \mathcal{E}$ 满足 $\mathcal{J}(u_n) \rightarrow k_0, \mathcal{J}'(u_n) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ 。在子列的意义下, 存在 $u \in \mathcal{E}$ 使得

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u, & \text{in } \mathcal{E}, \\ u_n \rightarrow u, & \text{in } L_{loc}^r(\mathbb{R}^N), r \in [p, p^*), \\ u_n(x) \rightarrow u(x) & \text{a.e. in } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

下面分为两种情形证明定理 1。

情形 1: $u \neq 0$ 。首先证明 $\mathcal{J}'(u) = 0$ 。

又 $u_n \rightarrow u$ in $L_{loc}^r(\mathbb{R}^N), r \in [p, p^*)$ 及 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式, 存在常数 $C_3 > 0$, 使得

$$0 \leq \left| |u_n|^{p_\alpha^*} - |u|^{p_\alpha^*} \right| \leq |u_n - u|^{p_\alpha^*} + C_3 |u_n| |u_n - u|^{p_\alpha^*-1} \rightarrow 0. \quad (3.4)$$

对任意 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, 有

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} \left[(-\Delta^D)^{\frac{-\alpha}{2}} * |u_n|^{p_\alpha^*} \right] |u_n|^{p_\alpha^*-2} u_n \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^N} \left[(-\Delta^D)^{\frac{-\alpha}{2}} * |u|^{p_\alpha^*} \right] |u|^{p_\alpha^*-2} u \varphi dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left[(-\Delta^D)^{\frac{-\alpha}{2}} * (|u_n|^{p_\alpha^*} - |u|^{p_\alpha^*}) \right] |u|^{p_\alpha^*-2} u \varphi dx \end{aligned}$$

$$+\int_{\mathbb{R}^N}\left((-\Delta^D)^{\frac{-\alpha}{2}}*|u_n|^{p_\alpha^*}\right)\left(|u_n|^{p_\alpha^*-2}u_n-|u|^{p_\alpha^*-2}u\right)\varphi dx\rightarrow 0. \quad (3.5)$$

结合式(3.2), (3.5)以及 $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ 在 $\mathcal{E}$ 中的稠密性, 可得 $\mathcal{J}'(u)=0$, 从而 $u\in\mathcal{N}$, $\mathcal{J}(u)\geq k_1=k_0$ 。再由 Palais-Smale 序列的定义及 Fatou 引理, 有

$$\begin{aligned} k_0 &= \lim_{n\rightarrow\infty}\left[\mathcal{J}(u_n)-\frac{1}{p}\langle\mathcal{J}'(u_n),u_n\rangle\right] \\ &= \lim_{n\rightarrow\infty}\left[\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2p_\alpha^*}\right)\int_{\mathbb{R}^N}\left((-\Delta^D)^{\frac{-\alpha}{2}}*|u_n|^{p_\alpha^*}\right)|u_n|^{p_\alpha^*}dx\right] \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N}\liminf_{n\rightarrow\infty}\left[\frac{\alpha+p}{p(N+\alpha)}\left((-\Delta^D)^{\frac{-\alpha}{2}}*|u_n|^{p_\alpha^*}\right)|u_n|^{p_\alpha^*}dx\right] \\ &= \frac{\alpha+p}{p(N+\alpha)}\int_{\mathbb{R}^N}\left((-\Delta^D)^{\frac{-\alpha}{2}}*|u|^{p_\alpha^*}\right)|u|^{p_\alpha^*}dx \\ &= \mathcal{J}(u)-\frac{1}{p}\langle\mathcal{J}'(u),u\rangle=\mathcal{J}(u). \end{aligned}$$

因此, $\mathcal{J}(u)=k_1=k_0=\inf_{\mathcal{N}}\mathcal{J}>0$ 。

综上, 情形 1 证明完毕。

情形 2: $u=0$ 。由情形 1 我们有

$$\begin{cases} u_n\rightarrow 0, & \text{in } \mathcal{E}, \\ u_n\rightarrow 0, & \text{in } L_{loc}^r(\mathbb{R}^N), r\in[p,p^*), \\ u_n(x)\rightarrow 0 & \text{a.e. in } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

令 $\zeta=\limsup_{n\rightarrow\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^pdx$ 。由引理 3.5, 可知 $\zeta>0$ 。不失一般性, 定义 $\tilde{u}_n(x)=u_n(x-y_n)$, $y_n\in\mathbb{R}^N$, 由 $\mathcal{J}$ 的平移不变性, $\{\tilde{u}_n\}$ 也是有界 $(PS)_{k_0}$ 序列。取它的一个子列, 仍记作 $\{\tilde{u}_n\}$, 有

$$\begin{cases} \tilde{u}_n\rightarrow \tilde{u}, & \text{in } \mathcal{E}, \\ \tilde{u}_n\rightarrow \tilde{u}, & \text{in } L_{loc}^r(\mathbb{R}^N), r\in[p,p^*), \\ \tilde{u}_n(x)\rightarrow \tilde{u}(x) & \text{a.e. in } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

由 $\zeta>0$ 得 $\tilde{u}\neq 0$ 。接下来的证明类似情形 1。因此我们证得 $\tilde{u}\in\mathcal{N}$ 是方程(1.1)的一个基态解。

注 3.1 为了证明方程(1.1)解的 Hölder 连续性及解的更高阶正则性, 我们通常需要应用一些定理或能量估计的技巧, 包括 Sobolev 嵌入定理、Gagliardo-Nirenberg 不等式以及可能的局部化估计。本文主要讨论基态解的存在性, 解的 Hölder 连续性及更高阶正则性暂时不做讨论, 对于感兴趣的读者, 可以尝试自行证明。

基金项目

本文受到国家自然科学基金项目号 12471194 的资助。

参考文献

- [1] Pekar, S.I. (2022) Untersuchungen über die Elektronentheorie der Kristalle. De Gruyter.
- [2] Lieb, E.H. (1977) Existence and Uniqueness of the Minimizing Solution of Choquard's Nonlinear Equation. *Studies in*

- Applied Mathematics*, **57**, 93-105. <https://doi.org/10.1002/sapm197757293>
- [3] Penrose, R. (1996) On Gravity's Role in Quantum State Reduction. *General Relativity and Gravitation*, **28**, 581-600. <https://doi.org/10.1007/bf02105068>
 - [4] Moroz, I.M., Penrose, R. and Tod, P. (1998) Spherically-Symmetric Solutions of the Schrödinger-Newton Equations. *Classical and Quantum Gravity*, **15**, 2733-2742. <https://doi.org/10.1088/0264-9381/15/9/019>
 - [5] Moroz, V. and Van Schaftingen, J. (2016) A Guide to the Choquard Equation. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, **19**, 773-813. <https://doi.org/10.1007/s11784-016-0373-1>
 - [6] Moroz, V. and Van Schaftingen, J. (2013) Groundstates of Nonlinear Choquard Equations: Existence, Qualitative Properties and Decay Asymptotics. *Journal of Functional Analysis*, **265**, 153-184. <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2013.04.007>
 - [7] Moroz, V. and Van Schaftingen, J. (2015) Groundstates of Nonlinear Choquard Equations: Hardy-Littlewood-Sobolev Critical Exponent. *Communications in Contemporary Mathematics*, **17**, Article 1550005. <https://doi.org/10.1142/s0219199715500054>
 - [8] Wu, Q., Qin, D. and Chen, J. (2020) Ground States and Non-Existence Results for Choquard Type Equations with Lower Critical Exponent and Indefinite Potentials. *Nonlinear Analysis*, **197**, Article 111863. <https://doi.org/10.1016/j.na.2020.111863>
 - [9] Li, Y., Li, G. and Tang, C. (2020) Ground State Solutions for Choquard Equations with Hardy-Littlewood-Sobolev Upper Critical Growth and Potential Vanishing at Infinity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **484**, Article 123733. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.123733>
 - [10] Ri, M. and Li, Y. (2024) Ground State Solution for Fractional p -Choquard Equations with Upper Critical Exponent. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **534**, Article 128073. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2023.128073>
 - [11] Li, Q., Teng, K. and Zhang, J. (2020) Ground State Solutions for Fractional Choquard Equations Involving Upper Critical Exponent. *Nonlinear Analysis*, **197**, Article 111846. <https://doi.org/10.1016/j.na.2020.111846>
 - [12] Cassani, D. and Zhang, J. (2018) Choquard-Type Equations with Hardy-Littlewood-Sobolev Upper-Critical Growth. *Advances in Nonlinear Analysis*, **8**, 1184-1212. <https://doi.org/10.1515/anona-2018-0019>
 - [13] Abdullah Qadha, S., Chen, H. and Qadha, M.A. (2023) Existence of Ground State Solutions for Choquard Equation with the Upper Critical Exponent. *Fractal and Fractional*, **7**, Article 840. <https://doi.org/10.3390/fractalfract7120840>
 - [14] Long, L., Li, F. and Zhu, X. (2023) Normalized Solutions to Nonlinear Scalar Field Equations with Doubly Nonlocal Terms and Critical Exponent. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **524**, Article 127142. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2023.127142>
 - [15] Van Schaftingen, J. and Xia, J. (2018) Groundstates for a Local Nonlinear Perturbation of the Choquard Equations with Lower Critical Exponent. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **464**, 1184-1202. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.04.047>
 - [16] Tang, X., Wei, J. and Chen, S. (2020) Nehari-Type Ground State Solutions for a Choquard Equation with Lower Critical Exponent and Local Nonlinear Perturbation. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **43**, 6627-6638. <https://doi.org/10.1002/mma.6404>
 - [17] Seok, J. (2017) Nonlinear Choquard Equations Involving a Critical Local Term. *Applied Mathematics Letters*, **63**, 77-87. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2016.07.027>
 - [18] Liu, S. and Chen, H. (2023) Existence of Ground-State Solutions for p -Choquard Equations with Singular Potential and Doubly Critical Exponents. *Mathematische Nachrichten*, **296**, 2467-2502. <https://doi.org/10.1002/mana.202100255>
 - [19] Liu, S. and Chen, H. (2022) Ground State Solutions for Nonlinear Choquard Equation with Singular Potential and Critical Exponents. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **507**, Article 125799. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2021.125799>
 - [20] Li, Y., Li, G. and Tang, C. (2023) Multiplicity and Concentration of Positive Solutions for Critical Choquard Equations with Concave Perturbation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **524**, Article 127112. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2023.127112>
 - [21] Li, Y., Li, G. and Tang, C. (2020) Existence and Concentration of Solutions for Choquard Equations with Steep Potential Well and Doubly Critical Exponents. *Advanced Nonlinear Studies*, **21**, 135-154. <https://doi.org/10.1515/ans-2020-2110>
 - [22] Brezis, H. and Nirenberg, L. (1983) Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponents. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **36**, 437-477. <https://doi.org/10.1002/cpa.3160360405>
 - [23] Liu, Y. and Zhang, M. (2024) The Ground State Solutions to a Class of Biharmonic Choquard Equations on Weighted Lattice Graphs. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, **50**, Article No. 12. <https://doi.org/10.1007/s41980-023-00846-9>
 - [24] Lischke, A., Pang, G., Gulian, M., Song, F., Glusa, C., Zheng, X., *et al.* (2020) What Is the Fractional Laplacian? A

Comparative Review with New Results. *Journal of Computational Physics*, **404**, Article 109009.
<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2019.109009>

- [25] Lieb, E.H. and Loss, M. (2001) *Analysis*. American Mathematical Society.