

2×2 上三角型算子矩阵的拟Fredholm谱

包中秀, 吴德玉*

内蒙古大学数学科学学院, 内蒙古 呼和浩特

收稿日期: 2025年2月24日; 录用日期: 2025年3月20日; 发布日期: 2025年4月17日

摘 要

主要运用内部项的拟Fredholm性质研究了 2×2 上三角型算子矩阵的拟Fredholm谱, 并拓展到无界 2×2 上三角型算子矩阵的拟Fredholm谱。给出了具体例子加以说明结论的有效性。

关键词

半正则算子, 拟Fredholm算子, 算子矩阵

The Quasi-Fredholm Spectrum of 2×2 Upper Triangular Operator Matrices

Zhongxiu Bao, Deyu Wu*

School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot Inner Mongolia

Received: Feb. 24th, 2025; accepted: Mar. 20th, 2025; published: Apr. 17th, 2025

Abstract

The Quasi-Fredholm Spectrum of 2×2 upper triangular operator matrices is studied by using the Quasi-Fredholm property of its internal entries, and extended to the Quasi-Fredholm spectrum of the triangular operator matrices on the unbounded 2×2 . The example is given to illustrate the validity of the result.

Keywords

Semi-Regular Operator, Quasi-Fredholm Operator, Operator Matrices

*通讯作者。



1. 引言

分块算子矩阵是一种以 Hilbert 空间或 Banach 空间中的线性算子作为基本元素的独特矩阵。这种矩阵在系统理论、非线性分析和方程发展等多个领域都有广泛的应用。从理论研究的角度看, Hilbert 空间中的线性算子在经过特定的空间分解后, 可以被转化为分块算子矩阵。而从实际应用的角度看, 分块算子矩阵在处理偏微分方程、弹性力学、磁流体动力学和量子力学等数学物理问题时都起到了关键的作用。例如, Ekman 边界层稳定性理论可以被转化为如下系统:

$$\mathcal{A} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \lambda \mathcal{B} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (1),$$

这里 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ 分别表示形如

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} (-D^2 + \alpha^2)^2 + i\alpha RV(-D^2 + \alpha^2) + i\alpha RV'' & 2D \\ 2D + i\alpha RU' & -D^2 + \alpha^2 + i\alpha RV \end{bmatrix}$$

和

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} -D^2 + \alpha^2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

的分块算子矩阵, 其中 $D = \frac{d}{dt}$, $t \in [0, +\infty)$, 函数 U , V 是速度剖面, α , R 是具有特殊含义的常数。

1958 年, T. Kato 在文献[1]证明了半 Fredholm 算子的一个重要分解: 对于稠定闭线性算子 T , 如果 T 是半 Fredholm 算子, 则存在闭子空间对 (M, N) , 使得以下结论成立:

- (1) $X = M \oplus N$;
- (2) $T(M \cap \mathcal{D}(T)) \subseteq M$, $\mathcal{R}(T|_M)$ 是闭集, 对任意非负整数 n , 有 $\mathcal{N}(T|_M^n) \subseteq \mathcal{R}(T|_M)$ 。
- (3) $T(N \cap \mathcal{D}(T)) \subseteq N \subseteq \mathcal{D}(T)$, $T|_N$ 是幂零算子, 其中 N 是有限维子空间。

X 的这种分解被称为与算子 T 相关的 Kato 分解。T. Kato 还指出, 在同构意义下, 这种分解是唯一的。1980 年, J. P. Labrousse 在文献[2]中对 Hilbert 空间上的所有允许这种分解的算子进行刻画, 并将这些算子称为拟 Fredholm 算子。同时还证明了对于 Hilbert 空间上的有界线性算子 T , T 是拟 Fredholm 算子当且仅当 T 是 Kato 型算子。除此之外, 利用广义逆理论还给出了拟 Fredholm 算子的另外一种等价刻画。1996 年, M. Mbekhta 和 V. Müller 在文献[3]中将这类算子推广到 Banach 空间。拟 Fredholm 算子包含了半 Fredholm 算子、半正则算子等 Fredholm 理论体系中的核心算子类型。自然地, 对每个有界算子 T , 按照如下方式定义拟 Fredholm 谱:

$$\sigma_{\text{af}}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ 不是 Fredholm 算子}\}.$$

运用拟 Fredholm 理论进行研究, 不仅揭示了算子的内在结构, 也为 Fredholm 理论分析提供了新的方法论工具。此外, 拟 Fredholm 算子 T 涉及到核空间 $\mathcal{N}(T)$ 的性质, 因此对于类似方程(1)的求解提供理论依据。

因此, 关于拟 Fredholm 算子的研究受到了很多学者的关注。见文献[4]-[6]。比如, P. Aiena 等人对拟

Fredholm 算子进行了深入的探讨。2018 年, Orlando García 等人在文献[7]得到关于拟 Fredholm 算子在幂零算子扰动下的稳定性的结果, 同时给出了半 B-Weyl 算子类的一个新的分解。2019 年, Anuradha Gupta 等人在文献[8]中利用拟 Fredholm 算子的相关性质描述了在紧扰动下保持 SVEP 的算子。更多关于拟 Fredholm 算子的内容见文献[9]-[14]。

目前关于 2×2 有界分块拟 Fredholm 算子矩阵的研究较少。因此本文主要运用内部项的拟 Fredholm 性质研究了 2×2 上三角型算子矩阵的拟 Fredholm 谱, 并拓展到无界 2×2 上三角型算子矩阵的拟 Fredholm 谱。给出了具体例子加以说明结论的有效性。对于该理论的推广, 未来还有更多可研究的方向, 如研究更高阶矩阵的谱性质、将 Hilbert 空间的相关理论推广到 Banach 空间以及推广更多无界算子的情形等。

2. 预备知识

如无特殊说明, X, Y 表示可分的 Hilbert 空间, $\mathcal{L}(X, Y)$ 表示 X 上到 Y 中的有界线性算子的全体构成的集合。特别地, 当 $X = Y$ 时记为 $\mathcal{L}(X)$ 。全体近似点谱记为 $\sigma_{ap}(T)$ 。由文献[15]的引理 2.1.3 以及文献[16]的定理 1.2.3 得

$$\lambda \in \sigma_{ap}(T) \Leftrightarrow T - \lambda I \text{ 不是下方有界} \Leftrightarrow T - \lambda I \text{ 不单或 } \mathcal{R}(T - \lambda I) \text{ 不闭}.$$

下面我们将考虑定义在 $X \oplus Y$ 上的分块算子矩阵

$$M_C = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

特别地, 当 $C = 0$ 时, 记为 M_0 。更多关于分块算子矩阵的相关结论参考文献[15] [16]。

定义 1 [14] 设 $T \in \mathcal{L}(X)$ 。如果存在 X 的闭子空间对 (M, N) 使得以下条件满足:

- (1) $X = M \oplus N$;
- (2) $T(M) \subset M$ 且 $T|_M$ 是半正则算子;
- (3) $T(N) \subset N$ 且 $T|_N$ 是拟幂零算子。

则称 T 存在广义 Kato 分解, 缩写为 GKD。特别地, 如果 $T|_N$ 是幂零算子。即存在 $d \in N$ 使得 $(T|_N)^d = 0$ 。在此情况下, T 被称为 Kato 型算子。

注 1 如果 $\mathcal{R}(T)$ 是闭的, 且对任意的 $n \in N$ (非负整数集), 有 $\mathcal{N}(T) \subset \mathcal{R}(T^n)$ 成立, 则称 T 是半正则算子。如果 $\sigma(T) = \{0\}$, 则称 T 为拟幂零算子。

定义 2 [2] T 是稠定闭算子, 如果存在 $d \in N$ (非负整数集) 满足:

- (1) $\text{dis}(T) = d$;
- (2) $\mathcal{N}(T) \cap \mathcal{R}(T^d)$ 是 X 的闭子空间;
- (3) $T(X) + \mathcal{N}(T^d)$ 是 X 的闭子空间。

则称 T 为拟 Fredholm 算子。其中 $\text{dis}(T)$ 称为 T 的稳定迭代程度, 其定义为

$$\text{dis}(T) := \inf \Delta(T),$$

$$\Delta(T) := \{n \in N : m \geq n, m \in N \Rightarrow T^n(X) \cap \mathcal{N}(T) \subseteq T^m(X) \cap \mathcal{N}(T)\}.$$

特别地, 如果 $\Delta(T) = \emptyset$, 则 $\text{dis}(T)$ 定义为无穷大, 即 $\text{dis}(T) = \infty$ 。

注 2 如果 $T \in \mathcal{L}(X)$, 则 T 是拟 Fredholm 算子当且仅当 T 是 Kato 型算子。

注 3 算子的 Kato 型谱, 拟 Fredholm 谱, 半正则谱分别表示为

$$\begin{aligned} \sigma_k(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ 不是 Kato 型算子}\}; \\ \sigma_{qf}(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ 不是拟 Fredholm 算子}\}; \end{aligned}$$

$$\sigma_{rs}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ 不是半正则算子}\}.$$

其中 $\rho_k(T) = C/\sigma_k(T)$, $\rho_{qf}(T) = C/\sigma_{qf}(T)$, $\rho_{rs}(T) = C/\sigma_{rs}(T)$ 。

引理 1 [12] 令 $A \in \mathcal{L}(X)$, $B \in \mathcal{L}(Y)$, $C \in \mathcal{L}(Y, X)$, $n \in \mathbb{N}^*$, 则

$$(1) \ x \in \mathcal{N}(A^n) \Leftrightarrow x \oplus 0 \in \mathcal{N}(M_C^n);$$

(2) 如果 B 是单射, 则对任意 $x \in X$, 有

$$x \in \mathcal{R}(A^n) \Leftrightarrow x \oplus 0 \in \mathcal{R}(M_C^n).$$

(3) 如果 B 是单射, 则对任意 $x \oplus y \in X \oplus Y$, 我们有

$$x \oplus y \in \mathcal{R}(M_C^n) \cap \mathcal{N}(M_C) \Leftrightarrow x \in \mathcal{R}(A^n) \cap \mathcal{N}(A), \ y = 0.$$

引理 2 [12] 若 B 是单射, 且 M_C 是拟 Fredholm 算子, 则 A 是拟 Fredholm 算子。

定义 3 [13] T 是向量空间 X 的线性算子, d 是非负整数, 若对任意 $n \geq d$, 有

$$k_n(T) = \dim \frac{\mathcal{N}(T) \cap \mathcal{R}(T^n)}{\mathcal{N}(T) \cap \mathcal{R}(T^{n+1})} = \dim \frac{\mathcal{R}(T) + \mathcal{N}(T^{n+1})}{\mathcal{R}(T) + \mathcal{N}(T^n)} = 0,$$

则称 T 对任意 $n \geq d$ 有一致降指数。

引理 3 [13] T 是向量空间 X 的线性算子, d 是固定非负整数, 则下列陈述等价:

(1) 任意 $n \geq d$, T 有一致降指数;

(2) 任意 $n \geq d$, $\mathcal{N}(T) \cap \mathcal{R}(T^n)$ 为常值序列;

$$\mathcal{N}(T) \cap \mathcal{R}(T^d) = \mathcal{N}(T) \cap \mathcal{R}(T^\infty);$$

(3) 任意 $n \geq d$, $\mathcal{N}(T^n) + \mathcal{R}(T)$ 为常值序列;

$$\mathcal{N}(T^d) + \mathcal{R}(T) = \mathcal{N}(T^\infty) + \mathcal{R}(T).$$

引理 4 [13] $T \in \mathcal{L}(X)$, d 是非负整数, 对任意 $n \geq d$, 有 $k_n(T) = 0$, 则下列陈述等价:

(1) $\mathcal{N}(T^d) + \mathcal{R}(T)$ 和 $\mathcal{N}(T) \cap \mathcal{R}(T^d)$ 是闭的;

(2) $\mathcal{R}(T^{d+1})$ 是闭的;

(3) 任意 $n \geq d$, $\mathcal{R}(T^n)$ 是闭的;

(4) 任意 i, j , $i + j \geq d$, $\mathcal{R}(T^i) + \mathcal{N}(T^j)$ 是闭的。

3. 主要结果及其证明

定理 2.1 令 $A \in \mathcal{L}(X)$, $B \in \mathcal{L}(Y)$, $C \in \mathcal{L}(X, Y)$, $d \in \mathbb{N}$ 。若 B 是单射, $\mathcal{R}(B)$ 是闭的, 则 A 是拟 Fredholm 算子当且仅当 M_C 是拟 Fredholm 算子。

证明 由引理 2 可得充分性显然成立。

必要性。设 $x \oplus y \in \mathcal{R}(M_C^d) \cap \mathcal{N}(M_C)$, 由于 B 是单射, 故由引理 1 得

$$x \oplus y \in \mathcal{R}(M_C^n) \cap \mathcal{N}(M_C) \Leftrightarrow x \in \mathcal{R}(A^n) \cap \mathcal{N}(A), \ y = 0.$$

又因为 A 是拟 Fredholm 算子, 于是

$$x \oplus y \in \mathcal{R}(M_C^d) \cap \mathcal{N}(M_C).$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathcal{R}(A^d) \cap \mathcal{N}(A), \ y = 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathcal{R}(A^n) \cap \mathcal{N}(A), \ y = 0. \ (n \geq d)$$

$$\Leftrightarrow x \oplus y \in \mathcal{R}(M_C^n) \cap \mathcal{N}(M_C), \quad y = 0. \quad (n \geq d)$$

即 $\text{dis}(M_C) \leq d$ 。考虑 $\text{dis}(A) = d$ ，得知 $\mathcal{R}(A^{d-1}) \cap \mathcal{N}(A) \supsetneq \mathcal{R}(A^d) \cap \mathcal{N}(A)$ ，即存在 x_0 使得 $x_0 \in \mathcal{R}(A^{d-1}) \cap \mathcal{N}(A)$ ，但 $x_0 \notin \mathcal{R}(A^d) \cap \mathcal{N}(A)$ 。

故存在 $x_0 \oplus 0$ 使得

$$x_0 \oplus 0 \in \mathcal{R}(M_C^{d-1}) \cap \mathcal{N}(M_C), \quad \text{但 } x_0 \oplus 0 \notin \mathcal{R}(M_C^d) \cap \mathcal{N}(M_C)。$$

所以 $\text{dis}(M_C) \geq d$ ，即 $\text{dis}(M_C) = d$ 。接下来证明 $\mathcal{N}(M_C^d) + \mathcal{R}(M_C)$ 和 $\mathcal{N}(M_C) \cap \mathcal{R}(M_C^d)$ 是闭的。由定义 3 和引理 3、4 可得只证 $\mathcal{R}(M_C^{d+1})$ 闭，即只证对任意的 $\|x_n \oplus y_n\| = 1 (n=1, 2, \dots)$ ，如果 $M_C^{d+1}(x_n \oplus y_n) \rightarrow 0$ ，则 $\{x_n \oplus y_n\}$ 含有收敛子列即可。考虑

$$M_C^n = \begin{bmatrix} A^n & \sum_{k=0}^{n-1} A^{n-1-k} C B^k \\ 0 & B^n \end{bmatrix},$$

有

$$\begin{cases} A^{d+1}x_n + \sum_{k=0}^d A^{d-k} C B^k y_n \rightarrow 0, \\ B^{d+1}y_n \rightarrow 0. \end{cases}$$

可以断言 $y_n \rightarrow 0$ 。事实上，由 B 单， $\mathcal{R}(B)$ 闭，得 B 为半正则算子，故 B^{d+1} 为半正则算子，即 $\mathcal{R}(B^{d+1})$ 闭。于是 B^{d+1} 下方有界，得 $y_n \rightarrow 0$ 。进而得 $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \neq 0$ 且 $A^{d+1}x_n \rightarrow 0$ 。故

$$\left\| \frac{x_n}{\|x_n\|} \right\| = 1 \text{ 且 } A^{d+1} \frac{x_n}{\|x_n\|} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)。$$

然而，由 A 是拟算子可知 $\mathcal{R}(A^{d+1})$ 闭。于是 $\left\{ \frac{x_n}{\|x_n\|} \right\}$ 含有收敛子列。再考虑

$$\|x_n\| \rightarrow 1,$$

即 $\{x_n\}$ 含有收敛子列。故 $\{x_n \oplus y_n\}$ 含收敛子列。

推论 2.1 令 $A \in \mathcal{L}(X)$ ， $B \in \mathcal{L}(Y)$ ， $C \in \mathcal{L}(X, Y)$ ，则

$$\sigma_{\text{cf}}(M_C) \cup \sigma_{\text{ap}}(B) = \sigma_{\text{cf}}(A) \cup \sigma_{\text{ap}}(B)。$$

推论 2.2 令 $A \in \mathcal{L}(X)$ ， $B \in \mathcal{L}(Y)$ ， $C \in \mathcal{L}(X, Y)$ ， $d \in \mathbb{N}$ 。若 A^* 是单射， $\mathcal{R}(A^*)$ 是闭的，则 B 是拟 Fredholm 算子当且仅当 M_C 是拟 Fredholm 算子。

证明 因为

$$\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} A^* & 0 \\ C^* & B^* \end{bmatrix},$$

以及

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^* & 0 \\ C^* & B^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^* & C^* \\ 0 & A^* \end{bmatrix}。$$

再考虑到相似算子具有相同的谱结构和文献[9]中的结论， B 是拟 Fredholm 算子当且仅当 B^* 是拟 Fredholm 算子，因此类似于定理 1 的证明过程可得。

推论 2.3 令 $A \in \mathcal{L}(X)$, $B \in \mathcal{L}(Y)$, $C \in \mathcal{L}(X, Y)$, 则

$$\sigma_{qf}(M_C^*) \cup \sigma_{ap}(A^*) = \sigma_{qf}(B) \cup \sigma_{ap}(A^*).$$

下面举例说明定理 1 的有效性。

例 1 $A, B, C \in \mathcal{L}(l^2)$, 定义如下:

$$A(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots),$$

$$B(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots),$$

$$C(x_1, x_2, \dots) = (x_1 + x_4, 0, 0, x_5, x_6, \dots).$$

容易计算 $\mathcal{N}(A)$ 的维数为 1, 是有限维, $\mathcal{R}(A)$ 是闭的, 故 A 是半 Fredholm 算子, 进而 A 是拟 Fredholm 算子。一方面, 经计算可得 M_C 是半正则算子。事实上, 易得

$$\mathcal{N}(M_C) = x \oplus 0, \quad x = (x_1, 0, 0, \dots).$$

下面验证 $\mathcal{N}(M_C) \subseteq \mathcal{R}(M_C^n)$ 。对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 令 $v = 0$, $u = (u_1, u_2, u_3, \dots)$, 其中 $u_{n+1} = x_1$, 当 $i \neq n+1$ 时, $u_i = 0$ 。则 $M_C^n(u \oplus v) = x \oplus 0$ 。故 $\mathcal{N}(M_C) \subseteq \mathcal{R}(M_C^n)$ 。容易证明 $\mathcal{R}(M_C)$ 闭。事实上, 任取 $M_C(x_n \oplus y_n) = (Ax_n + Cy_n) \oplus By_n \rightarrow f \oplus g$, 则 $By_n \rightarrow g$, 由于 $\mathcal{R}(B)$ 闭, 所以存在 y_0 使得 $g = By_0$, 结合 B 下方有界, 得 $y_n \rightarrow y_0$ 。进而有 $Cy_n \rightarrow Cy_0$ 。故 $Ax_n \rightarrow f - Cy_0$ 。考虑 $\mathcal{R}(A)$ 闭, 得存在 x_0 使得 $Ax_0 = f - Cy_0$, 即 $f = Ax_0 + Cy_0$, $g = By_0$ 。故 $\mathcal{R}(M_C)$ 闭。即 M_C 是拟 Fredholm 算子。另一方面, 因为 B 单射, $\mathcal{R}(B)$ 闭, 所以由定理 1 可得 M_C 是拟 Fredholm 算子。与直接计算的结果相吻合。因此定理 1 是有效的。

在理论和实际应用中的许多线性算子并不是有界的, 特别是在物理学和力学中所涉及的大量的线性算子很多都是无界的。因此, 接下来我们讨论无界线性算子的性质。

定理 2.2 对于稠定闭无界算子 M_C , 若满足 $\mathcal{D}(B) \subseteq \mathcal{D}(C)$, $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{D}(A)$, B 是单射, 则当 M_C 是拟 Fredholm 算子时, A 是拟 Fredholm 算子。

证明 先证当 $\mathcal{D}(B) \subseteq \mathcal{D}(C)$, $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{D}(A)$ 时有

$$M_C^n = \begin{bmatrix} A^n & \sum_{k=0}^{n-1} A^{n-1-k} CB^k \\ 0 & B^n \end{bmatrix}.$$

当 $n=1$ 时, 结论自然成立。设 $n=m$, 有

$$M_C^m = \begin{bmatrix} A^m & \sum_{k=0}^{m-1} A^{m-1-k} CB^k \\ 0 & B^m \end{bmatrix}.$$

下证

$$M_C^{m+1} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^m & \sum_{k=0}^{m-1} A^{m-1-k} CB^k \\ 0 & B^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{m+1} & \sum_{k=0}^m A^{m-k} CB^k \\ 0 & B^{m+1} \end{bmatrix}.$$

先证对任意线性算子 T 都有 $\mathcal{D}(T^{m+1}) = \mathcal{D}(TT^m)$ 。其中

$$\mathcal{D}(T^{m+1}) = \{x \in \mathcal{D}(T) : Tx \in \mathcal{D}(T^m)\},$$

$$\mathcal{D}(TT^m) = \{x \in \mathcal{D}(T^m) : T^m x \in \mathcal{D}(T)\},$$

当 $m=1$ 时, 结论自然成立。设 $m=k$ 时, 有

$$\mathcal{D}(T^{k+1}) = \mathcal{D}(TT^k)。$$

下证 $m=k+1$ 时有

$$\mathcal{D}(T^{k+2}) = \mathcal{D}(TT^{k+1})。$$

任取 $x \in \mathcal{D}(T^{k+2})$, 则

$$x \in \mathcal{D}(T), \quad Tx \in \mathcal{D}(T^{k+1})。$$

由假设, $Tx \in \mathcal{D}(T^k)$, $T^k(Tx) \in \mathcal{D}(T)$, 即 $x \in \mathcal{D}(TT^{k+1})。$

反之, 当 $x \in \mathcal{D}(TT^{k+1})$, 则

$$x \in \mathcal{D}(T), \quad Tx \in \mathcal{D}(T^k), \quad T^{k+1}x \in \mathcal{D}(T)。$$

从而 $Tx \in \mathcal{D}(TT^k) = \mathcal{D}(T^{k+1})$, 即 $x \in \mathcal{D}(T^{k+2})$ 。故

$$M_C^{m+1} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^m & \sum_{k=0}^{m-1} A^{m-1-k} CB^k \\ 0 & B^m \end{bmatrix}。$$

记

$$T_1 = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^m & \sum_{k=0}^{m-1} A^{m-1-k} CB^k \\ 0 & B^m \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} A^{m+1} & \sum_{k=0}^m A^{m-k} CB^k \\ 0 & B^{m+1} \end{bmatrix}。$$

只需证明 $\mathcal{D}(T_1) = \mathcal{D}(T_2)$ 即可。其中

$$\mathcal{D}(T_1) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in X \times X : \begin{array}{l} x \in \mathcal{D}(A^m) \\ y \in \mathcal{D}(B^m) \cap \mathcal{D}\left(\sum_{k=0}^{m-1} A^{m-1-k} CB^k\right) \\ A^m x + \sum_{k=0}^{m-1} A^{m-1-k} CB^k y \in \mathcal{D}(A) \\ B^m y \in \mathcal{D}(B) \end{array} \right\},$$

$$\mathcal{D}(T_2) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in X \times X : x \in \mathcal{D}(A^{m+1}), y \in \mathcal{D}(B^{m+1}) \cap \mathcal{D}\left(\sum_{k=0}^m A^{m-k} CB^k\right) \right\}。$$

接下来证明

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m A^{m-k} CB^k &= A^m C + A^{m-1} CB + \cdots + ACB^{m-1} + CB^m \\ &= A(A^{m-1}C + A^{m-2}CB + \cdots + CB^{m-1}) + CB^m。 \end{aligned}$$

记 $P_i = A^{m-i}CB^{i-1}$, $1 \leq i \leq m$, 则只需证

$$AP_1 + AP_2 + \cdots + AP_m = A(P_1 + P_2 + \cdots + P_m)。$$

$AP_1 + AP_2 + \cdots + AP_m \subset A(P_1 + P_2 + \cdots + P_m)$ 是显然的。考虑

$$\mathcal{R}(P_i) \subseteq \mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{D}(A) \text{ 之}, \quad 1 \leq i \leq m,$$

得

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^m A^{m-k}CB^k &= A^mC + A^{m-1}CB + \cdots + ACB^{m-1} + CB^m \\ &= A\left(\sum_{k=0}^{m-1} A^{m-1-k}CB^k\right) + CB^m.\end{aligned}$$

进而

$$\mathcal{D}(T_2) = \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathcal{D}(A^{m+1}) \\ \left[\begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right] \in X \times X : \sum_{k=0}^{m-1} A^{m-1-k}CB^k y \in \mathcal{D}(A) \\ y \in \mathcal{D}(B^{m+1}) \cap \mathcal{D}\left(\sum_{k=0}^{m-1} A^{m-1-k}CB^k\right) \cap \mathcal{D}(CB^m) \end{array} \right\}.$$

故

$$\mathcal{D}(T_1) = \mathcal{D}(T_2).$$

接下来证明当 M_C 是拟 Fredholm 算子时, A 是拟 Fredholm 算子。类似于定理 2.1 的证明可得

$$\text{dis}(A) = \text{dis}(M_C) = d.$$

下面证明 $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{R}(A^d)$ 是 X 的闭子空间。只需证明 $\mathcal{N}(A)$ 且 $\mathcal{R}(A^d)$ 都闭即可。任取 $x_n \in \mathcal{R}(A^d)$ 且 $x_n \rightarrow x$, 则

$$x_n \oplus 0 \in \mathcal{R}(M_C^d) \text{ 且 } x_n \oplus 0 \rightarrow x \oplus 0.$$

由 $\mathcal{R}(M_C^d)$ 闭, 得 $x \oplus 0 \in \mathcal{R}(M_C^d)$ 。进而 $x \in \mathcal{R}(A^d)$, 即 $\mathcal{R}(A^d)$ 闭。由文献[14]中注 1.3.2 可得 $\mathcal{N}(A)$ 是闭的, 故 $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{R}(A^d)$ 是闭的。最后证明 $\mathcal{R}(A) + \mathcal{N}(A^d)$ 是 X 的闭子空间。任取 $x_n \in \mathcal{R}(A) + \mathcal{N}(A^d)$, 使得 $x_n \rightarrow x$, 则对任意 n , 有 $x_n = x_{n,1} + x_{n,2}$ 。其中 $x_{n,1} \in \mathcal{R}(A)$, $x_{n,2} \in \mathcal{N}(A^d)$ 。因此, 由引理 1, 得

$$x_{n,1} \oplus 0 \in \mathcal{R}(M_C), \quad x_{n,2} \oplus 0 \in \mathcal{N}(M_C^d).$$

则

$$x_{n,1} \oplus 0 + x_{n,2} \oplus 0 = x_n \oplus 0 \in \mathcal{R}(M_C) + \mathcal{N}(M_C^d)$$

又由于 $\mathcal{R}(M_C) + \mathcal{N}(M_C^d)$ 闭, 则 $x \oplus 0 \in \mathcal{R}(M_C) + \mathcal{N}(M_C^d)$ 。进而有 $x \oplus 0 = x_1 \oplus 0 + x_2 \oplus 0$, 使得 $x_1 \oplus 0 \in \mathcal{R}(M_C)$, $x_2 \oplus 0 \in \mathcal{N}(M_C^d)$ 。结合 B 单射, 得

$$x_1 \in \mathcal{R}(A), \quad x_2 \in \mathcal{N}(A^d).$$

即 $x = x_1 + x_2 \in \mathcal{R}(A) + \mathcal{N}(A^d)$, 故 $\mathcal{R}(A) + \mathcal{N}(A^d)$ 闭。结论证闭。

定理 2.3 若满足 $\dim \mathcal{N}(B) = \infty$, A^* 是单射, 则存在 C 使得 M_C 是半正则算子当且仅当 B 是半正则算子。

证明 充分性。当 B 是半正则算子, 可得 B^* 是半正则算子。考虑到

$$\dim \mathcal{R}(B^*)^\perp = \dim \mathcal{N}(B) = \infty,$$

则存在一个可逆等距算子 $T: X \rightarrow \mathcal{R}(B^*)^\perp$ 。令

$$C^* = \begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix} : X \rightarrow \begin{pmatrix} \mathcal{R}(B^*)^\perp \\ \mathcal{R}(B^*) \end{pmatrix}.$$

先证 $\mathcal{N}(M_C^*) \subseteq \mathcal{R}((M_C^*)^n)$ 。任取 $x \oplus y \in \mathcal{N}(M_C^*)$, 则

$$\begin{cases} A^*x = 0 \\ C^*x + B^*y = 0. \end{cases}$$

由于 $B^*y \in \mathcal{R}(B^*)$, $C^*x = T^*x \oplus 0 \in \mathcal{R}(B^*)^\perp \oplus 0$, 因此 $C^*x = 0$ 且 $B^*y = 0$ 。因为 T^* 单射, 所以 $x = 0$ 。故

$$\mathcal{N}(M_C^*) \subseteq \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{N}(B^*) \end{pmatrix}.$$

由 B 是半正则算子, 有 $\mathcal{N}(B^*) \subseteq \mathcal{R}((B^*)^n)$ 。进而

$$\mathcal{N}(M_C^*) \subseteq \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{N}(B^*) \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{R}((B^*)^n) \end{pmatrix} \subseteq \mathcal{R}((M_C^*)^n).$$

再证 $\mathcal{R}(M_C^*)$ 闭。任取 $M_C^*(x_n \oplus y_n) \rightarrow (u \oplus v)$, 则

$$\begin{cases} A^*x_n \rightarrow u \\ C^*x_n + B^*y_n \rightarrow v. \end{cases}$$

又因为 $C^*x_n = Tx_n \oplus 0$, $B^*y_n = 0 \oplus B^*y_n$, 所以 $C^*x_n + B^*y_n = Tx_n \oplus B^*y_n$, 进而可得 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列。令 $x_n \rightarrow x_0$, 由 $\mathcal{R}(B^*)$ 闭, 则存在 $y_0 \in X$ 使得

$$B^*y_n \rightarrow B^*y_0,$$

即存在 $x_0 \oplus y_0$ 使得

$$A^*x_0 = u, \quad C^*x_0 + B^*y_0 = v.$$

故 $\mathcal{R}(M_C^*)$ 闭。

必要性。当 A^* 单射时, 我们有

$$0 \oplus y \in \mathcal{R}((M_C^*)^n) \Leftrightarrow x = 0, \quad y \in \mathcal{R}((B^*)^n).$$

事实上, $0 \oplus y \in \mathcal{R}((M_C^*)^n)$, 则存在 $u \oplus v$ 使得

$$(A^*)^n u = 0, \quad \sum_{k=0}^{n-1} (A^{n-1-k} C B^k)^* u + (B^*)^n v = y.$$

由 A^* 单射, 得 $u = 0$, $(B^*)^n v = y$, 即 $y \in \mathcal{R}((B^*)^n)$ 。

现证 $\mathcal{N}(B^*) \subseteq \mathcal{R}((B^*)^n)$ 。设 $y \in \mathcal{N}(B^*)$, 则 $0 \oplus y \in \mathcal{N}(M_C^*)$ 。由 $\mathcal{N}(M_C^*) \subseteq \mathcal{R}((M_C^*)^n)$, 得

$$y \in \mathcal{R}((B^*)^n).$$

下面说明 $\mathcal{R}(B^*)$ 闭。设 $B^*v_n \rightarrow y$, 则 $M_C^*(0 \oplus v_n) \rightarrow 0 \oplus y$ 。考虑 $\mathcal{R}(M_C)$ 闭, 因此

$$0 \oplus y \in \mathcal{R}(M_C^*).$$

由 A^* 单射可知 $y \in \mathcal{R}(B^*)$ 。结论证闭。

推论 2.4 若满足 $\dim \mathcal{N}(A^*) = \infty$, B 是单射, 则存在 C 使得 M_C 是半正则算子当且仅当 A 是半正则

算子。

证明 与定理 3 的证明完全类似。

定理 2.4 A^* 是单射, $\mathcal{R}(A)$ 闭, 则 B 是半正则算子当且仅当对于任意 C 都有 M_C 是半正则算子。

证明 必要性。先证 $\mathcal{N}(M_C^*) \subseteq \mathcal{R}((M_C^*)^n)$ 。设 $x \oplus y \in \mathcal{N}(M_C^*)$, 则

$$\begin{cases} A^*x = 0, \\ C^*x + B^*y = 0. \end{cases}$$

由 A^* 单, 可知 $x = 0$, $y \in \mathcal{N}(B^*)$ 。考虑 B 是半正则算子, 即得 B^* 为半正则算子, 即

$$\mathcal{N}(M_C^*) \subseteq 0 \oplus \mathcal{N}(B^*) \subseteq 0 \oplus \mathcal{R}((B^*)^n) \subseteq \mathcal{R}((M_C^*)^n)。$$

下证 $\mathcal{R}(M_C^*)$ 闭。任取 $M_C^*(u_n \oplus v_n) \rightarrow f \oplus g$, 即

$$\begin{cases} A^*u_n \rightarrow f, \\ C^*u_n + B^*v_n \rightarrow g. \end{cases}$$

由题设知 A^* 下方有界, 因此不妨设 $u_n \rightarrow u_0$, 从而

$$A^*u_n \rightarrow A^*u_0, \quad C^*u_n \rightarrow C^*u_0。$$

再考虑 $\mathcal{R}(B)$ 闭, 即得存在 v_0 使 $B^*v_n \rightarrow B^*v_0$, 即存在 $u_0 \oplus v_0$ 使得

$$A^*u_0 = f, \quad C^*u_0 + B^*v_0 = g。$$

故 $\mathcal{R}(M_C^*)$ 闭。

充分性。先证 $\mathcal{N}(B^*) \subseteq \mathcal{R}((B^*)^n)$ 。设 $y \in \mathcal{N}(B^*)$, 则对于任意 C , 有

$$0 \oplus y \in \mathcal{N}(M_C^*)。$$

又因为 M_C 是半正则算子, 所以 $0 \oplus y \in \mathcal{R}((M_C^*)^n)$ 。由 A^* 单射, 得 $y \in \mathcal{R}((B^*)^n)$ 。

下证 $\mathcal{R}(B^*)$ 闭。任意 $B^*v_n \rightarrow g$, 则 $M_C^*(0 \oplus v_n) \rightarrow (0 \oplus g)$ 。由于 $\mathcal{R}(M_C^*)$ 闭, 从而

$$(0 \oplus g) \in \mathcal{R}(M_C^*),$$

即 $y \in \mathcal{R}(B^*)$ 。结论证闭。

注 4 下面这个例子说明了当 A, B 是半正则算子时, 并不是对任意的 C 都有 M_C 是半正则算子。

例 2 $A, B, C \in \mathcal{L}(l^2)$, 定义如下:

$$A(x_1, x_2, \cdots) = (0, x_1, x_2, \cdots)$$

$$B(x_1, x_2, \cdots) = (x_2, x_3, x_4, \cdots)$$

$$C(x_1, x_2, \cdots) = (0, x_1, x_2, \cdots)$$

经计算易得 A 和 B 为半正则算子, 可以断言 M_C 不是半正则算子。事实上, 取

$$x_0 = (-1, 0, 0, \cdots), \quad y_0 = (1, 0, 0, \cdots),$$

经计算, $x_0 \oplus y_0 \in \mathcal{N}(M_C)$, 但 $x_0 \oplus y_0 \notin \mathcal{R}(M_C)$ 。事实上, 任意 $u \oplus v$ 有 $M_C(u \oplus v)$ 的第一分量为 0, 但 x_0 的第一分量不为 0, 因此 M_C 不是半正则算子。

定理 2.5 A^* 单射时, 若 A, B 是半正则算子, 则对于任意 C 都有 M_C 是半正则算子。

证明 设 $x \oplus y \in \mathcal{N}(M_C^*)$, 则 $A^*x = 0, C^*x + B^*y = 0$ 。又因为 A^* 单射, 则 $x = 0, y \in \mathcal{N}(B^*)$ 。由于 B^* 为半正则算子, 故

$$\mathcal{N}(M_C^*) \subseteq 0 \oplus \mathcal{N}(B^*) \subseteq 0 \oplus \mathcal{R}((B^*)^n) \subseteq \mathcal{R}((M_C^*)^n).$$

下证 $\mathcal{R}(M_C^*)$ 闭。任取 $M_C^*(u_n \oplus v_n) \rightarrow f \oplus g$, 即

$$\begin{cases} A^*u_n \rightarrow f, \\ C^*u_n + B^*v_n \rightarrow g. \end{cases}$$

由于 A^* 下方有界, 所以 $u_n \rightarrow (A^*)^{-1}f$, 从而 $C^*u_n \rightarrow C^*(A^*)^{-1}f$ 。故 $\{B^*v_n\}$ 为收敛列。由于 $\mathcal{R}(B^*)$ 闭, 则存在 v_0 使得 $B^*v_n \rightarrow B^*v_0$, 即存在 $(A^*)^{-1}f \oplus v_0$ 使得

$$A^*(A^*)^{-1}f = f, \quad C^*(A^*)^{-1}f + B^*v_0 = g.$$

故 $\mathcal{R}(M_C^*)$ 闭。结论得证。

基金项目

国家自然科学基金项目(11561048, 11761029), 内蒙古自然科学基金项目(2023MS01011, 2022ZD05)。

参考文献

- [1] Kato, T. (1958) Perturbation Theory for Nullity, Deficiency and Other Quantities of Linear Operators. *Journal d'Analyse Mathématique*, **6**, 261-322. <https://doi.org/10.1007/bf02790238>
- [2] Labrousse, J. (1980) Les operateurs quasi Fredholm: Une generalisation des operateurs semi Fredholm. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, **29**, 161-258. <https://doi.org/10.1007/bf02849344>
- [3] Mbekhta, M. (1996) On the Axiomatic Theory of Spectrum II. *Studia Mathematica*, **119**, 129-147. <https://doi.org/10.4064/sm-119-2-129-147>
- [4] Apostol, C. (1985) The Reduced Minimum Modulus. *Michigan Mathematical Journal*, **32**, 279-294. <https://doi.org/10.1307/mmj/1029003239>
- [5] Mbekhta, M. and Ouahab, A. (1994) Opérateur srégulier dans un espace de Banach et théorie spectrale. *Acta Scientiarum Mathematicarum*, **59**, 525-544.
- [6] Barraa, M. and Boumazgour, M. (2003) On the Perturbations of Spectra of Upper Triangular Operator Matrices. *Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics*, 17.
- [7] García, O., Causil, D., Sanabria, J. and Carpintero, C. (2018) New Decompositions for the Classes of Quasi-Fredholm and Semi b -Weyl Operators. *Linear and Multilinear Algebra*, **68**, 750-763. <https://doi.org/10.1080/03081087.2018.1517718>
- [8] Gupta, A. and Kumar, A. (2020) Quasi-Fredholm Spectrum and Compact Perturbations. *Complex Analysis and Operator Theory*, **14**, 1-9. <https://doi.org/10.1007/s11785-020-00981-9>
- [9] Aiena, P. (2004) Fredholm and Local Spectral Theory, with Applications to Multipliers. Kluwer Academic Publishers, 1-452.
- [10] Benharrat, M. and Messirdi, B. (2014) Relationship between the Essential Quasi-Fredholm Spectrum and the Closed-range Spectrum. *Analele Universității Oradea Fasc. Matematica*, **21**, 5-12.
- [11] Benharrat, M., Ammar, A., Jeribi, A., et al. (2014) On the Kato, Semi-Regular and Essentially Semi-Regular Spectra. *Functional Analysis, Approximation and Computation*, **6**, 9-22.
- [12] El, O., Ech-Cherif, E. and Karmouni, M. (2022) Quasi-Fredholm Spectrum for Operator Matrices. *Filomat*, **36**, 4893-4902. <https://doi.org/10.2298/fil2214893e>
- [13] Aiena, P. (2018) Fredholm and Local Spectral Theory II, With Application to Weyl-Type Theorems. Springer, 1-552.
- [14] Benharrat, M. and Messirdi, B. (2011) On the Generalized Kato Spectrum. *Serdica Mathematical Journal*, **37**, 283-294.
- [15] 阿拉坦仓, 吴德玉, 黄俊杰, 侯国林. 无穷维 Hamilton 算子谱分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2023: 1-349.
- [16] 吴德玉, 阿拉坦仓. 分块算子矩阵谱理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2013: 1-230.