**Pure Mathematics** 理论数学, 2025, 15(4), 138-150
Published Online April 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.154117

Hans汉斯

# 高斯域上一种加权形式的Erdős-Kac定理

**于宗祺**

青岛大学数学与统计学院，山东 青岛

收稿日期：2025年3月7日；录用日期：2025年4月1日；发布日期：2025年4月17日

## 摘 要

**Erdős-Kac定理是数论中的一个经典结果，它描述了在自然数范围内，整数的不同素因子个数的分布渐进服从正态分布。本文主要目的是将Erdős-Kac定理在高斯域中进行推广，令$K$是高斯域，$O_K$是其整数环。设$a\in O_K$，$\omega(a)$表示其不同的素因子个数，$\tau_k(a)$是高斯域上$k$重除数函数。我们用围道积分法，推导出$\omega(a)$的加权均值和$m$阶中心矩，并由此推导出高斯域上权重为$\tau_k(a)$的Erdős-Kac定理。这一结果不仅丰富了数论中的分布理论，也为进一步研究高斯域中的数论问题提供了新的工具和方法。**

## 关键词

除数函数，Erdős-Kac定理，高斯域，围道积分法

# A Weighted Form of the Erdős-Kac Theorem over Gaussian Fields

**Zongqi Yu**

School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao Shandong

Received: Mar. 7th, 2025; accepted: Apr. 1st, 2025; published: Apr. 17th, 2025

## Abstract

**The Erdős-Kac theorem is a classical result in number theory, which describes that the distribution of the number of distinct prime factors of integers asymptotically follows a normal distribution. The primary aim of this paper is to extend the Erdős-Kac theorem to Gaussian fields. Let $K$ be a Gaussian field and $O_K$ be its ring of integers. Let $a\in O_K$, and $\omega(a)$ denote the number of distinct prime factors of $a$. Let $\tau_k(a)$ be the -fold divisor function on the Gaussian field. Using the method of**

文章引用: 于宗祺. 高斯域上一种加权形式的 Erdős-Kac 定理[J]. 理论数学, 2025, 15(4): 138-150.
DOI: 10.12677/pm.2025.154117

**contour integration, we derive the weighted mean and the $k$-th central moment of $\omega(a)$, and from these, we deduce a weighted form of the Erdős-Kac theorem on Gaussian fields with weight $\tau_k(a)$. This result not only enriches the distribution theory in number theory but also provides new tools and methods for further research on number-theoretical problems in Gaussian fields.**

## Keywords

**Divisor Function, Erdős-Kac Theorem, Gaussian Field, Contour Integration Method**



## 1. 引言

令 $\omega(n)$ 表示整数 $n$ 的不同素因子个数。一个著名的结果是由 Hardy 和 Ramanujan [1]在 1917 证明的对几乎所有 $n\le x$，即 $\omega(n)$ 的正规阶是 $\log\log x$。接下来，在 1934，Turán [2]给出了更进一步的结果，他证明了

$$\frac{1}{x}\sum_{n\le x}\left(\omega(n)-\log\log x\right)^2=\{1+o(1)\}\log\log x.$$

在 1940，随着概率思想的发展，Erdős 和 Kac [3]证明了更深刻的结果。他们发现对于随机变量

$$\frac{\omega(n)-\log\log n}{\sqrt{\log\log n}}$$

其概率分布为正态分布，即对任意 $\lambda\in\mathbb{R}$，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{[x]}\#\left\{m:m\le x,\frac{\omega(m)-\log\log m}{\sqrt{\log\log m}}\le\gamma\right\}=G(\gamma):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\gamma}e^{\frac{-t^2}{2}}dt.$$

这就是著名的 Erdős-Kac 定理。Erdős-Kac 定理表明，对于大范围的整数，其素因子个数的分布趋近于正态分布。这一结果将概率论与数论紧密的联系起来。作为概率数论的开创性成果之一，其表明许多经典数论方法无法解决的问题，可以通过概率的方法进行研究，为后续的研究提供了新的工具。同时 Kac 指出该定理可以推广到加权形式。

在 2015 年，Elliott [4]给出了 Erdős-Kac 定理的一种加权形式。准确地说，定义 $d(n)$ 为经典除数函数，对于 $\alpha\in\mathbb{R}$，定义

$$D_\alpha(x):=\sum_{n\le x}d(n)^\alpha$$

那么，对于任意 $\lambda\in\mathbb{R}$，有

$$\frac{1}{D_\alpha(x)}\sum_{\substack{n\le x\\ \omega(n)-2^\alpha\log\log x\le\alpha\sqrt{2^\alpha\log\log x}}}d(n)^\alpha\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\lambda}e^{-t^2/2}dt.$$

在 Erdős-Kac 定理加权形式这一方面的研究还有很多，例如[5]-[7]。

上述结果都是在整数环上进行讨论，而高斯整数环有着和整数环相似的代数性质。高斯域作为代数

数论中研究的基本对象之一，将 Erdős-Kac 定理推广到高斯域，可以揭示复数域中整数环的因子分布规律，从而拓展数论研究的范围，并且为研究更高维数域中因子分布提供借鉴。因此我们自然地希望在高斯整数环上有着形似的定理。

令 $K$ 是高斯域，$O_K=\mathbb{Z}[i]$ 是其代数整数环。令 $a\in O_K$ 并且 $p$ 是 $O_K$ 中的素元。定义 $\omega(a)$ 表示 $a$ 的不同素因子个数并且令

$$\tau_k(a)=\sum_{a_1\cdots a_k=a}1$$

其中 $a_i\in O_K$，$k$ 是固定的整数。

在本文中，令 $x\in\mathbb{R}$ 和 $\Omega_x=\{a:|a|\le x\}$。我们用 $\mathcal{G}_x$ 表示 $\Omega_x$ 的所有子集构成的集合。对于每一个 $a\in\Omega_x$，令

$$v_x(a)=\frac{\tau_k(a)}{\sum_{|a|\le x}\tau_k(a)}.$$

对于每一个 $A\subset\Omega_x$，令

$$v_x(A)=\frac{\sum_{a\in A}\tau_k(a)}{\sum_{|a|\le x}\tau_k(a)}$$

显然 $(\Omega_x,\mathcal{G}_x,v_x)$ 是一个概率空间。而在这个概率空间里我们有如下。

**定理 1** 对于固定的整数 $k$ 和 $m$，我们有

$$\frac{\sum_{|a|\le x}(\omega(a)-k\log\log x)^m\tau_k(a)}{\sum_{|a|\le x}\tau_k(a)}
=\begin{cases}(m-1)!!(k\log\log x)^{m/2}+O\left((\log\log x)^{\frac{m-1}{2}}\right), & \text{如果}m\text{是偶数，}\\ O\left((\log\log x)^{\frac{m-1}{2}}\right), & \text{如果}m\text{是奇数。}\end{cases}$$

在上式两边同时除 $(k\log\log x)^{m/2}$，我们可以得到

$$\frac{\omega(a)-k\log\log x}{\sqrt{k\log\log x}}$$

的加权 $m$ 阶中心矩为 $(m-1)!!+o(1)$ 如果 $m$ 是偶数和 $o(1)$ 如果 $m$ 是奇数。由此我们可以得到高斯域上的一种加权形式的 Erdős-Kac 定理，结果如下。

**定理 2** 令 $k$ 是固定的整数，对于任意 $\alpha\in\mathbb{R}$，我们有

$$\left(\sum_{|a|\le x}\tau_k(a)\right)^{-1}\sum_{\substack{|a|\le x\\ \omega(a)-k\log\log x\le\alpha\sqrt{k\log\log x}}}\tau_k(a)\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\alpha}e^{-t^2/2}dt.$$

## 2. 初步准备

### 2.1. $k$ 重除数函数的均值

接下来这个引理在证明中起到了关键作用，我们将在第五章中使用围道积分法证明该引理。

**引理 3** 设 $k$ 是固定的整数，对任意 $a \in \mathbb{Z}[i]$，我们有

$$\sum_{\substack{|a|\leq x \\ b|a}} \tau_k(a) = \underset{s=1}{Res}\left(\frac{x^s}{s}\zeta_K(s)^k F(s,b)\right) + O\left(\tau_k(b)\left(\sqrt{2}+1\right)^{2k\omega(b)}\left(\frac{x}{|b|}\right)^{\frac{2k+3}{2k+6}+\varepsilon}\right) \tag{1}$$

其中 $\zeta_K(s)$ 是高斯域上的 Dedekind zeta 函数并且

$$F(s,b) = \prod_{p^{v_p}\|b}\left(1-\left(1-\frac{1}{(|p|)^s}\right)^k \sum_{m=0}^{v_p-1}\frac{\tau_k(p^m)}{(|p|^m)^s}\right). \tag{2}$$

由引理 3 可得。

**推论 4** 设 $k$ 是固定的整数，对任意 $a \in \mathbb{Z}[i]$，我们有

$$\sum_{|a|\leq x} \tau_k(a) = \underset{s=1}{Res}\left(\frac{x^s}{s}\zeta_K(s)^k\right) + O\left(x^{\frac{2k+3}{2k+6}+\varepsilon}\right).$$

首先我们考察(1)的主项。我们将 $x^s\zeta_K(s)^k F(s,b)/s$ 在 $s=1$ 处做洛朗展开，由于 $s=1$ 是 $\zeta_K(s)$ 的单极点，因此是 $\frac{x^s}{s}\zeta_K(s)^k$ 的 $k$ 阶极点。因此我们有

$$\underset{s=1}{Res}\left(\frac{x^s}{s}\zeta_K(s)^k F(s,b)\right) = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{s\to 1}\frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}}\left\{(s-1)^k\frac{x^s}{s}\zeta_K(s)^k F(s,b)\right\}$$

注意到 $\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_K(s) = \pi/4$。我们可以发现 $\underset{s=1}{Res}\left(\frac{x^s}{s}\zeta_K(s)^k F(s,b)\right)$ 的主项为

$$F(1,b)\frac{x(\log x)^{k-1}}{(k-1)!}(\pi/4)^k \tag{3}$$

并且剩余低阶项与

$$x(\log x)^{k-1-c}\frac{d^j}{ds^j}\{F(s,b)\}|_{s=1}, \tag{4}$$

成比例。其中 $j$ 和 $c$ 是整数并且 $1\leq c\leq k-1, 0\leq j\leq c$。

下面研究 $F(s,b)$ 和其高阶导数在 $s=1$ 处的性质。由乘性，对于 $b=p$，可以将(2)简化为

$$F(s,p) = 1-\left(1-\frac{1}{(|p|)^s}\right)^k.$$

当 $s=1$ 时，由二项式展开定理，我们有

$$F(1,p) = 1-\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\left(\frac{-1}{|p|}\right) = \frac{k}{|p|}+O\left(\frac{1}{|p|^2}\right), \tag{5}$$

并且对于 $j\geq 0$，

$$\frac{d^j}{ds^j}\{F(s,p)\}|_{s=1} \ll \frac{(\log|p|)^j}{|p|}, \tag{6}$$

另外，我们有[8]

$$\sum_{|p|\leqslant x}\frac{1}{|p|}=\log\log x+O(1), \tag{7}$$

和，对于 $j\geq 1$，我们有

$$\sum_{|p|\leqslant x}\frac{(\log|p|)^{j}}{|p|}\ll(\log x)^{j}. \tag{8}$$

## 2.2. $\omega(a)$的加权均值

接下来，我们求出 $\omega(a)$ 的加权均值，即证明下式

$$\frac{\sum_{|a|\leq x}\omega(a)\tau_k(a)}{\sum_{|a|\leq x}\tau_k(a)}=k\log\log x+O(1). \tag{9}$$

先将等式左边分子部分求和进行重排，我们可以得到

$$\sum_{|a|\leq x}\omega(a)\tau_k(a)=\sum_{|a|\leq x}\left(\sum_{p|a}1\right)\tau_k(a)=\sum_{|p|\leq x}\sum_{\substack{|a|\leq x\\ p|a}}\tau_k(a),$$

应用引理 3，(9)的左边可以写为

$$\left(\sum_{|a|\leq x}\tau_k(a)\right)^{-1}\sum_{|p|\leq x}\left(\underset{s=1}{Res}\left(\frac{x^s}{s}\zeta_K(s)^k F(s,p)\right)+O\left(\tau_k(p)\left(\sqrt{2}+1\right)^{2k\omega(\mathfrak{p})}\left(\frac{x}{|p|}\right)^{\frac{2k+3}{2k+6}+\varepsilon}\right)\right). \tag{10}$$

由(3)和推论 4，(10)的主项就是

$$\sum_{|p|\leq x}F(1,p)=\sum_{|p|\leq x}\frac{k}{|p|}+O(1)=k\log\log x+O(1).$$

现在我们证明(10)剩余项是 $O(1)$。首先我们来处理非留数产生的余项，因为 $k$ 是固定的，我们有 $\tau_k(p)=k=O(1)$，$\left(\sqrt{2}+1\right)^{2k\omega(\mathfrak{p})}=\left(\sqrt{2}+1\right)^{2k}=O(1)$，因此(10)中非留数产生余项的贡献为

$$\ll\frac{1}{x(\log x)^{k-1}}\sum_{|p|\leq x}\left(\frac{x}{|p|}\right)^{1-\frac{3}{2k+6}+\varepsilon}\ll 1$$

由(4)可知(10)中留数低阶项的贡献与

$$\frac{1}{x(\log x)^{k-1}}\sum_{|p|\leq x}x(\log x)^{k-1-c}\frac{d^j}{ds^j}\{F(s,p)\}|_{s=1}$$

成比例。其中 $\leq c\leq k-1, 0\leq j\leq c$。由(8)，我们有上式的估计

$$\ll\frac{1}{(\log x)^{c}}\sum_{|p|\leq x}\frac{(\log|p|)^{c}}{|p|}\ll 1.$$

这就完成了(9)的证明。

# 3. 定理 1 的证明

接下来，我们将通过以下引理给出定理 1 的证明，该引理的详细证明见第四章。

**引理 5** 定义

$$\mathcal{F}_p(a)=\begin{cases}-F(1,p) & ,p\nmid a;\\ 1-F(1,p) & ,p\mid a.\end{cases}$$

令 $m$ 和 $k$ 是固定的整数， $z=x^{1/(2mk+6m)}$ 。我们有

$$\frac{\sum_{|a|\le x}\left(\sum_{|p|\le z}\mathcal{F}_p(a)\right)^m\tau_k(a)}{\sum_{|a|\le x}\tau_k(a)}=\begin{cases}(m-1)!!(k\log\log z)^{m/2}+O\left((\log\log z)^{\frac{m-1}{2}}\right), & \text{如果 } m\text{是偶数};\\ O\left((\log\log z)^{\frac{m-1}{2}}\right), & \text{如果}m\text{是奇数}.\end{cases}\tag{11}$$

下面我们开始证明定理 1。回忆估计 $\sum_{|p|\le x}F(1,p)=k\log\log x+O(1)$，我们有

$$\begin{aligned}\omega(a)-k\log\log x&=\sum_{p|a|}1-\sum_{|p|\le x}F(1,p)+O(1)\\&=\sum_{\substack{|p|\le z\\ p|a}}1+\sum_{\substack{|p|>z\\ p|a}}1-\sum_{|p|\le z}F(1,p)-\sum_{z<|p|\le x}F(1,p)+O(1)\\&=\sum_{|p|\le z}\mathcal{F}_p(a)+\sum_{\substack{|p|>z\\ p|a}}1-\sum_{z<|p|\le x}F(1,p)+O(1)\end{aligned}$$

对于 $|a|\le x$，我们有

$$\sum_{\substack{|p|>z\\ p|a}}1=O(1),$$

因为 $a$ 的范数在 $z$ 和 $x$ 之间的素因子个数最多为 $m(2k+6)$。另外

$$\sum_{z<|p|\le x}F(1,p)=k\log\log x-k\log\log z+O(1)=O(1),$$

因此

$$\omega(a)-k\log\log x=\sum_{|p|\le z}\mathcal{F}_p(a)+O(1).$$

由二项式定理，

$$\frac{\sum_{|a|\le x}(\omega(a)-k\log\log x)^m\tau_k(a)}{\sum_{|a|\le x}\tau_k(a)}=\frac{\sum_{|a|\le x}\left(\sum_{|p|\le z}\mathcal{F}_p(a)\right)^m\tau_k(a)}{\sum_{|a|\le x}\tau_k(a)}+O\left(\frac{\sum_{|a|\le x}\left|\sum_{|p|\le z}\mathcal{F}_p(a)\right|^{m-1}\tau_k(a)}{\sum_{|a|\le x}\tau_k(a)}\right).\tag{12}$$

最后由引理 5 和(12)，对 $m$ 奇偶性分别进行讨论便可以得到定理 1。

## 4. 引理 5 的证明

定义 $\mathcal{F}_r(a)=\prod_{p^\alpha\|r}\mathcal{F}_p(a)^\alpha$，那么我们有

$$\sum_{|a|\le x}\left(\sum_{|p|\le z}\mathcal{F}_p(a)\right)^m\tau_k(a)=\sum_{|p_1|,\cdots,|p_m|\le z}\sum_{|a|\le x}\mathcal{F}_{p_1p_2\cdots p_m}(a)\tau_k(a).$$

因此我们可以将(11)的左边写为

$$\sum_{|p_1|,\cdots,|p_m|\le z}\frac{\sum_{|a|\le x}\mathcal{F}_{p_1p_2\ldots p_m(a)}\tau_k(a)}{\sum_{|a|\le x}\tau_k(a)}. \tag{13}$$

记 $r=p_1p_2\cdots p_m$。现在考虑 $\sum_{|a|\leqslant x}\mathcal{F}_r(a)\tau_k(a)$。因为 $|p_i|\le z,1\le i\le m$，所以只需考虑 $|r|\le z^m$。令 $R$ 是 $r$ 的无平方因子部分，即 $R=\prod_{p^s\|r}p$。由定义，如果 $b=(a,R)$，那么 $\mathcal{F}_r(a)=\mathcal{F}_r(b)$。因此有

$$\sum_{|a|\le x}\mathcal{F}_r(a)\tau_k(a)=\sum_{b|R}\mathcal{F}_r(b)\sum_{\substack{|a|\le x\\(a,R)=b}}\tau_k(a)=\sum_{b|R}\mathcal{F}_r(b)\sum_{\substack{|a|\le x\\ b|a\\ (R/b,a/b)=1}}\tau_k(a).$$

使用等式 $\sum_{c/a,c/b}\mu(c)=\begin{cases}1, & (a,b)=1;\\ 0, & \text{否则}.\end{cases}$，我们可以得到

$$\begin{aligned}\sum_{b|R}\mathcal{F}_r(b)\sum_{\substack{|a|\le x\\ b|a\\ (R/b,a/b)=1}}\tau_k(a)&=\sum_{bc|R}\mathcal{F}_r(b)\mu(c)\sum_{\substack{|a|\le x\\ bc|a}}\tau_k(a)\\ &=\sum_{bc|R}\mathcal{F}_r(b)\mu(c)\left(\operatorname*{Res}_{s=1}\left(\frac{x^s}{s}\zeta_K(s)^kF(s,bc)\right)\right)+O\left(\tau_k(bc)\left(\sqrt{2}+1\right)^{2k\omega(bc)}\left(\frac{x}{|bc|}\right)^{\frac{2k+3}{2k+6}+\varepsilon}\right)\end{aligned}$$

因为 $k$ 是固定的，并且 $ab$ 是无平方因子的。因此 $\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)^{k\omega(bc)}\le\tau_{\left\lceil\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right\rceil^k}(bc)\le(|bc|)^{\varepsilon}$。因此余项的上界是 $O\left(x^{\frac{2k+3}{2k+6}+\varepsilon}\right)$。当余项对所有 $bc|R$ 求和，其贡献是

$$\ll\sum_{|r|\le z^m}x^{\frac{2k+3}{2k+6}+\varepsilon}\ll x^{\frac{2k+3}{2k+6}+\varepsilon}z^m.$$

所以我们有

$$\frac{\sum_{|a|\le x}\mathcal{F}_r(a)\tau_k(a)}{\sum_{|a|\le x}\tau_k(a)}=\frac{(k-1)!}{x(\log x)^{k-1}(\pi/4)^k}\sum_{bc|R}\mathcal{F}_r(b)\mu(c)\operatorname*{Res}_{s=1}\left(\frac{x^s}{s}\zeta^k(s)F(s,bc)\right)+O\left(x^{\frac{-3}{2k+6}+\varepsilon}z^m\right). \tag{14}$$

定义上式的主项为

$$G(r):=\sum_{bc|R}\mathcal{F}_r(b)\mu(c)F(1,bc).$$

容易得到 $G(r)$ 关于 $r$ 是乘性的，因此我们有

$$G(r)=\prod_{p^\alpha\|r}G(p^\alpha).$$

注意到对任意素元 $p$，我们有

$$G(p)=-F(1,p)+(1-F(1,p))F(1,p)-(-F(1,p))F(1,p)=0.$$

当 $\alpha=2$，因为 $0<F(1,p)<1$，我们有

$$\begin{aligned}G(p^2)&=\left(F(1,p)^2\right)+\left(1-F(1,p)^2\right)F(1,p)-\left(-F(1,p)^2\right)F(1,p)\\ &=(F(1,p))(1-F(1,p))\ge 0.\end{aligned}$$

对于 $\alpha \ge 2$，由(5)，

$$G(p^{\alpha}) = \frac{k}{|p|} + O\left(\frac{1}{|p|^2}\right). \tag{15}$$

为了方便下面的证明，我们定义高斯环中元素的顺序。

**定义** 设 $x, y \in \mathbb{Z}[i]$，可以假设 $x = a+bi, y = c+di$。
如果 $|x| > |y|$，则记为 $x > y$。如果 $|x| = |y|$，若或 $a = c$ 并且 $b > d$，则记为 $x > y$。同理可定义 $x < y$。

现在我们考察(14)中由(3)产生的主项

$$\sum_{\substack{|p_1|,|p_2|,\cdots,|p_m| \le z \\ p_1 p_2 \cdots p_m \text{square-full}}} G(p_1 p_2 \cdots p_m).$$

记 $q_1 < q_2 < \cdots < q_t$ 是 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 中不同的素因子。因此 $p_1 p_2 \cdots p_m = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \cdots q_t^{\alpha_t}$。因为 $p_1 p_2 \cdots p_m$ 是 square-full 的，所有有 $\alpha_i \ge 2$，$t \le m/2$。由乘性，上式可以写成

$$\sum_{t \le m/2} \sum_{\substack{q_1 < q_2 < \cdots < q_t \\ Nq_i \le z}} \sum_{\substack{\alpha_1, \cdots, \alpha_t \ge 2 \\ \sum \alpha_i = m}} \frac{m!}{\alpha_1! \cdots \alpha_t!} G\left(q_1^{\alpha_1}\right) \cdots G\left(q_t^{\alpha_t}\right).$$

当 $m$ 是偶数时，我们有 $t = m/2$ 这一项并且 $a_i = 2$，由(15)，这一项的贡献是

$$\frac{m!}{2^{m/2}} \sum_{\substack{q_1 < q_2 < \cdots < q_{m/2} \\ |q_i| \le z}} \prod_{i=1}^{m/2} \left(\frac{k}{|q|_i} + O\left(\frac{1}{|q|_i^2}\right)\right) = \frac{m!}{2^{m/2}(m/2)!} \sum_{\substack{Nq_1, |q|_2, \cdots, |q|_{m/2} \le z \\ q_i \text{互不相同}}} \prod_{i=1}^{m/2} \left(\frac{k}{|q|_i} + O\left(\frac{1}{|q|_i^2}\right)\right).$$

如果我们去除 $q_i$ 是不同的这一限制条件，我们可以发下上式中和式的上界是

$$\left(\sum_{|q| \le z} \frac{k}{|q|} + O\left(\frac{1}{|q|^2}\right)\right)^{m/2} = (k \log\log z)^{m/2} + O\left((\log\log z)^{\frac{m}{2}-1}\right).$$

如果我们假设是 $q_1, \cdots q_{m/2-1}$ 给定的，那么对 $q_{m/2}$ 求和最少为

$$\sum_{\substack{\pi_{m/2} \le q \\ |q| \le z}} \frac{k}{|q|} + O\left(\frac{1}{|q|^2}\right),$$

其中 $\pi_n$ 表示 $n$ 个素元。因为 $\frac{k}{|q|} + O\left(\frac{1}{|q|^2}\right)$ 是随着 $|q|$ 增大而递减的，因此和式的下界是

$$\left(\sum_{\substack{\pi_{m/2} \le q \\ |q| \le z}} \frac{k}{|q|} + O\left(\frac{1}{|q|^2}\right)\right)^{m/2} = (k \log\log z)^{m/2} + O\left((\log\log z)^{\frac{m}{2}-1}\right),$$

因为 $m = O(1)$。所以上界和下界都是等于 $(k \log\log z)^{m/2}$。所以 $t = m/2$ 这一项的贡献是

$$\frac{m!}{2^{m/2}(m/2)!}(k \log\log z)^{m/2} + O\left((\log\log z)^{\frac{m}{2}-1}\right). \tag{16}$$

接下来我们考虑 $t < m/2$ 的贡献。注意到 $G\left(p^{\alpha}\right) \ll \frac{1}{|p|}$，所以这些项的贡献是

$$\ll \sum_{\substack{q_1<q_2<\cdots<q_t \\ |q|_i \le z}} \frac{1}{|q|_1 \ldots |q|_t} \ll \left( \sum_{|q|\le z} \frac{1}{|q|} \right)^t \ll (\log\log z)^t \ll (\log\log z)^{\frac{m}{2}-1}. \tag{17}$$

(13)中余项是由(14)中留数低阶项和余项产生的。其中(14)中余项的贡献为

$$\ll \sum_{|p_1|,|p_2|,\ldots,|p_m|\le z} x^{\frac{-3}{2k+6}+\varepsilon} z^m \ll x^{\frac{-3}{2k+6}+\varepsilon} z^{2m},$$

取 $z = x^{\frac{1}{m(2k+6)}}$，那么

$$x^{\frac{-3}{2k+6}+\varepsilon} z^{2m} = x^{\frac{-1}{2k+6}+\varepsilon} \ll 1. \tag{18}$$

我们现在来考虑由(14)留数低阶项产生的贡献。

$$\sum\nolimits_{\substack{1\le c\le k-1 \\ 0\le j\le c}} \left| \frac{1}{x^c} \sum_{|p_1|,|p_2|,\ldots,|p_m|\le z} \frac{d^j}{ds^j} \left\{ G(s, p_1 p_2 \cdots p_m) \right\} \Big|_{s=1} \right|, \tag{19}$$

其中我们定义

$$G(s,r) := \sum_{bc|R} \mathcal{F}_r(b) \mu(c) F(s,bc).$$

注意到 $G(1,r) = G(r)$。由乘性，(19)绝对值部分可以改写为

$$\frac{1}{x^c} \sum_{t\le m} \sum_{\substack{q_1<q_2<\cdots<q_t \\ |q_i|\le z}} \sum_{\substack{\alpha_1,\cdots,\alpha_t\ge 1 \\ \sum \alpha_i = m}} \frac{m!}{\alpha_1!\cdots\alpha_t!} \frac{d^j}{ds^j} \left\{ G\left(s, q_1^{\alpha_1}\right) \cdots G\left(s, q_t^{\alpha_t}\right) \right\} \Big|_{s=1}.$$

由微分运算法则，上式可以进一步写成

$$\frac{1}{x^c} \sum_{t\le m} \sum_{\substack{q_1<q_2<\cdots<q_t \\ |q|_i\le z}} \sum_{\substack{\alpha_1,\ldots,\alpha_t\ge 1 \\ \sum \alpha_i = m}} \frac{m!}{a_1!\cdots\alpha_t!} \sum_{\substack{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\ge 0 \\ \beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_t=j}} \frac{j!}{\beta_1!\cdots\beta_t!} \prod_{i=1}^{t} \frac{d^{\beta_i}}{ds^{\beta_i}} \left\{ G\left(s, q_i^{\alpha_i}\right) \right\} \Big|_{s=1}.$$

由(15)和(6)，

$$\frac{d^{\beta_i}}{ds^{\beta_i}} \left\{ G\left(s, q^{\alpha}\right) \right\} \Big|_{s=1} \ll \frac{(\log|q|)^{\beta_i}}{|q|}.$$

因此对于(19)，我们有

$$\ll \sum_{\substack{1\le c\le k-1 \\ 0\le j\le c}} \sum_{t\le m} \frac{1}{x^c} \sum_{\substack{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\ge 0 \\ \beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_t=j}} \prod_{i=1}^{i=t} \left( \sum_{|q|\le z} \frac{(\log|q|)^{\beta_i}}{|q|} \right).$$

由(8)上式可以写成

$$\ll \sum_{\substack{1\le c\le k-1 \\ 0\le j\le c}} \sum_{t\le m} \frac{1}{x^c} (\log z)^j (\log\log z)^{\left|\{1\le i\le t:\beta_i=0\}\right|}. \tag{20}$$

因为 $\left|\{1\le i\le t:\beta_i=0\}\right|$，是 $G\left(s, q_i^{\alpha_i}\right)$ 中未微分项，并且这些项有 $\alpha_i \ge 2$ 并且 $\alpha_i$ 不全等于 2，因为这些项已经处理过了。因此

$$\left|\{1\le i\le t:\beta_i=0\}\right| \le \frac{m-1}{2}.$$

所以(20)有上界。这就完成了引理 5 的证明。

## 5. 引理 3 的证明

下面我们证明引理 3，令 $a=bc$，那么我们有

$$\sum_{\substack{a\\ b|a}}\frac{\tau_k(a)}{(|a|)^s}=\frac{1}{(|b|)^s}\sum_q\frac{\tau_k(bc)}{|c|^s}=\frac{1}{(|b|)^s}\left(\prod_{p^{\nu_p}\|b|}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\tau_k\left(p^{m+\nu_p}\right)}{\left(|p|^m\right)^s}\right)\left(\prod_{p\nmid b}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\tau_k\left(p^m\right)}{\left(|p|^m\right)^s}\right). \tag{21}$$

由 Dedekind zeta 函数 $\zeta_K(s)$ 的定义和它的欧拉乘积，我们有

$$\zeta_K(s)^k=\sum_a\frac{\tau_k(a)}{|a|^s}=\prod_p\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\tau_k\left(p^m\right)}{\left(|p|^m\right)^s}. \tag{22}$$

由(21)和(22)可以得到

$$\sum_{\substack{a\\ b|a}}\frac{\tau_k(a)}{(|a|)^s}=\frac{\zeta_K(s)^k}{(|b|)^s}\prod_{p^{\nu_p}\|b}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\tau_k\left(p^{m+\nu_p}\right)}{\left(|p|^m\right)^s}\Bigg/\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\tau_k\left(p^m\right)}{\left(|p|^m\right)^s}\right). \tag{23}$$

由于

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\tau_k\left(p^m\right)}{\left(|p|^m\right)^s}=\left(\frac{(|p|)^s}{(|p|)^s-1}\right)^k, \tag{24}$$

我们可以将(23)改写为

$$\sum_{\substack{a\\ b|a}}\frac{\tau_k(a)}{(|a|)^s}=\zeta_K(s)^k\prod_{p^{\nu_p}\|b}\left(1-\left(1-\frac{1}{(|p|)^s}\right)^k\sum_{m=0}^{\nu_p-1}\frac{\tau_k\left(p^m\right)}{\left(|p|^m\right)^s}\right).$$

令 $F(s,b)=\prod_{p^{\nu_p}\|b}\left(1-\left(1-\frac{1}{(|p|)^s}\right)^k\sum_{m=0}^{\nu_p-1}\frac{\tau_k\left(p^m\right)}{\left(|p|^m\right)^s}\right)$。那么我们有

$$\sum_{\substack{a\\ b|a}}\frac{\tau_k(a)}{(|a|)^s}=\zeta_K(s)^kF(s,b).$$

注意到这个 Dirichlet 级数在 $\Re s>1$ 是绝对收敛的。由 Perron 公式，我们可以得到

$$\sum_{\substack{|a|\le x\\ b|a}}\tau_k(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\zeta_K(s)^kF(s,b)x^s\frac{ds}{s}+O\left(\left(\frac{x}{|a|}\right)^c\frac{\tau_k(a)}{T}\right), \tag{25}$$

其中 $c=1+\varepsilon$ 并且 $T$ 非常大。

为计算上式中的积分，我们考虑采用留数定理。观察到上式积分中被积函数在右半平面上只在 $s=1$ 处有极点，故我们选择对矩形 $\mathcal{R}$ 进行积分，其顶点为 $c-iT,c+iT,1/2+iT$ 和 $1/2-iT$，由留数定理可知

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{R}}\zeta_K(s)^kF(s,b)x^s\frac{ds}{s}=\operatorname*{Res}_{s=1}\left(\frac{x^s}{s}\zeta_K(s)^kF(s,b)\right).$$

为了估计上述积分的上界，我们使用以下引理。

**引理 6** [9]令 $K$ 是 $n$ 次代数数域，那么

$$\zeta\left(1/2+it\right)\ll_K\left(|t|+1\right)^{\frac{n}{6}},\quad \text{for } t\geq 0 \tag{26}$$

对任意固定的 $\varepsilon>0$ 成立。

由上述引理和 Theorem 5.53 [10]，我们有

$$\zeta_K\left(\sigma+it\right)\ll\left(1+|t|\right)^{\frac{n}{3}(1-\sigma)+\varepsilon}. \tag{27}$$

对 $\sigma\in\left[\frac{1}{2},c\right]$ 和 $t\in\left[-T,T\right]$ 一致成立. 我们同样需要这个区域内对 $F(s,b)$ 的估计. 注意到 $F(s,b)$ 可以表示为

$$\left|F\left(s,b\right)\right|=\frac{1}{\left(|b|\right)^{\sigma}}\prod_{p^{v_p}\|b}\left|\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\tau_k\left(p^{m+v_p}\right)}{\left(|p|^m\right)^s}\Big/\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\tau_k\left(p^m\right)}{\left(|p|^m\right)^s}\right)\right|.$$

其中 $\sigma=\Re s$. 因为 $\tau_k\left(p^{m+v_p}\right)\leq\tau_k\left(p^m\right)\tau_k\left(p^{v_p}\right)$，因此，

$$\left|\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\tau_k\left(p^{m+v_p}\right)}{\left(|p|^m\right)^s}\right|\leq\tau_k\left(p^{v_p}\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\tau_k\left(p^m\right)}{\left(|p|^m\right)^{\sigma}}=\tau_k\left(p^{v_p}\right)\left(\frac{\left(|p|\right)^{\sigma}}{\left(|p|\right)^{\sigma}-1}\right)^k$$

并且

$$\left|\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\tau_k\left(p^m\right)}{\left(|p|^m\right)^s}\right)^{-1}\right|=\left|\left(\frac{\left(|p|\right)^s-1}{\left(|p|\right)^s}\right)^k\right|\leq\left(\frac{\left(|p|\right)^{\sigma}+1}{\left(|p|\right)^{\sigma}}\right)^k.$$

注意到 $\left(\left(\left(|p|\right)^{\sigma}+1\right)/\left(\left(|p|\right)^{\sigma}-1\right)\right)^k\leq\left(\left(\sqrt{2}+1\right)/\left(\sqrt{2}-1\right)\right)^k,\sigma\geq\frac{1}{2}$。我们有

$$\left|F\left(s,b\right)\right|\leq\frac{1}{\left(|b|\right)^{\sigma}}\prod_{p^{v_p}\|b}\tau_k\left(p^{v_p}\right)\left(\frac{\left(|p|\right)^{\sigma}+1}{\left(|p|\right)^{\sigma}-1}\right)^k\leq\frac{\tau_k\left(b\right)\left(\sqrt{2}+1\right)^{2k\omega(b)}}{\left(|b|\right)^{\sigma}},\sigma\geq\frac{1}{2}. \tag{28}$$

现在我们可以来对矩阵水平边的积分进行估计，我们有

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}\pm iT}^{c\pm iT}\zeta_K\left(s\right)^k F\left(s,b\right)x^s\frac{ds}{s}\right|\\
&=O\left(\tau_k\left(b\right)\left(\sqrt{2}+1\right)^{2k\omega(b)}\int_{\frac{1}{2}}^{c}\left(\frac{x}{|b|}\right)^{\sigma}\left|\zeta^k\left(\sigma+iT\right)\right|\frac{d\sigma}{T}\right)\\
&=O\left(\tau_k\left(b\right)\left(\sqrt{2}+1\right)^{2k\omega(b)}\int_{\frac{1}{2}}^{c}\left(\frac{x}{|b|}\right)^{\sigma}\left(1+T\right)^{\frac{nk}{3}(1-\sigma)+\varepsilon}\frac{d\sigma}{T}\right)\\
&=O\left(\tau_k\left(b\right)\left(\sqrt{2}+1\right)^{2k\omega(b)}\max_{\frac{1}{2}\leq\sigma\leq c}\left(\left(\frac{x}{|b|}\right)^{\sigma}\left(1+T\right)^{\frac{2k}{3}(1-\sigma)-1+\varepsilon}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$= O\left(\tau_k(b)\left(\sqrt{2}+1\right)^{2k\omega(b)}\left(\left(\frac{x}{|b|}\right)^c \frac{1}{T} + \left(\frac{x}{|b|}\right)^{\frac{1}{2}} T^{\frac{2k}{6}-1+\varepsilon}\right)\right).$$

类似地，对于矩阵垂直边积分的估计有

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{1}{2}+iT}\zeta_K(s)^k F(s,b)x^s\frac{ds}{s}\right|^T$$

$$= O\left(\left(\frac{x}{|b|}\right)^{\frac{1}{2}}\tau_k(b)\left(\sqrt{2}+1\right)^{2k\omega(b)}\int_{-T}^{T}\left|\zeta_K(1/2+it)\right|^k\frac{dt}{|t|+1}\right)$$

$$= O\left(\left(\frac{x}{|b|}\right)^{\frac{1}{2}}\tau_k(b)\left(\sqrt{2}+1\right)^{2k\omega(b)} T^{\frac{2k}{6}+\varepsilon}\right),$$

最后由留数定理，我们有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\zeta_K(s)^k F(s,b)x^s\frac{ds}{s} = \operatorname*{Res}_{s=1}\left(\frac{x^s}{s}\zeta_K(s)^k F(s,b)\right) + O\left(\frac{\tau_k(b)\left(\sqrt{2}+1\right)^{2k\omega(b)}}{T}\left(\frac{x}{|b|}\right)^c\right) + O\left(\left(\frac{x}{|b|}\right)^{\frac{1}{2}}\tau_k(b)\left(\sqrt{2}+1\right)^{2k\omega(b)} T^{\frac{2k}{6}+\varepsilon}\right).$$

将上式带入到(25)，我们有

$$\sum_{\substack{|a|\le x\\ b|a}}\tau_k(a) = \operatorname*{Res}_{s=1}\left(\frac{x^s}{s}\zeta_K(s)^k F(s,b)\right) + O\left(\frac{\tau_k(b)\left(\sqrt{2}+1\right)^{2k\omega(b)}}{T}\left(\frac{x}{|b|}\right)^c\right) + O\left(\left(\frac{x}{|b|}\right)^{\frac{1}{2}}\tau_k(b)\left(\sqrt{2}+1\right)^{2k\omega(b)} T^{\frac{2k}{6}+\varepsilon}\right).$$

最后，我们取

$$T = \left(\frac{x}{|b|}\right)^{\frac{3}{2k+6}}$$

便可以完成引理 3 的证明。

## 参考文献

[1] Hardy, G.H. and Ramanujan, S. (1917) The Normal Number of Prime Factors of a Number n. *Quarterly Journal of*

*Mathematics*, **48**, 76-92.

[2] Turán, P. (1934) On a Theorem of Hardy and Ramanujan. *Journal of the London Mathematical Society*, **1**, 274-276. https://doi.org/10.1112/jlms/s1-9.4.274

[3] Erdos, P. and Kac, M. (1940) The Gaussian Law of Errors in the Theory of Additive Number Theoretic Functions. *American Journal of Mathematics*, **62**, 738-742. https://doi.org/10.2307/2371483

[4] Elliott, P.D.T.A. (2014) Central Limit Theorems for Classical Cusp Forms. *The Ramanujan Journal*, **36**, 81-98. https://doi.org/10.1007/s11139-013-9516-9

[5] Billingsley, P. (1969) On the Central Limit Theorem for the Prime Divisor Function. *The American Mathematical Monthly*, **76**, 132-139. https://doi.org/10.1080/00029890.1969.12000157

[6] Khan, R., Milinovich, M.B. and Subedi, U. (2022) A Weighted Version of the Erdős-Kac Theorem. *Journal of Number Theory*, **239**, 1-20. https://doi.org/10.1016/j.jnt.2021.10.010

[7] Liu, Y. (2004) A Generalization of the Erdös-Kac Theorem and Its Applications. *Canadian Mathematical Bulletin*, **47**, 589-606. https://doi.org/10.4153/cmb-2004-057-4

[8] Lee, E.S. (2023) Explicit Mertens' Theorems for Number Fields. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **108**, 169-172. https://doi.org/10.1017/s0004972723000308

[9] Lü, G. and Yang, Z. (2011) The Average Behavior of the Coefficients of Dedekind Zeta Function over Square Numbers. *Journal of Number Theory*, **131**, 1924-1938. https://doi.org/10.1016/j.jnt.2011.01.018

[10] Iwaniec, H. and Kowalski, E. (2004) Analytic Number Theory. AMS Colloquium Publications, Vol. 53, American Mathematical Society.