Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(4), 162-170
Published Online April 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.154119

Hans汉斯

R^3上两类齐次多项式的Hessian度量

唐清艳

重庆理工大学理学院，重庆

收稿日期：2025年3月10日；录用日期：2025年4月2日；发布日期：2025年4月17日

摘 要

本文主要对Hessian度量诱导的截面曲率展开分析。首先阐述Hessian度量和与之相关的Christoffor符号和曲率张量公式。接着介绍当定义域U为锥时，齐次函数的相关概念，以及Clebsch covariant S(*f*)和截面曲率的联系。利用R^3中开子集U和超平面M = {*f* = 1}相切2-平面上一点处的截面曲率可由S(*f*)和 *Hessian* 行列式H(*f*)表示，其中*f*为R^3上的齐次多项式，得到不变量S(*f*)为零与Witten-Dijkgraaf-Verlinde-Verlinde (WDVV)方程等价的条件，即*f*可以表示为两种特殊的形式。

关键词

Hessian度量，截面曲率，齐次函数，Clebsch Covariant，WDVV方程

The Hessian Metric of Two Classes of Homogeneous Polynomials on R^3

Qingyan Tang

School of Science, Chongqing University of Technology, Chongqing

Received: Mar. 10th, 2025; accepted: Apr. 2nd, 2025; published: Apr. 17th, 2025

Abstract

This paper primarily analyzes the sectional curvature induced by the Hessian metric. It begins by detailing the Hessian metric and its associated Christoffel symbols and curvature tensor formulas. It then introduces the concept of homogeneous functions when the domain *U* is a cone, as well as the relationship between the Clebsch covariant *S*(*f*) and the sectional curvature. Using an open subset *U* in R^3 and a hypersurface *M* = {*f* = 1}, the sectional curvature at a point on a 2-plane tangent to *M* can be expressed in terms of *S*(*f*) and the Hessian matrix *H*(*f*), where *f* is a homogeneous polynomial on R^3. The condition for the invariant *S*(*f*) to be zero is equivalent to the Witten-Dijkgraaf-Verlinde-Verlinde (WDVV) equations, which implies that *f* can be represented in two specific forms.

文章引用: 唐清艳. R^3上两类齐次多项式的 Hessian 度量[J]. 理论数学, 2025, 15(4): 162-170.
DOI: 10.12677/pm.2025.154119

Keywords

Hessian Metric, Sectional Curvature, Homogeneous Function, Clebsch Covariant, WDVV Equation

1. 引言

在微分几何领域，*Hessian* 度量提供了一个研究流形曲率性质的全新视角。与传统的黎曼度量相比，*Hessian* 度量具有更加丰富的几何结构和性质。通过研究 *Hessian* 度量的截面曲率，可以深入了解流形的局部和整体几何特性，如流形的曲率分布、测地线以及流形的拓扑结构等。这些研究不仅有助于推动微分几何理论的发展，还可以为其他相关领域提供有力的数学工具。在多元微积分与几何分析中，标量场的局部几何性质往往蕴含于其高阶导数信息中。若一阶导数(梯度)揭示了场的瞬时变化方向与速率，那么二阶导数则进一步刻画了场的“弯曲”特性——这正是 *Hessian* 矩阵的核心意义。作为由标量函数二阶偏导数构成的对称方阵，*Hessian* 矩阵不仅蕴含了函数在各个方向上的曲率信息，还为极值判定、优化算法设计以及物理建模等领域提供了关键工具。*Hessian* 矩阵是标量场的二阶偏导数矩阵，能够有效刻画场的局部几何性质，在实向量空间的开子集上给定一个光滑函数 f，可通过 f 的二阶偏导数定义相关的 *Hessian* 度量。特别地，当 f 是次数不低于二次的齐次多项式时，对其 *Hessian* 矩阵及相应度量的研究具有重要意义。

$WDVV$ $(Witten-Dijkgraaf-Verlinde-Verlinde)$ 方程与各类可积系统密切相关，这种联系为研究可积系统的性质和求解方法提供了新的途径，也为 $WDVV$ 方程的求解和应用提供了更广阔的视角。*Dubrovin* 的 *Frobenius* 流形理论[1]对满足规范化的齐次性条件的 $WDVV$ 方程的解进行了几何描述，在其中函数 F 被称为 $Gromov-Witten$ 势，且张量 F_{ijk} 被称为拓扑场论中的 $Gromov-Witten$ 不变量或 *YuKawa coupling*，利用势函数得到 $WDVV$ 方程的定义，其相关研究参见文献[1] [2]。在经典微分几何中，$WDVV$ 方程给出了黎曼流形的切空间上具有代数结构的条件，$WDVV$ 方程的解与 *Frobenius* 流形上的平坦度量和势函数等结构存在对应关系。在文献[3]中，研究了平坦坐标系下的 $WDVV$ 方程等价于流形上乘积结构的结合律，同时该乘积结构的结合律成立等价它的底流形上截面曲率为零，即是否可以观察到在该结构的切丛上的截面曲率为零当且仅当 $WDVV$ 方程成立。如文献[4]中，在研究*Kähler*模空间的截面曲率问题时，涉及到齐次多项式定义的 *Hessian* 度量，*Hessian* 曲率相关问题与弦理论中的 $WDVV$ 方程以及经典不变量理论中的 *Clebsch covariant* $S(f)$(后面将其称为不变量)等存在联系。

本文考虑三维欧氏空间 R^3 的一个开子集 U，及 U 上定义的光滑超曲面 $M=\{f=1\}$，设 $f:U\to\mathbb{R}$ 为最高为四次的齐次多项式，并具有特殊形式 $f(x,y,z)=\alpha(x,y)+\beta(z)$，通过 f 的二阶偏导数可构造伪黎曼 *Hessian* 度量 $g_{ij}=-\frac{1}{d(d-1)}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$。分析该度量的局部几何性质，研究其曲率特性，利用不变量 $S(f)$ 和 *Hessian* 行列式 $H(f)$ 可以表示 U 和 M 在相切 2-平面上一点处的截面曲率 K_U 和 K_M，在该度量平坦下，得到不变量 $S(f)$ 为零等价 $WDVV$ 方程，f 可以表示两种特殊的形式，最后用一个具体的例子来表达该结果。

2. 预备知识

设 f 是 R^n 中某个区域上的光滑函数，并定义 *Hessian* 度量 $g_{ij}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$，并假设 $\det(g_{ij})$ 不为零，且 g_{ij}

是一个伪黎曼度量(参考 O. Neill [5]的书)，Hessian 度量的曲率张量公式是已知的，利用下面公式是计算伪黎曼度量的简单方法，如给出的第一类 *Christoffor* 符号和曲率张量[6]，

$$\Gamma_{ijk}=\frac{1}{2}\left(g_{ij,k}+g_{jk,i}-g_{ik,j}\right) \tag{1}$$

$$R_{ijkl}=-\frac{1}{2}\left(g_{ik,jl}+g_{jl,ik}-g_{il,jk}-g_{jk,il}\right)-\sum_{p,q}g^{pq}\left(\Gamma_{jpl}\Gamma_{iqk}-\Gamma_{ipl}\Gamma_{jqk}\right), \tag{2}$$

其中

$$g_{ij,k}=\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k},g^{ij}=\left(g_{ij}\right)^{-1},$$

由 *Hessian* 度量则可以得到

$$\Gamma_{ijk}=\frac{f_{ijk}}{2}$$

和

$$R_{ijkl}=-\frac{1}{4}\sum_{p,q}g^{pq}\left(f_{ilp}f_{ikq}-f_{ilp}f_{jkq}\right), \tag{3}$$

则可以得到由 $\frac{\partial}{\partial x_1}$ 和 $\frac{\partial}{\partial x_2}$ 张成的 2-平面的截面曲率为 $\frac{R_{1212}}{\left(g_{11}g_{22}-g_{12}{}^2\right)}$。

即

$$\sum_{p,q}g^{pq}\left(f_{ilp}f_{ikq}-f_{ilp}f_{jkq}\right)=0 \tag{4}$$

同时，该等式看起来和 *WDVV* 方程等价。

定义 2.1 $(WDVV)$ [7]：设 $F=F\left(x_1,\cdots,x_n\right)$ 是一个光滑函数，其中 x_i 是局部坐标，偏导数张量

$$F_{ijk}=\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k},$$

则 *WDVV* 方程为：

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k}g^{kl}\frac{\partial^2 F}{\partial x_l\partial x_m\partial x_n}=\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_m\partial x_k}g^{kl}\frac{\partial^2 F}{\partial x_l\partial x_j\partial x_n},$$

其中 g^{kl} 是度量矩阵的逆矩阵(通常是对称且非退化的)。

注：在后面无特殊说明，*Hessian* 度量为 $g_{ij}=-\frac{1}{d\left(d-1\right)}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$，此时曲率张量根据公式(3)为

$$R_{ijkl}=-\frac{1}{4d^2\left(d-1\right)^2}\sum_{p,q}g^{pq}\left(f_{ilp}f_{ikq}-f_{ilp}f_{jkq}\right)。 \tag{5}$$

2.1. U 在 R^n 上的截面曲率

定义 2.2：设 R^n 中定义域 U 是一个锥(也就是说，U 在正实数乘法下是保持的)，设 f 是阶次 $d>1$ 的齐次函数，且在 U 中 $f>0$，即

$$f\left(\lambda x\right)=\lambda^d f\left(x\right),$$

其中 $\lambda>0$。

定理 2.3 (欧拉定理)：设函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在定义域内可微，若 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 k 次齐次函数，则

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = kf(x_1,x_2,\cdots,x_n)\text{。}$$

证明：令 $x_i = ty_i$，$i=1,2,\cdots,n$，定义 $F(t)=f(ty_1,ty_2,\cdots,ty_n)=t^k f(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，对 t 求导，根据复合函数求导法则可得

$$F'(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(ty_1,ty_2,\cdots,ty_n)}{\partial(ty_i)}\cdot y_i\text{，}$$

又因为 $F(t)=t^k f(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，对其求导得 $F'(t)=kt^{k-1}f(y_1,y_2,\cdots,y_n)$。此时 $t=1$，$x_i=y_i$，则有

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial x_i} = kf(x_1,x_2,\cdots,x_n)\text{，}$$

即证。

定理 2.4：若 $g_{ij}=-\frac{1}{d(d-1)}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ 为开集 U 上的伪黎曼度量，在超曲面 $M=\{f=1\}$ 上是非退化的，则映射 $\varphi(t,x):=t^{\frac{2}{d}}x$ 给出了扭曲积(warped product) $\frac{4}{d^2}\left((-1)R^{>0}\times_t\left(\frac{d^2}{4}\right)M\right)$ 到 U 的等距。

引理 2.5 [4]：设 x 为超曲面 M 在 U 中的一个点，P 是 M 在 x 处的切空间中的非退化 2-平面，c 为正实数，$K_M(p)$ 为 M 在 P 上的截面曲率，则 U 在点 cx 和 2-平面 cP 上的截面曲率为

$$K_U(cP)=\frac{1}{c^d}\left(K_M(P)+\frac{d^2}{4}\right)\text{。} \tag{6}$$

2.2. Clebsch Covariant 和 Hessian 度量的截面曲率

Wilson [4]给出了一个公式表示 R^3 上三元形式 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的 *Hessian* 度量的曲率，其关键是平面三次曲线的 *Aronhold* 不变量 S。*Clebsch* 观察到，变量个数固定的情况下，对于给定次数的形式，任何不变量都以自然的方式扩展到任何较大次数的形式，这个过程将 *Aronhold* 不变量 S 转化为 *Clebsch covariant* $S(f)$ [8] [9]。

对于任意三元形式

$$f=a_3x_3^3+3(a_2x_1-b_2x_2)x_3^2+3\left(a_1x_1^2+2b_1x_1x_2+c_1x_2^2\right)x_3+\left(a_0x_1^3+3b_0x_1^2x_2+3c_0x_1x_2^2+d_0x_2^3\right) \tag{7}$$

Aronhold 不变量 S 为

$$\begin{aligned}S=&-\left(a_0a_2-a_1^2\right)c_1^2+\left(a_0a_3-a_1a_2\right)c_0c_1-\left(a_1a_3-a_2^2\right)c_0^2\\&+b_0b_1\left(3a_2c_1+a_3c_0\right)-\left(b_0b_2+2b_1^2\right)\left(a_1c_1+a_2c_0\right)\\&-b_0^2a_3c_1+b_1b_2\left(a_0c_1+3a_1c_0\right)-b_2^2a_0c_0+\left(b_0b_2-b_1^2\right)^2\\&+d_0\left[b_0\left(a_1a_3-a_2^2\right)-b_1\left(a_0a_3-a_1a_2\right)+b_2\left(a_0a_2-a_1^2\right)\right]\end{aligned} \tag{8}$$

其中不变量 $S(f)$ 可由上式中 *Aronhold* 不变量 S 相同的公式定义，a_i,b_i,c_i,d_i 定义为

$$a_3=f_{333}\quad a_2=f_{133}\quad a_1=f_{113}\quad a_0=f_{111}$$

$$b_2=f_{233}\quad b_1=f_{123}\quad b_0=f_{112}$$

$$c_1 = f_{223} \quad c_0 = f_{122}$$
$$d_0 = f_{222} \tag{9}$$

其中 f_{ijk} 表示的是 f 对变量 x_i, x_j, x_k 的三阶导数。

注：在这里三元形式 f 的不变量 $S(f)$ 是 *Aronhold* 不变量 S 的 $2^4 3^4$ 倍，因为该倍数是一个常数，在后续讨论中其对相关内容影响并不明显，可以暂时不考虑。

定理 2.6 [10]：设 f 是一个在 R^3 的开子集 U 上的光滑齐次函数，其次数 $d > 2$，若 f 的 *Hessian* 行列式在 U 上是非零的，可定义 U 上的伪黎曼 *Hessian* 度量 $g_{ij} = -\frac{1}{d(d-1)} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$，令超曲面 $M = \{f = 1\}$，则可以用 *Hessian* 行列式 $H(f)$ 和不变量 $S(f)$ 表示 U 与 M 相切的 2-平面上一点处的截面曲率，即

$$K_U = \frac{d^2(d-1)^2 S(f) f}{4(d-2)^2 H(f)^2} \tag{10}$$

曲面 M 在同一点处的截面曲率为

$$K_M = -\frac{d^2}{4} + \frac{d^2(d-1)^2 S(f) f}{4(d-2)^2 H(f)^2}\text{。} \tag{11}$$

注：第二个公式可以由第一个公式推导出来，所以只需要证明第一个公式即可。又因为考虑 M 上的一点，且 $f = 1$，所以公式中 f 在计算时不会有很大影响，即第一个公式给出了，更一般地，U 在任意水平集 $f = \lambda$ 的切平面中一点的截面曲率，同时通过定义 1 和线性变换得到 $H(f)$ 的值。

在其证明过程中，有

$$R_{1212} = \frac{1}{4d^2(d-1)^2}\left(f_{111} f_{122} - f_{112}{}^2 + f_{112} f_{222} - f_{122}{}^2 + d^2(d-1)^2(d-2)^2\right)$$

和

$$S(f) = d^2(d-1)^2(d-2)^2\left(f_{111} f_{122} - f_{112}{}^2 + f_{112} f_{222} - f_{122}{}^2 + d^2(d-1)^2(d-2)^2\right),$$

可以看出

$$R_{1212} = \frac{S(f)}{4d^4(d-1)^4(d-2)^2},$$

所以，当 $S(f) = 0$ 时，该度量曲率 $R = 0$，且 $K_U = 0$。

命题 2.7：U 上的伪黎曼 *Hessian* 度量使得超曲面 $M = \{f = 1\}$ 具有恒定的截面曲率 $-\frac{d^2}{4}$，当且仅当该度量是平坦的。

证明：由引理 2.5 和定理 2.6 可知，当 $K_M = -\frac{d^2}{4}$ 时，即 $K_U = 0$，可以得到该度量的黎曼曲率张量为零，即得到该度量平坦。

反之亦然。

若想要开集 U 的截面曲率 K_U 为零，则只需要不变量 $S(f)$ 为零。那么，齐次函数 f 满足什么条件才能确保 $S(f)$ 为零，下面将通过相应的定理来解答这一问题。

定理 2.8 [10]：设 f 是 $\mathbb{C}$ 上的一个三元形式，那么在某些线性坐标系中 f 可以表示为 $\alpha(x,y)+\beta(z)$ 形式集的闭包，当且仅当在某些线性坐标系中可以写成 $\alpha(x,y)+\beta(z)$ 或 $\alpha(x,y)+\beta(x)z$ 的形式。

定理 2.9 [10]：$\mathbb{C}$ 上次数最多为 4 的齐次函数 f 的不变量 $S(f)$ 为零，当且仅当齐次函数 f 在某些线性坐标系中可以表示为 $\alpha(x,y)+\beta(z)$ 形式集的闭包。

3. 主要结果

定理 2.8 和定理 2.9 中说明齐次多项式可以在某些线性坐标中可以表示为另一种形式，但是在找合适的线性坐标系时比较复杂，也有点难以理解，所以接下来用另一个定理和例子解释在某些线性变换中可以转换原本的表达式。

定理 3.1 [11]：设 $M=\{f=1\}\subset R^{n+1}$ 是一个次数 $d\ge 3$ 的 n 维 $n\ge 1$ 连通广义射影特殊实 $(GPSR)$ 流形。那么对于每个 $p=\begin{pmatrix}p_x\\p_y\end{pmatrix}\in\mathcal{F}$，在 R^{n+1} 上存在一个由 $A(p)\in GL(n+1)$ 所确定的线性坐标变换，使得：

(1) $(f\circ A(p))\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x^d-x^{d-2}\langle y,y\rangle+\sum_{k=3}^{d}x^{d-k}P_k(y)$，

(2) $A(p)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=p$，

其中 $y=(y_1,\dots,y_n)^T$ 表示 R^n 的标准线性坐标，$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ 表示 $R^{n+1}\cong R\times R^n$ 的相应坐标，$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 表示点 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\in R^{n+1}$，并且 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示由 $y-$ 坐标诱导的 R^n 上的标准欧几里得内积，$P_k(y)$ 是只含有 y 的 k 次多项式。矩阵

$$\begin{aligned}A(p)&:=\left(\begin{array}{c|c}p_x & -\left.\dfrac{\partial yf}{\partial xf}\right|_p\circ E(p)\\ \hline p_y & E(p)\end{array}\right)\\ &=\left(\begin{array}{c|c}p_x & -\left.\dfrac{\partial yf}{\partial xf}\right|_p\\ \hline p_y & I\end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c|c}1 & \\ \hline & E(p)\end{array}\right)\end{aligned},\tag{12}$$

其中 $-\dfrac{\partial yf}{\partial xf}=\left(-\dfrac{\partial y_1 f}{\partial xf},\cdots,-\dfrac{\partial y_n f}{\partial xf}\right)$，$\tilde{A}\in GL(n+1)$ 且

$$\tilde{A}:=\left(\begin{array}{c|c}p_x & -\left.\dfrac{\partial yf}{\partial xf}\right|_p\\ \hline p_y & I\end{array}\right),\tag{13}$$

可以用一种方式选取 $E(p)\in GL(n)$，如

$$-\frac{1}{2}\partial^2 f_p\left(\begin{pmatrix}-\dfrac{\partial yf(E(p)y)}{\partial xf}\\ E(p)y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\dfrac{\partial yf(E(p)y)}{\partial xf}\\ E(p)y\end{pmatrix}\right)=\langle y,y\rangle,\tag{14}$$

同时 $\det A(p)=\dfrac{d}{\partial xf_p}\det E(p)\neq 0$。

例 3.2： $M=\left\{f=x\left(xy-z^2-w^2\right)=1,x>0\right\}$。

解：不妨取点 $p(1,1,0,0)^T$，利用公式 (12) 和 (13)，可得矩阵

$$A(p)=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0\\ 1 & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

即得到标准式为

$$f\left(A(p)\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)=x^3-x\left(y^2+z^2\right)+\frac{2}{3\sqrt{3}}y^3-\frac{1}{2\sqrt{3}}yz^2。$$

最后得到下面这个定理。

定理 3.3：若 $M=\{f=1\}$ 为超曲面，设 f 是 R^3 中开子集 U 上的齐次多项式，其次数 $1<d\le 4$，且 f 的 *Hessian* 行列式在 U 上非零，考虑 U 上的伪黎曼 *Hessian* 度量 $g_{ij}=-\frac{1}{d(d-1)}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}$ 平坦。则满足下面两种情况之一：

(1) 若 $f=\alpha(x,y)+\beta(x,z)$，$a_1a_3=a_2^2$ 或 $d_0b_0=c_0^2$，则 $S(f)=\left(a_1a_3-a_2^2\right)+\left(d_0b_0-c_0^2\right)=0$；

(2) 若 $f=\alpha(x,z)+\beta(x,z)y$，$b_0b_2=b_1^2$，则 $S(f)=\left(b_0b_2-b_1^2\right)^2=0$，其中 α,β 是关于 x,y 和 z 的多项式。

证明：f_{ijk} 表示的是 f 对变量 x，y，z 的三阶导数，其中 $i,j,k\in\{1,2,3\}$，f_1 表示对 x 求偏导，f_2 表示对 y 求偏导，f_3 表示对 z 求偏导。

当 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0$ 时，由公式 (9) 可知，$b_1=f_{123}$，$c_1=f_{223}$，$b_2=f_{233}$ 为零。将 b_1,b_2,c_1 带入公式 (8)，得到

$$S(f)=\left(a_1a_3-a_2^2\right)+\left(d_0b_0-c_0^2\right)。$$

因此，要想得到

$$S(f)=0,$$

当且仅当

$$a_1a_3=a_2^2\text{ 或 }d_0b_0=c_0^2。$$

因为有 $f=\alpha(x,y)+\beta(x,z)$，其中导数 f_3 等价于 β_3。不妨假设 $a_1a_3=a_2^2$，即 $f_{113}f_{333}=f_{133}^2$，可得到 β_3 的 *Hessian* 行列式为零。如果二元齐次多项式的 Hessian 行列式为零，则该多项式可表示为一个线性形式的幂[12]，所以可以写出 $\beta_3=(ax+bz)^{d-1},a,b\in\mathbb{R}$。

如果 $b=0$，那么 β_3 是 x^{d-1} 的常数倍，那么 β 是 $x^{d-1}z$ 和 x^d 的线性组合。此时将 x^d 带入 α 中，$\exists c\in\mathbb{R}$，齐次多项式 f 可以写成 $\alpha(x,y)+cx^{d-1}z$ 形式，由定理 2.8 可知，其在 $\alpha(x,y)+\beta(z)$ 形式集的闭包中，满足条件。

如果 $b\ne 0$，且 $\beta_3=(ax+bz)^{d-1}$，则 β 本身就是 $(ax+bz)^d z$ 和 x^d 的线性组合，此时将 x^d 带入 α 中，$\exists c\in\mathbb{R}$，将齐次多项式 f 写成 $\alpha(x,y)+c(ax+bz)^d$ 形式，可以通过坐标变换，从而得到我们所需要的 $\alpha(x,y)+\beta(z)$ 形式。

当$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$时，由公式$(9)$可知，$c_0=f_{122}$，$c_1=f_{223}$，$d_0=f_{222}$为零，再将$c_0,c_1,d_0$带入公式$(8)$，得到

$$S(f)=\left(b_0b_2-b_1^2\right)^2。$$

因此，要想得到

$$S(f)=0，$$

当且仅当

$$b_0b_2=b_1^2。$$

同理，由$f=\alpha(x,z)+\beta(x,z)y$可知，其中导数$f_2$等价于$\beta(x,z)$。若将$x$和$z$线性变换，$\beta$从关于$x$和$z$线性组合变换为$x$的形式，则$\exists c\in R$，齐次多项式$f$可以写成$\alpha(x,z)+cx^{d-1}y$形式。其在定理 2.8 的形式集闭包中。

当不变量$S(f)$为零，由定理 2.6 和命题 2.7 可知，此时超曲面$M=\{f=1\}$具有恒定的截面曲率$-\dfrac{d^2}{4}$，此时的伪黎曼 *Hessian* 度量平坦，即该度量的黎曼张量为零，满足公式(4)，等价于 *WDVV* 方程成立。当齐次多项式可以写成$\alpha(x,y)+\beta(x,z)$和$\alpha(x,z)+\beta(x,z)y$形式，由定理 2.9 可以得到该多项式的次数最高为 4 次。

接下来用一个例子，更加清楚的表现定理。

例 3.4：$f=x^4+x^3y+\dfrac{3}{2}x^2y^2+xy^3+\dfrac{1}{4}y^4+x^3z+\dfrac{3}{2}x^2z^2+xz^3+\dfrac{1}{4}z^4$。

解：先得

$$f_1=4x^3+3x^2y+3xy^2+y^3+3x^2z+3xz^2+z^3，$$

$$f_2=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3，$$

$$f_3=x^3+3x^2z+3xz^2+z^3，$$

再得

$$f_{11}=12x^2+6xy+3y^2+6xz+3z^2，\quad f_{12}=3x^2+6xy+3y^2，$$

$$f_{13}=3x^2+6xz+3z^2，\quad f_{21}=3x^2+6xy+3y^2，$$

$$f_{22}=3x^2+6xy+3y^2，\quad f_{23}=0，\quad f_{31}=3x^2+6xz+3z^2，$$

$$f_{32}=0，\quad f_{33}=3x^2+6xz+3z^2，$$

且f的 *Hessian* 矩阵为

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}=\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13}\\ f_{21} & f_{22} & f_{23}\\ f_{31} & f_{32} & f_{33}\end{pmatrix},$$

则 *Hessian* 行列式为

$$H(f)=6x^2\left(3x^2+6xy+3y^2\right)\left(3x^2+6xz+3z^2\right),$$

即 *Hessian* 行列式不为零当且仅当$\mathrm{x}\neq 0$，$\mathrm{x}\neq -y$且$\mathrm{x}\neq -z$，其中满足$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0$，此时计算到$b_1=f_{123}=0$，

$c_1 = f_{223} = 0$， $b_2 = f_{233} = 0$。由公式(8)，可得

$$S(f) = \left(a_1 a_3 - a_2^2\right) + \left(d_0 b_0 - c_0^2\right),$$

同时计算得到 $a_1 = f_{113} = 6x + 6z$， $a_2 = f_{133} = 6x + 6z$， $a_3 = f_{333} = 6x + 6z$，
即可得 $a_1 a_3 = a_2^2$，推出 $S(f) = 0$。

同理，还可计算 d_0， c_0， b_0，该齐次函数 f 同样可以得到不变量 $S(f)$ 为零。

那么超曲面 M 的截面曲率为 $K_M = -\dfrac{d^2}{4}$，此时伪黎曼 *Hessian* 度量 g_{ij} 的黎曼曲率张量为零，则该情况下不变量 $S(f)$ 为零等价于 *WDVV* 方程。

4. 总结

当齐次多项式 f 可以写成 $\alpha(x,y)+\beta(x,z)$ 和 $\alpha(x,z)+\beta(x,z)y$ 两种形式时， R^3 中开子集 U 和超曲面 $M=\{f=1\}$ 相切 2-平面上一点处的截面曲率分别为 K_U 和 K_M，可以由不变量 $S(f)$ 和行列式 $H(f)$ 表示，且存在某点处的不变量 $S(f)$ 为零和行列式 $H(f)$ 不为零，使得给定的伪黎曼 *Hessian* 度量 g_{ij} 平坦，得到定理 3.1。又利用命题 2.7，此时超曲面 M 在该点处的截面曲率为 $-\dfrac{d^2}{4}$，等价该度量平坦，再利用公式(4)，得到不变量 $S(f)$ 为零等价于 *WDVV* 方程。在后面我们还可以研究一下对于不变量 $S(f)$ 在 R^3 为零的条件能否推到 R^4 上。

参考文献

[1] Dubrovin, B. (1996) Geometry of 2D Topological Field Theories. In: *Lecture Notes in Mathematics*, Springer, 120-348. https://doi.org/10.1007/bfb0094793

[2] Dubrovin, B. (1999) Painlevé Transcendents in Two-Dimensional Topological Field Theory. In: *The Painlevé Property*, Springer, 287-412. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1532-5_6

[3] Liu, K., Xu, H. and Zhi, Y. (2021) Affine Geometry and Frobenius Algebra.

[4] Wilson, P. (2004) Sectional curvatures of Kähler moduli. *Mathematische Annalen*, **330**, 631-664. https://doi.org/10.1007/s00208-004-0563-9

[5] O'Neill, B. (1983) Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity. Academic Press.

[6] Alexander, S. (1978) Book Review: A Comprehensive Introduction to Differential Geometry. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **84**, 27-33. https://doi.org/10.1090/s0002-9904-1978-14399-7

[7] Jiang, R., Tavakoli, J., and Zhao, Y. (2020) Information Geometry and Frobenius Algebra.

[8] Clebsch, A. (1861) Über Curven vierter Ordnung. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **59**, 125-145.

[9] Dolgachev, I. and Kanev, V. (1993) Polar Covariants of Plane Cubics and Quartics. *Advances in Mathematics*, **98**, 216-301. https://doi.org/10.1006/aima.1993.1016

[10] Totaro, B. (2004) The Curvature of a Hessian Metric. *International Journal of Mathematics*, **15**, 369-391. https://doi.org/10.1142/s0129167x04002338

[11] Lindemann, D. (2023) Properties of the Moduli Set of Complete Connected Projective Special Real Manifolds. *Mathematische Zeitschrift*, **303**, Article No. 37. https://doi.org/10.1007/s00209-022-03184-4

[12] Olver, P.J. (1999) Classical Invariant Theory. Cambridge University Press, 26-30.