Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(4), 127-137
Published Online April 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.154116

Hans汉斯

短区间上的Erdös-Kac定理

刘新颖

青岛大学数学与统计学院，山东 青岛

收稿日期：2025年2月20日；录用日期：2025年3月20日；发布日期：2025年4月16日

摘　要

设 $\varphi(n)$ 是Euler函数，本文给出了短区间上算术序列的Erdös-Kac型定理，其中该算术序列与 $\varphi(n)$ 分布有关。

关键词

Euler函数，Erdös-Kac定理，短区间

Weighted Erdös-Kac Theorem in Short Intervals

Xinying Liu

School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao Shandong

Received: Feb. 20th, 2025; accepted: Mar. 20th, 2025; published: Apr. 16th, 2025

Abstract

Assuming $\varphi(n)$ is an Euler function, this article provides the Erdös-Kac type theorem for arithmetic sequences on short intervals, where the arithmetic sequence is related to the Euler function's distribution.

Keywords

Euler Function, Erdös-Kac Theorem, Short Intervals

文章引用: 刘新颖. 短区间上的 Erdös-Kac 定理[J]. 理论数学, 2025, 15(4): 127-137.
DOI: 10.12677/pm.2025.154116

1. 引言

Erdös-Kac 定理在概率数论中有非常重要的地位。它为数论和概率论之间架起了桥梁，展示了整数的素因子数量具有统计性质，且趋近于泊松分布。这个定理不仅为数学理论提供了新的视角，还对现代计算数学和密码学等领域产生了深远的影响。该定理证明了对于任给的非负整数 n，它的不同素因子的个数在 $\{n\in\mathbb{N}:n\le x\}$ 上的分布近似于期望为 $\log_2 x:=\log\log x$，方差为 $(\log_2 x)^{1/2}$ 的高斯分布，即对于任给的 $\lambda\in\mathbb{R}$，

$$\frac{1}{x}\sum_{\substack{n\le x\\ \omega(n)-\log_2 x\le\lambda(\log_2 x)^{1/2}}}1\to\Phi(\lambda),\quad x\to\infty\left(\Phi(\lambda):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\lambda}\mathrm{e}^{-\tau^2/2}\mathrm{d}\tau\right),$$

其中 $\omega(n)$ 是 n 的不同素因子的个数，$\Phi(\lambda)$ 是正态分布函数。

随之，数学家们研究了加权 Erdös-Kac 定理。Elliott 在文章[1]中给出了一个以 $d(n)^{\alpha}$ 为权的 Erdös-Kac 型定理，其中 $d(n)$ 是除数函数。刘奎和吴杰[2]将 Elliott 的结果推广到短区间的情况，即

$$\frac{1}{D_\alpha(x,y)}\sum_{\substack{x<n\le x+y\\ \omega(n)-\log_2 x\le\lambda(\log_2 x)^{1/2}}}d(n)^{\alpha}\to\Phi(\lambda),\quad D_\alpha(x,y):=\sum_{x<n\le x+y}d(n)^{\alpha}$$

对于 $x\to\infty$ 和 $x^{7/12+\varepsilon}\le y\le x$ 是一致的，其中隐藏的常数仅取决于 α 和.ε。刘晓莉和杨志善[3]建立了一个在短区间上以 $a_K^l(n^2)(l\in\mathbb{Z}^+)$ 加权的 Erdös-Kac 型，其中 K 是高斯域，$a_K(n)$ 是 $\mathbb{Z}[i]$ 中范数为 n 的非零整理想的个数。王丹[4]又给出了短区间某些算术序列上以 $d(n)^{\alpha}$ 加权的 Erdös-Kac 型定理。

Selberg-Delange 方法是研究 Erdös-Kac 定理的重要工具之一。在 1954 年到 1971 年之间，Selberg [5]和 Delange [6]利用与算术函数相关的 Dirichlet 级数的解析性质发展了一种相当普遍的方法，这种方法现在被称为 Selberg-Delange 方法。

设 $f(n)$ 是一个算术函数，用下式表示对应的 Dirichlet 级数：

$$F(s):=\sum_{n\ge1}f(n)n^{-s},\quad \Re s>1。$$

对于 $\Re s>1$，假设 $F(s)$ 有如下分解形式

$$F(s)=G(s;z)\zeta(s)^{z},$$

其中 $\zeta(s)$ 是 Riemann $\zeta(s)$-函数，$G(s;z)$ 是亚纯函数，$z\in\mathbb{C}$。在上述假设下，Selberg 和 Delange 利用解析方法给出了算术函数 $f(n)$ 均值估计

$$S_f(x):=\sum_{n\le x}f(n)3$$

的一个渐近公式。Tenenbaum 在文章[7]中对这一理论有较为详细的阐述。

近年来，Selberg-Delange 方法被多位数学家进行了适当的改进，在不同的方向和背景下有许多应用。本文主要利用 Labihi 和 Raoujand [8]的推广 Selberg-Delange 方法，建立了短区间上新的 Erdös-Kac 型定理。

欧拉函数 $\varphi(n)$ 是数论中的一个基本函数，它表示小于或等于 n 的正整数中与 n 互质的数的个数，即那些与 n 的最大公约数为 1 的整数个数，即对于正整数 n，我们有

$$\varphi(n)=\left|\{1\le k\le n:\gcd(k,n)=1\}\right|$$

其中 $\gcd(k,n)$ 表示 k 和 n 的最大公约数。当 n 很大时，欧拉函数 $\varphi(n)$ 可以通过以下近似来得到：

$$\varphi(n)\approx n\prod_{p\mid n}\left(1-\frac{1}{p}\right)$$

其中 $p\mid n$ 表示所有 n 的素因子。根据这个公式可以看出，欧拉函数的值大致与 n 的素因子分布有关，特别是素因子越多，欧拉函数的值相对越小。

定义

$$U(x,y):=\sum_{x<\varphi(n)\le x+y}1,$$

其中 $\varphi(n)$ 是 Euler 函数。本文的主要结果如下：

定理 1.1. 设 $\varepsilon>0$，则对任意实数 λ，有

$$\frac{1}{U(x,y)}\sum_{\substack{x<\varphi(n)\le x+y\\ \omega(n)-\log_2 x\le\lambda(\log_2 x)^{1/2}}}1=\Phi(\lambda)+O\left(\frac{1}{\sqrt{\log_2 x}}\right)$$

对 $x\to\infty$，$x^{19/24+\varepsilon}\le y\le x$ 一致成立。特别地，误差项是最优的。

为了证明误差项的最优性，我们需要建立一个在短区间上的 Landau 素数定理。对于 $k\in\mathbb{Z}^+$，定义

$$U_k(x,y):=\sum_{\substack{x<\varphi(n)\le x+y\\ \omega(n)=k}}1,$$

对上述和式我们有以下的结果：

定理 1.2. 设 $\varepsilon>0$，有

$$U_k(x,y)=\frac{y}{\log x}\frac{(\log_2 x)^{k-1}}{(k-1)!}\times Y\left(l_1(1),l_2(1),\frac{k-1}{\log_2 x}\right)+O\left(\frac{(\log_2 x)^2}{k\log x}+\frac{k-1}{(\log_2 x)^2}\right)$$

对 $x\ge 3$，$x^{19/24+\varepsilon}\le y\le x$，$1\le k\le\log_2 x$ 一致成立，其中

$$Y(l_1(1),l_2(1),z)=\frac{1}{\tau(z+1)}\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)^z\left(1+\frac{z}{p(1-p^{-1})^2}\right),$$

且隐藏常数与 $\varepsilon>0$ 有关。

2. 一些引理

设函数 $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{C}$ 是一个算术函数，$g:\mathbb{N}^*\to(0,\infty)$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}g(n)=\infty,\quad \limsup\frac{\log n}{\log g(n)}=\kappa\in\mathbb{R}。$$

以下均设 $s=\sigma+it$。Dirichlet 级数

$$F(s)=\sum_1^\infty f(n)g(n)^{-s}$$

在 $\sigma\ge\sigma_c$ 处收敛，在 $\sigma\ge\sigma_a$ 处绝对收敛，其中 $\sigma_a\le\sigma_c+\kappa$。下面给出两个定义：

定义 1 ([8]) 如果以下条件成立，我们说横坐标有限的收敛 Dirichlet 级数

$$F(s)=\sum_1^{\infty} f(n)g(n)^{-s}$$

具有性质 $\mathrm{P}(A,M,M_1,M_2,\delta,l_1,l_2)$：

(1) $g(n)$ 是实值乘法函数，使得 $g:\mathbb{N}\to[1,\infty)$，$g(n)$ 随着 $n\to\infty$ 趋于无穷大，且存在 $\kappa\ge 0$ 的常数，使得

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\log n}{\log g(n)}=\kappa\text{；}$$

(2) 在 $\sigma>1$ 时，可以将 $F(s)$ 分解为

$$F(s)=G(s,l_1(s),l_2(s))\zeta(s)^{l_1(s)}\zeta(2s)^{l_2(s)}\text{；}$$

(3) 函数 $G(s,l_1(s),l_2(s))$ 在 $\sigma>1/2$ 的区域内有解析延拓，满足

$$\left|G(s,l_1(s),l_2(s))\right|\le M(3+|t|)^{\max\{\delta(1-\sigma),0\}}\log^A(3+|t|)\text{；}$$

(4) 函数 $l_1(s)$，$l_2(s)$ 在 $\sigma>1/2$ 的区域内是解析的，并且在 $\sigma\in[1/2,2+\varepsilon]$ 满足

$$|l_1(s)|\le M_1\text{，}\quad |l_2(s)|\le M_2\text{。}$$

定义 2 ([8]) 设 Dirichlet 级数

$$F(s)=\sum_1^{\infty} f(n)g(n)^{-s}$$

具有性质 $\mathrm{P}(A,M,M_1,M_2,\delta,l_1,l_2)$。如果存在正实数序列 $\left(\widetilde{f^+}(n)\right)_{n\ge1}$，使得对所有 $n\ge1$，有 $|f(n)|\le\widetilde{f^+}(n)$ 其中 Dirichlet 级数

$$\widetilde{F^+}(s):=\sum_1^{\infty}\widetilde{f^+}(n)g(n)^{-s}$$

是 $\mathrm{P}(A,M,M_1,M_2,\delta,\tilde{l}_1,\tilde{l}_2)$ 型，那么我们称 $F(s)$ 是 $\mathrm{T}(A,M,M_1,M_2,\delta,l_1,l_2,\tilde{l}_1,\tilde{l}_2)$ 型。

首先，我们给出 Labihi 和 Raoujand 关于短区间 Selberg-Delange 方法的一般结果，该结果在定理 1.1 的证明中起着关键作用。

引理 1 ([4]) 设 Dirichlet 级数

$$F(s)=\sum_1^{\infty} f(n)g(n)^{-s}$$

为 $\mathrm{T}(A,M,M_1,M_2,\delta,l_1,l_2,\tilde{l}_1,\tilde{l}_2)$ 型。对于任意的 $\varepsilon>0$，我们有

$$\sum_{\substack{n\ge1\\ x<g(n)\le x+y}} f(n)=y(\log x)^{l_1(1)-1}\left\{\lambda(l_1(1),l_2(1))+O\left(\frac{\log_2 x}{\log x}\right)\right\}\text{。}$$

该结论对于 $x\ge2$，$x^{\theta+\varepsilon}\le y\le x$，$\theta:=1-\dfrac{1}{(24/5)+2\delta}$，$|l_1(s)|\le M_1$，$|l_2(s)|\le M_2$ 成立，其中，

$$\lambda(l_1(1),l_2(1)):=\frac{G(1,l_1(1),l_2(1))\zeta(2)^{l_2(1)}}{\Gamma(l_1(1))}\text{；}\quad G(s,l_1(s),l_2(s)):=F(s)\zeta(s)^{-l_1(s)}\zeta(2s)^{-l_2(s)}\text{。}$$

O 项中的隐含常数仅取决于 $A,M_1,M_2,\delta,\varepsilon$。

对于定理 1.1 的证明，我们使用加性函数理论中的高斯误差律和 Berry-Esseen 不等式。

引理 2 ([9]) 设 $f(n)$ 是一个加法函数，满足 $f(m_1m_2)=f(m_1)+f(m_2)$，其中 $(m_1,m_2)=1$，假设

$$F(n)=\sum_{p<n}\frac{f(p)^2}{p}$$

收敛，那么

$$f(m)<\sum_{p<m}\frac{f(p)}{p}+\omega\sqrt{2F(m)}$$

的密率对于任给的实数 ω，都等于

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\omega}\exp\left(-y^2\right)\mathrm{d}y$$

假设 $F(x)$ 是一个满足 $F(-\infty)=0$ 和 $F(\infty)=1$ 的分布函数，我们将 $F(x)$ 的特征函数定义为

$$f(\tau):=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{i\tau x}\mathrm{d}F(x)\text{。}$$

引理 3 ([7]) 设 F，G 是分布函数，分别具有特征函数 f 和 g。设 G 是可微的，G' 在 $\mathbb{R}$ 上有界。那么对于所有的 $T>0$，

$$\|F-G\|_\infty\le 16\frac{\|G'\|_\infty}{T}+6\int_{-T}^{T}\left|\frac{f(\tau)-g(\tau)}{\tau}\right|\mathrm{d}\tau\text{，}$$

其中对于任何实值函数 $H(x)$，定义 $\|H\|_\infty:=\sup_{\lambda\in\mathbb{R}}|H(\lambda)|$。

$\varphi(n)$ 显然满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(n)=\infty$，$\limsup\dfrac{\log n}{\log\varphi(n)}=1$，为了证明定理 1.2，我们取 $g(n)=\varphi(n)$，故可以给出关于 $z^{\omega(n)}$ 的如下渐近公式。

引理 4 设 $B>0$，$|z|\le B$，$\varepsilon>0$，那么

$$\sum_{\substack{n\ge 1\\ x<\varphi(n)\le x+y}} z^{\omega(n)}=y(\log x)^{z-1}\left\{zY\left(l_1(1),l_2(1),z\right)+O\left(\frac{\log_2 x}{\log x}\right)\right\}$$

对 $x\ge 2$，$x^{19/24+\varepsilon}\le y\le x$ 一致成立，其中，

特别地，

$$U(x,y)=y\left\{Y\left(l_1(1),l_2(1),1\right)+O\left(\frac{\log_2 x}{\log x}\right)\right\}$$

对 $x\ge 2$，$x^{19/24+\varepsilon}\le y\le x$ 一致成立，其中

$$Y\left(l_1(1),l_2(1),1\right)=\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{p\left(1-p^{-1}\right)^2}\right)$$

证明 因为函数 $n\mapsto z^{\omega(n)}$ 是可乘的，对于 $\Re s>1$，我们可以得到如下式子：

$$F_z(s):=\sum_{n\ge 1}\frac{z^{\omega(n)}}{\varphi(n)^s}=\zeta(s)^{l_1(s)}\zeta(2s)^{l_2(s)}G\left(s,l_1(s),l_2(s)\right)\text{，}$$

其中，$l_1(s)=z$，$l_2(s)=\left(z-z^2\right)/2$，$|z|\le B$，

$$G\left(s,l_1(s),l_2(s)\right):=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^z\left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right)^{\left(z-z^2\right)/2}\left(1+\frac{z}{p^s\left(1-p^{-s}\right)\left(1-p^{-1}\right)^s}\right)$$

函数 $G\left(s,l_1(s),l_2(s)\right)$ 在 $\{s:\Re s>1/3\}$ 上是解析的，并且对于所有 $\varepsilon>0$， $G\left(s,l_1(s),l_2(s)\right)\ll_\varepsilon 1$ 在

$$\{s:\Re s>1/3+\varepsilon\}\supset\{s:\Re s>1/2\}$$

上是解析的，所以对于 $1/2\le\sigma\le 2+\varepsilon$， $F_z(s)$ 是一类 Dirichlet 级数，满足

$$\mathrm{T}\left(0,M(B),B,1/8,0,z,\left(z-z^2\right)/2,\tilde{l}_1,\tilde{l}_2\right)。$$

利用引理 1，我们得到了 $z^{\omega(n)}$ 的均值渐近公式。

3. 定理 1.2 的证明

定义

$$U_k(x,y):=\sum_{\substack{\omega(n)=k\\ x<\varphi(n)\le x+y}}1。$$

我们可以得到

$$\sum_{x<\varphi(n)\le x+y}z^{\omega(n)}=\sum_{x<\varphi(n)\le x+y}\sum_{\omega(n)=k}z^k=\sum_k\sum_{x<\varphi(n)\le x+y}z^k=\sum_k U_k(x,y)z^k。$$

通过柯西积分公式，

$$U_k(x,y)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\left(\sum_{x<\varphi(n)\le x+y}z^{\omega(n)}\right)\frac{\mathrm{d}z}{z^{k+1}}，\quad(1)$$

其中， $r=\dfrac{k}{\log_2 x}$。通过引理 4，

$$\sum_{\substack{n\ge1\\ x<\varphi(n)\le x+y}}z^{\omega(n)}=y(\log x)^{z-1}\left\{zY\left(l_1(1),l_2(1),z\right)+O\left(\frac{\log_2 x}{\log x}\right)\right\},$$

代入(1)，我们可以得到

$$\begin{aligned}U_k(x,y)&=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\left(\sum_{x<\varphi(n)\le x+y}z^{\omega(n)}\right)\frac{\mathrm{d}z}{z^{k+1}}\\&=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}zy(\log x)^{z-1}Y\left(l_1(1),l_2(1),z\right)\cdot\frac{1}{z^{k+1}}\mathrm{d}z+\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}y(\log x)^{z-1}O\left(\frac{\log_2 x}{\log x}\right)\cdot\frac{1}{z^{k+1}}\mathrm{d}z\\&=\frac{y}{\log x}\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{(\log x)^zY\left(l_1(1),l_2(1),z\right)}{z^k}\mathrm{d}z+O\left(\frac{y\log_2 x}{(\log x)^2}\oint_{|z|=r}\frac{(\log x)^{\Re z}}{|z|^{k+1}}|\mathrm{d}z|\right)\\&=\frac{y}{\log x}I_k(x,r)+O\left(\frac{y\log_2 x}{(\log x)^2}\oint_{|z|=r}\frac{(\log x)^{\Re z}}{|z|^{k+1}}|\mathrm{d}z|\right),\end{aligned}$$

其中， $I_k(x,r)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\dfrac{(\log x)^zY\left(l_1(1),l_2(1),z\right)}{z^k}\mathrm{d}z$。

对于 $U_k(x,y)$ 的误差项，利用变量替换 $t=k(1-\cos\theta)$，我们有以下估计：

$$\oint_{|z|=r}\frac{(\log x)^{\Re z}}{|z|^{k+1}}|\mathrm{d}z|=\oint_{|z|=r}\frac{(\log x)^{r\cos\theta}}{r^{k+1}}\cdot r\mathrm{d}\theta=\oint_{|z|=r}\frac{(\log x)^{r\cos\theta}}{r^{k}}\mathrm{d}\theta$$
$$=\left(\frac{\log_2 x}{k}\right)^k\int_0^{2\pi}(\log x)^{\frac{k\cos\theta}{\log_2 x}}\mathrm{d}\theta=\left(\frac{\log_2 x}{k}\right)^k\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{k\cos\theta}\mathrm{d}\theta$$
$$\ll\left(\frac{\log_2 x}{k}\right)^k\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{k\cos\theta}\mathrm{d}\theta+1\right)$$
$$\ll\left(\frac{\log_2 x}{k}\right)^k\left(\frac{\mathrm{e}^k}{\sqrt{k}}\int_0^k\mathrm{e}^{-t}t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t+1\right)$$
$$\ll\frac{(\log_2 x)^k}{k!}.$$

接下来将分别计算 $I_k(x,r)$ 在 $k=1$ 和 $k\geq 2$ 的值。

当 $k=1$ 时，

$$I_1(x,r)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{\mathrm{e}^{z\log_2 x}Y(l_1(1),l_2(1),z)}{z}\mathrm{d}z=Y(l_1(1),l_2(1),0)=1\text{。}$$

所以，$U_1(x,y)=\frac{y}{\log x}\left\{1+O\left(\frac{(\log_2 x)^2}{\log x}\right)\right\}$。

对于 $k\geq 2$，通过柯西积分公式我们可以得到 $I_k(x,r)=I_k(x,r_0)$，$r_0=\frac{k-1}{\log_2 x}$。

将 $Y(l_1(1),l_2(1),z)$ 在 $z=r_0$ 处泰勒展开可以得到

$$Y(l_1(1),l_2(1),z)=Y(l_1(1),l_2(1),r_0)+Y'(l_1(1),l_2(1),r_0)(z-r_0)+\int_{r_0}^{z}Y''(l_1(1),l_2(1),u)(z-u)\mathrm{d}u$$
$$=Y(l_1(1),l_2(1),r_0)+Y'(l_1(1),l_2(1),r_0)(z-r_0)$$
$$+(z-r_0)^2\int_0^1(1-t)Y''(l_1(1),l_2(1),r_0+t(z-r_0))\mathrm{d}t.$$

那么，

$$I_k(x,r)=\frac{Y(l_1(1),l_2(1),r_0)}{2\pi i}\oint_{|z|=r_0}\frac{\mathrm{e}^{z\log_2 x}}{z^k}\mathrm{d}z+\frac{Y'(l_1(1),l_2(1),r_0)}{2\pi i}\oint_{|z|=r_0}\frac{\mathrm{e}^{z\log_2 x}(z-r_0)}{z^k}\mathrm{d}z$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r_0}\frac{(\log x)^2(z-r_0)^2\int_0^1(1-t)Y''(l_1(1),l_2(1),r_0+t(z-r_0))\mathrm{d}t}{z^k}\mathrm{d}z.$$

接下来我们依次估计这三部分。通过柯西积分公式，第一部分为

$$\frac{Y(l_1(1),l_2(1),r_0)}{2\pi i}\oint_{|z|=r_0}\frac{\mathrm{e}^{z\log_2 x}}{z^k}\mathrm{d}z=\frac{(\log_2 x)^{k-1}}{(k-1)!}Y(l_1(1),l_2(1),r_0)\text{。}$$

同样地，第二部分为

$$\frac{Y'(l_1(1),l_2(1),r_0)}{2\pi i}\oint_{|z|=r_0}\frac{\mathrm{e}^{z\log_2 x}(z-r_0)}{z^k}\mathrm{d}z=Y'(l_1(1),l_2(1),r_0)\left(\frac{(\log_2 x)^{k-2}}{(k-2)!}-r_0\frac{(\log_2 x)^{k-1}}{(k-1)!}\right)=0\text{。}$$

对于 $0<t\leq 1$，$|z|=r_0$，我们有

$$|r_0+t(z-r_0)|=|r_0(1-t)+tz|\leq r_0(1-t)+t|z|=r_0\text{。}$$

因为在 $|z|\le B$ 上 $Y\left(l_1(1),l_2(1),z\right)$ 是解析的，所以存在一个正常数 C_α，使得

$$\left|Y''\left(l_1(1),l_2(1),z\right)\right|\le C_\alpha 。$$

因此，那么第三部分利用变量替换 $t=(k-1)(1-\cos\theta)$，有

$$\begin{aligned}\oint_{|z|=r_0}\frac{(\log x)^{\Re z}\left|z-r_0\right|^2}{|z|^k}|\mathrm{d}z| &= \int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{\Re z\log_2 x}r_0^2\left|\mathrm{e}^{i\theta}-1\right|^2}{r_0^k}\cdot r_0\mathrm{d}\theta \\ &= r_0^{-(k-3)}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\log_2 x\cdot\frac{k-1}{\log_2 x}\cos\theta}\left|\mathrm{e}^{i\theta}-1\right|^2\mathrm{d}\theta \\ &= r_0^{-(k-3)}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{(k-1)\cos\theta}\left|\mathrm{e}^{i\theta}-1\right|^2\mathrm{d}\theta \\ &\ll r_0^{-(k-3)}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{(k-1)\cos\theta}(1-\cos\theta)\mathrm{d}\theta+\pi\right) \\ &\ll r_0^{-(k-3)}\mathrm{e}^{k-1}(k-1)^{-\frac{3}{2}}\left(\int_0^{k-1}\mathrm{e}^{-t}t^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t+\pi\right) \\ &\ll \frac{(\log_2 x)^{k-3}}{(k-2)!}.\end{aligned}$$

那么我们得到

$$U_k(x,y)=\frac{y(\log_2 x)^{k-1}}{(k-1)!\log x}\left(Y\left(l_1(1),l_2(1),\frac{k-1}{\log_2 x}\right)\right)+O\left(\frac{y(\log_2 x)^{k+1}}{k!(\log x)^2}+\frac{y(\log_2 x)^{k-3}}{(k-2)!\log x}\right)$$

4. 定理 1.1 的证明

定义

$$F_{x,y}(\lambda)=\frac{1}{U(x,y)}\sum_{\substack{x<\varphi(n)\le x+y\\ \omega(n)-\log_2 x\le\lambda(\log_2 x)^{1/2}}}1，$$

令 $\varphi_{x,y}(\tau)$ 为 $F_{x,y}(\lambda)$ 的特征函数，

$$\begin{aligned}\varphi_{x,y}(\tau)&:=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{i\tau\lambda}\mathrm{d}F_{x,y}(\lambda)=\frac{1}{U(x,y)}\sum_{x<\varphi(n)\le x+y}\exp\left\{i\tau\frac{\omega(n)-\log_2 x}{\sqrt{\log_2 x}}\right\} \\ &=\frac{\mathrm{e}^{-i\tau T}}{U(x,y)}\sum_{x<\varphi(n)\le x+y}\mathrm{e}^{i(\tau/T)\omega(n)},\end{aligned}$$

其中，$T=\sqrt{\log_2 x}$。通过 Berry-Esseen 不等式，

$$\left\|F_{x,y}-\phi\right\|_\infty\le\frac{16}{\sqrt{2\pi}T}+6\int_{-T}^{T}\left|\frac{\varphi_{x,y}(\tau)-\mathrm{e}^{-\frac{\tau^2}{2}}}{\tau}\right|\mathrm{d}\tau，$$

接下来我们需要去证明 $\int_{-T}^{T}\left|\frac{\varphi_{x,y}(\tau)-\mathrm{e}^{-\frac{\tau^2}{2}}}{\tau}\right|\mathrm{d}\tau\ll\frac{1}{T}$。将 $z=\mathrm{e}^{it}$ 引入引理 4 可得，

$$\sum_{\substack{n\ge1\\ x<\varphi(n)\le x+y}}\mathrm{e}^{it\omega(n)}=y(\log x)^{\mathrm{e}^{it}-1}\left\{\mathrm{e}^{it}Y\left(l_1(1),l_2(1),\mathrm{e}^{it}\right)+O\left(\frac{\log_2 x}{\log x}\right)\right\}。$$

将 $z=1$ 代入引理 4 可得，

$$U(x,y)=\sum_{\substack{n\geq 1\\ x<\varphi(n)\leq x+y}}1=y\left\{Y\left(l_1(1),l_2(1),1\right)+O\left(\frac{\log_2 x}{\log x}\right)\right\}。$$

所以，

$$\frac{1}{U(x,y)}\sum_{x<\varphi(n)\leq x+y}\mathrm{e}^{it\omega(n)}=(\log x)^{\mathrm{e}^{it}-1}\left\{A\left(\mathrm{e}^{it}\right)+O\left(\frac{\log_2 x}{\log x}\right)\right\},$$

其中，$A(z)=\dfrac{zY\left(l_1(1),l_2(1),z\right)}{Y\left(l_1(1),l_2(1),1\right)}$ 并且 $A(1)=1$。令 $t=\tau/T$，

$$\varphi_{x,y}(\tau)=(\log x)^{\mathrm{e}^{i\frac{\tau}{T}}-1}\mathrm{e}^{-i\tau T}\left\{A\left(\mathrm{e}^{i\frac{\tau}{T}}\right)+O\left(\frac{\log_2 x}{\log x}\right)\right\}。$$

当 $|t|\leq 1$ 时，$\cos t-1\leq -2\left(\dfrac{t}{\pi}\right)^2$，我们有

$$\left|(\log x)^{\mathrm{e}^{i\frac{\tau}{T}}-1}\cdot\mathrm{e}^{-i\tau T}\right|=\left|\mathrm{e}^{T^2\left(\mathrm{e}^{i\frac{\tau}{T}}-1\right)}\cdot\mathrm{e}^{-i\frac{\tau}{T}\cdot T^2}\right|=\mathrm{e}^{T^2\left(\cos\frac{\tau}{T}-1\right)}\leq\mathrm{e}^{-2\left(\frac{\tau}{\pi}\right)^2}。$$

因此，

$$\int_{\pm T^{\frac{1}{3}}}^{\pm T}\left|\frac{\varphi_{x,y}(\tau)-\mathrm{e}^{-\frac{\tau^2}{2}}}{\tau}\right|\mathrm{d}\tau\ll\int_{\pm T^{\frac{1}{3}}}^{\pm T}\mathrm{e}^{-2\left(\frac{\tau}{\pi}\right)^2}\mathrm{d}\tau\ll\frac{1}{T}。$$

当 $(\log x)^{-1}<|\tau|\leq T^{\frac{1}{3}}$ 时，由泰勒展开式，

$$A\left(\mathrm{e}^{i\frac{\tau}{T}}\right)=1+O\left(\frac{\tau}{T}\right),\quad \mathrm{e}^{i\frac{\tau}{T}}-1=i\frac{\tau}{T}-\frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{T}\right)^2+O\left(\left(\frac{\tau}{T}\right)^3\right),$$

那么，

$$(\log x)^{\mathrm{e}^{i\frac{\tau}{T}}-1}A\left(\mathrm{e}^{i\frac{\tau}{T}}\right)\mathrm{e}^{-i(\tau T)}=\mathrm{e}^{\left(\mathrm{e}^{\frac{i\tau}{T}}-1\right)T^2-i\tau T}A\left(\mathrm{e}^{\frac{i\tau}{T}}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{\tau^2}{2}+O\left(\frac{\tau^3}{T}\right)}\left\{1+O\left(\frac{|\tau|}{T}\right)\right\}=\mathrm{e}^{-\frac{\tau^2}{2}}\left\{1+O\left(\frac{|\tau|+|\tau|^3}{T}\right)\right\}。$$

所以，$\varphi_{x,y}(\tau)=\mathrm{e}^{-\frac{\tau^2}{2}}\left\{1+O\left(\dfrac{|\tau|+|\tau|^3}{T}\right)\right\}\left\{1+O\left(\dfrac{\log_2 x}{\log x}\right)\right\}$。那么，

$$\int_{\pm\frac{1}{\log x}}^{\pm T^{\frac{1}{3}}}\left|\frac{\varphi_{x,y}(\tau)-\mathrm{e}^{-\frac{\tau^2}{2}}}{\tau}\right|\mathrm{d}\tau\ll\int_{\frac{1}{\log x}}^{T^{\frac{1}{3}}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{\tau^2}{2}}\frac{1+\tau^2}{T}+\frac{\log_2 x}{\tau\log x}\right)\mathrm{d}\tau\ll\frac{1}{T}+\frac{(\log_2 x)^2}{\log x}\ll\frac{1}{T}$$

所以对于 $|\tau|\leq\dfrac{1}{\log x}$，有

$$\left|\tau\frac{\omega(n)-\log_2 x}{\sqrt{\log_2 x}}\right|\ll\frac{|\tau|\log x}{T},\quad \exp\left\{i\tau\frac{\omega(n)-\log_2 x}{\sqrt{\log_2 x}}\right\}=1+O\left(\frac{|\tau|\log x}{T}\right),$$

故有，$\varphi_{x,y}(\tau)=1+O\left(\frac{|\tau|\log x}{T}\right)$。又因为 $\mathrm{e}^{-\frac{\tau^2}{2}}=1+O(\tau^2)$，所以，

$$\int_{-\frac{1}{\log x}}^{\frac{1}{\log x}}\left|\frac{\varphi_{x,y}(\tau)-\mathrm{e}^{-\frac{\tau^2}{2}}}{\tau}\right|\mathrm{d}\tau \ll \int_{-\frac{1}{\log x}}^{\frac{1}{\log x}}\left(\frac{\log x}{T}+|\tau|\right)\mathrm{d}\tau \ll \frac{1}{T}。$$

5. 误差

下面我们将证明误差是合理的。令

$$R_\lambda(x,y):=\frac{1}{U(x,y)}\sum_{\substack{x<\varphi(m)\le x+y\\ \omega(n)-\log_2 x\le\lambda(\log_2 x)^{1/2}}}1-\phi(\lambda)，\quad R(x,y):=\sup_{\lambda\in\mathbb{R}}R_\lambda(x,y)，$$

其中 $k=[\log_2 x]$，$\theta=k-\log_2 x$。

$$\frac{U_k(x,y)}{U(x,y)}=F_{x,y}\left(\frac{\theta}{\sqrt{\log_2 x}}\right)-F_{x,y}\left(\frac{\theta-\frac{1}{2}}{\sqrt{\log_2 x}}\right)\le\phi\left(\frac{\theta}{\sqrt{\log_2 x}}\right)-\phi\left(\frac{\theta-\frac{1}{2}}{\sqrt{\log_2 x}}\right)+2R(x,y)$$

$$=\int_{\frac{\theta-\frac{1}{2}}{\sqrt{\log_2 x}}}^{\frac{\theta}{\sqrt{\log_2 x}}}\mathrm{e}^{-\frac{\tau^2}{2}}\mathrm{d}\tau+2R(x,y)\ll\frac{1}{2\sqrt{\pi\log_2 x}}+2R(x,y).$$

另一方面，

$$\frac{U_k(x,y)}{U(x,y)}\sim\frac{Y\left(l_1(1),l_2(1),\frac{k-1}{\log_2 x}\right)}{Y\left(l_1(1),l_2(1),1\right)}\cdot\frac{(\log_2 x)^{k-1}}{\log x\cdot(k-1)!}\sim\frac{1}{\sqrt{\pi\log_2 x}},$$

所以有，

$$R(x,y)\gg\frac{1+o(1)}{2\sqrt{\pi\log_2 x}}-\frac{1}{4\sqrt{\pi\log_2 x}}=\frac{1+o(1)}{4\sqrt{\pi\log_2 x}}。$$

参考文献

[1] Elliott, P.D.T.A. (2014) Central Limit Theorems for Classical Cusp Forms. *The Ramanujan Journal*, **36**, 81-98. https://doi.org/10.1007/s11139-013-9516-9

[2] Liu, K. and Wu, J. (2021) Weighted Erdős-Kac Theorem in Short Intervals. *The Ramanujan Journal*, **55**, 1-12. https://doi.org/10.1007/s11139-020-00343-1

[3] Liu, X.L. and Yang, Z.S. (2020) Weighted Erdős-Kac Type Theorems over Gaussian Field in Short Intervals. *Acta Mathematica Hungarica*, **162**, 465-482. https://doi.org/10.1007/s10474-020-01087-6

[4] Wang, D. (2024) Weighted Erdős-Kac Type Theorems in Short Intervals. *Acta Arithmetica*, **212**, 255-267. https://doi.org/10.4064/aa230129-22-8

[5] Sathe, L.G. (1945) On a Congruence Property of the Divisor Function. *American Journal of Mathematics*, **67**, 397. https://doi.org/10.2307/2371953

[6] Delange, H. (1959) Sur des formules dues à Atle Selberg. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, **2**, 101-111.

[7] Tenenbaum, G. (2015). Introduction to Analytic and Probabilistic Number Theory. *American Mathematical Society*, **163**. https://doi.org/10.1090/gsm/163

[8] Labihi, O. and Raouj, A. (2020) Estimation de certaines sommes courtes. *Journal of Number Theory*, **206**, 231-249.

https://doi.org/10.1016/j.jnt.2019.06.012

[9] Erdös, P. and Kac, M. (1939) On the Gaussian Law of Errors in the Theory of Additive Functions. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **25**, 206-207. https://doi.org/10.1073/pnas.25.4.206