Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(4), 171-177
Published Online April 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.154120

Hans汉斯

饱和控制输入下的有限时间稳定问题

张鸿飞

上海理工大学理学院，上海

收稿日期：2025年3月1日；录用日期：2025年3月17日；发布日期：2025年4月17日

摘　要

本文针对饱和输入约束下的一类非线性动力系统的有限时间稳定问题进行研究。基于李雅普诺夫函数理论，给出了实现有限时间稳定的充分条件，得到了有限时间稳定平衡点，估计了系统状态在饱和约束下的收敛速率以及稳定时间边界。其次，结合线性矩阵不等式理论，通过假设李雅普诺夫函数，设计了满足饱和约束的控制增益矩阵与反馈增益矩阵。

关键词

饱和，动力系统，有限时间稳定，线性矩阵不等式

Finite Time Stability under Saturated Control Input

Hongfei Zhang

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Mar. 1st, 2025; accepted: Mar. 17th, 2025; published: Apr. 17th, 2025

Abstract

This article focuses on the finite-time stability problem of a class of nonlinear systems under actuator saturation constraints. Based on the theory of Lyapunov function, sufficient conditions for achieving finite time stability are given, and the finite time stable equilibrium point is obtained. The convergence rate and stable time boundary of the system state under saturation constraints are estimated. Secondly, based on the theory of linear matrix inequality, a control gain matrix and feedback gain matrix satisfying saturation constraints were designed by assuming a Lyapunov function.

文章引用: 张鸿飞. 饱和控制输入下的有限时间稳定问题[J]. 理论数学, 2025, 15(4): 171-177.
DOI: 10.12677/pm.2025.154120

Keywords

Actuator Saturation, Nonlinear System, Finite Time Stability, Linear Matrix Inequality

1. 引言

有限时间稳定的概念最早由[1]提出，人们在研究渐近稳定性问题时注意到，在有限时间内的框架下，有些系统沿它的轨迹收敛到平衡点[2] [3]。具体来讲，有限时间稳定是指，如果给到系统初值的界限，那么系统状态在有限时间区间内不会超过某个界限。近年来，有限时间稳定问题仍受到广泛关注，例如，[4]使用李雅普诺夫－拉兹密辛方法研究了非线性时滞系统的有限时间稳定性，给出了李雅普诺夫条件；[5]基于一组微分－差分公式研究了脉冲动力系统的有限时间稳定问题。然而，在实际生活中，系统的执行器的振幅或者频率存在物理条件等因素的限制，超越这些限制可能会导致系统信号的失真，这将导致系统控制失去准确度，最终导致系统不稳定，因此，执行器饱和下的控制越来越受到关注。在[6]中提出了一种依赖于线性矩阵不等式的稳定性判据，用于量化饱和约束下系统的稳定性边界；[7]深入研究了具有执行器饱和的动态系统，并提出了一种新的饱和度依赖的事件触发机制，以降低饱和阶段的触发频率。参考文献[8]考虑了脉冲的饱和结构，设计了一种脉冲控制器，并开发了一种优化算法。在控制理论中，非线性系统描述了一种输出与输入不成正比且不满足叠加原理的系统，它对初始条件敏感，并随着时间推移，它的系统状态难以预测。与非线性系统相关的诸多理论也得到探索，例如[9]设计了一种基于观测器的非线性抗饱和补偿器的方法，提出了一种非线性解耦和等效解耦抗饱和补偿器结构；[10]提出了一种严格反馈非线性系统的自适应最优方案，给出了一种新的非线性相关函数。

在本文中，我们关注在饱和控制输入下的有限时间稳定问题，基于李雅普诺夫方法，给出了实现稳定的充分条件。在第 2 节中给出了一些必要的引理和假设；第 3 节给出了本文的主要结果；第 4 节给出了数值模拟例子；第 5 节是本文的总结。

2. 预备知识

设 $\mathbb{R}^n$ 为具有欧几里得范数 $|\bullet|$ 的欧几里得空间，$\mathbb{Z}_+$ 为正整数集，I 为单位矩阵。$A>0$ 表示矩阵 A 是对称且正定的，A^T 表示矩阵 A 的转置矩阵，$\lambda_{\max}(A)$、$\lambda_{\min}(A)$ 分别表示矩阵 A 的最大特征值和最小特征值。定义 $\bigstar$ 为对称矩阵的对称块。给定脉冲时间序列 $\{t_k, k\in\mathbb{Z}_+\}$，满足当 $k\to\infty$ 时，$0\le t_0<t_1<\cdots<t_k\to+\infty$。令 $P\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是正定矩阵，对于一个正常数 ρ，$\varepsilon(P,\rho)=\left\{x\in\mathbb{R}^n : x^T Px\le\rho\right\}$。给定矩阵 $H\in\mathbb{R}^{m\times n}$，令 h_j 是矩阵 H 的第 j 行，定义 $\mathcal{L}(H):=\left\{x\in\mathbb{R}^n : \left|h_j x\le 1\right|, j\in[1,m]\cap\mathbb{Z}_+\right\}$。本文考虑如下饱和输入控制系统：

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bf\left(x(t)\right)+Csat\left(u(t)\right), t\ne t_k, t\ge t_0, \tag{1}$$

其中 $x(t)\in\mathbb{R}^n$ 表示为系统的状态变量， $f(x)$ 是系统状态的变量的右上导数， $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是全局利普希茨函数满足 $f(0)=0$ 且对于任意的 $x_1,x_2\in\mathbb{R}^n$， $\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\le L_f\left|x_1-x_2\right|$ 成立， $L_f\in\mathbb{R}_n$ 是利普希茨矩阵，$A\in\mathbb{R}^{n\times n}, B\in\mathbb{R}^{n\times n}, C\in\mathbb{R}^{n\times m}$。$sat(u):\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ 是标准饱和函数，满足 $sat(u)=\left[sat(u_1),\cdots,sat(u_m)\right]^T$，其中 $sat(u_j)=\operatorname{sign}(u_j)\min\left\{1,\left|u_j\right|\right\}, j\in[1,m]\cap\mathbb{Z}_+$。 $u(t)$ 是状态反馈，满足 $u(t)=Kx\left(t^-\right)$， $K\in\mathbb{R}^{m\times n}$。令

$x(t)=x(t,t_0,x_0)$ 是系统(1)在初始条件 $(t_0,x_0), x_0\in\mathbb{R}^n$ 的解，将吸引域定义为 $\mathcal{A}:=\left\{x_0\in\mathbb{R}^n:\lim_{t\to\infty}x(t,t_0,x_0)=0\right\}$。

注 1 事实上，这种标准饱和函数的定义将输入信号限制在预设范围内，即 $[-1,1]$，以防止控制器输出信号过大而导致的失控。除此之外，这种饱和函数在实际应用中可以防止传感器信号超过量程或执行器过载，这些特性使它成为控制系统等领域的重要方法。

引理 1 ([6])设 $\mathcal{D}$ 是 $m\times m$ 阶对角元素仅为 0 或 1 的对角矩阵的集合，记 $\mathcal{D}$ 中的每个元素为 D_i，$i\in\left[1,2^m\right]\cap\mathbb{Z}_+$。记 $D_i^-=I-D_i$。令 $u,v\in\mathbb{R}^m$，其中 $u=(u_1,u_2\cdots,u_m)^T, v=(v_1,v_2,\cdots,v_m)^T$。若对任意的 $i\in\left[1,2^m\right]\cap\mathbb{Z}_+$ 均有 $|v_i|\le 1$，则有

$$sat(u)\in\mathrm{co}\left\{D_iu+D_i^-v:i\in\left[1,2^m\right]\right\},$$

其中

$$\mathrm{co}\left\{u_i:i\in\left[1,2^m\right]\cap\mathbb{Z}_+\right\}:=\left\{\sum_{i=1}^{2^m}\alpha_iu^i:\sum_{i=1}^{2^m}\alpha_i=1,\alpha_i\ge 0\right\},$$

进一步，给定两个反馈矩阵 $K,H\in\mathbb{R}^{m\times n}$，如果对每一个 x，$x\in\mathcal{L}(H)$ 均成立，那么有

$$sat(Kx)\in\mathrm{co}\left\{D_iKx+D_i^-Hx:i\in\left[1,2^m\right]\cap\mathbb{Z}_+\right\},$$

即

$$sat(Kx)=\sum_{i=1}^{2^m}\gamma_i\left(D_iKx+D_i^-Hx\right)$$

其中 $0<\gamma_i<1, \sum_{i=1}^{2^m}\gamma_i=1$。记 $S(\gamma)=\sum_{i=1}^{2^m}\gamma_i\left(D_iK+D_i^-H\right)$，$\gamma=\left[\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{2^m}\right]$，$E_i=D_iK+D_i^-H$。

定义 1 如果存在一个关于原点的开邻域 $\mathcal{N}$ 与函数 $\mathcal{T}:\mathcal{N}/\{0\}\to(0,\infty)$ (称为稳定时间函数)，满足如下条件：

(1) 对于任意的 $x\in\mathcal{N}/\{0\}$，ψ^x 定义在 $[0,\mathcal{T}(x))$ 上。对于任意的 $t\in[0,\mathcal{T}(x))$，有 $\psi^x(t)\in\mathcal{N}/\{0\}$ 且 $\lim_{t\to\mathcal{T}(x)}\to\psi^x(t)=0$。

(2) 对于任意关于 0 的开邻域 $\mathcal{U}_\varepsilon$，存在一个关于 $\mathcal{N}$ 的包含 0 的开子集 $\mathcal{U}_\delta$ 满足对任意的 $x\in\mathcal{U}_\delta/\{0\}$，$\psi^x(t)\in\mathcal{U}_\varepsilon$ 对全部的 $t\in[0,\mathcal{T}(x))$ 成立。如果有 $\mathcal{N}=\mathbb{R}^n$，那么原点被称为全局有限时间平衡点。

引理 2 ([1])如果存在函数 $V:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足如下条件：

(1) V 是正定的。

(2) 存在实常数 $c>0$ 以及 $\alpha\in(0,1)$ 与原点的开邻域 $\mathcal{V}\in\mathbb{R}$，满足 $\dot{V}(x)+c(V(x))^\alpha\le 0, x\in\mathcal{V}/\{0\}$。

那么原点是一个有限时间平衡点，进一步，如果 $\mathcal{N}$ 的定义与在定义 1 中一样且 $\mathcal{T}$ 是稳定时间函数，那么

$$\mathcal{T}(x)\le\frac{1}{c(1-\alpha)}V(x)^{1-\alpha}, x\in\mathcal{N}$$

且 $\mathcal{T}$ 在 $\mathcal{N}$ 上连续。如果 $\dot{V}$ 在 $\mathbb{R}^n/\{0\}$ 上是负定的，V 是正交矩阵，那么原点是全局有限时间稳定点。

3. 主要结果

在本节，我们将讨论系统上述系统的有限时间稳定性质。

定理 1 给定矩阵 $K,H\in\mathbb{R}^{m\times n}$，如果存在矩阵 $P\in\mathbb{R}^{n\times n}>0$，对角阵 $R\in\mathbb{R}^{n\times n}>0$，正常数 $\beta,\rho,c>0$ 与

$\xi > 1$，满足 $\varepsilon(P,\rho) \subset \mathcal{L}(H)$，以及

$$\begin{pmatrix} A^T P + PA + L_f RL_f + E_i^T C^T P + PCE_i + \beta P & PB \\ \bigstar & -R \end{pmatrix} < 0, \tag{2}$$

$$c = \beta\left(\lambda_{\min}(P)\right)^{1-\alpha} \tag{3}$$

那么系统(1)在 $x_0 \in \varepsilon(P,\tilde{\rho}), \tilde{\rho} = \rho^{-\xi}, \xi > 1$ 的初值条件下是有限时间稳定的，其中 $\alpha \in (0,1)$。

证明 首先，我们将证明，对于任意的 $x_0 \in \varepsilon(P,\tilde{\rho})$，有 $x(t) \in \varepsilon(P,\rho)$，$\forall t \ge t_0$。假设存在 $t > t_0$，使得 $x(t) \notin \varepsilon(P,\rho)$，那么令 $\hat{t} = \inf\{t > t_0 : x(t) \notin \varepsilon(P,\rho)\}$，由 $\hat{t}$ 的定义可知 $x(\hat{t})^T Px(\hat{t}) = \rho$。当 $t \in [t_0,\hat{t})$ 时，由条件(8)、引理 1 得：

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= 2x^T(t)P\dot{x}(t) \\ &= x^T(t)A^T Px(t) + x^T(t)PAx(t) + 2x^T(t)P\bar{B}f(x(t)) + x^T(t)E_i^T C^T Px(t) + x^T PCE_i x(t) \\ &\le x^T(t)\left(A^T P + PA + PBR^{-1}B^T P + L_f RL_f + E_i^T C^T P + PCE_i\right)x(t) \\ &\le x^T(t)\begin{pmatrix} A^T P + PA + L_f RL_f + E_i^T C^T P + PCE_i & PB \\ \bigstar & -R \end{pmatrix}x(t) \end{aligned} \tag{4}$$

由引理 1

$$\sum_{i=1}^{2^m}\begin{pmatrix} A^T P + PA + L_f RL_f + E_i^T C^T P + PCE_i & PB \\ \bigstar & -R \end{pmatrix} \le 0, i \in [1,2^m] \cap \mathbb{Z}_+$$

其中 $0 \le \gamma_i \le 1$ 且 $\sum_{i=1}^{2^m}\gamma_i = 1$，也就是说

$$\begin{pmatrix} A^T P + PA + L_f RL_f + S(\gamma)^T C^T P + PCS(\gamma) & PB \\ \bigstar & -R \end{pmatrix} \le 0 \tag{5}$$

由式(3)、(4)得

$$\dot{V}(t) \le -\beta V(t), t \in [t_0,\hat{t})$$

进一步得

$$\dot{V}(\hat{t}) \le -\beta V(\hat{t})$$

所以

$$V(\hat{t}^+) \le V(\hat{t}) = \rho,$$

这与 $\hat{t}$ 的定义矛盾。由上述证明过程中的 $\dot{V}(t) \le -\beta V(t), t > t_0$ 可以得到：

$$V(x(t)) \le V(x(t_0))e^{-\beta t}$$

所以系统状态 $x(t)$ 是以指数速率收敛的，收敛速率由 β 决定。所以对于任意的 $x_0 \in \varepsilon(P,\tilde{\rho})$，有 $x(t) \in \varepsilon(P,\rho)$，$\forall t \ge t_0$。结合以上证明过程，且代入条件(3)得

$$\dot{V}(t) \le -\beta V(t) \le -c(\lambda_{\min}(P))^{\alpha-1}V(t) \le -cV(t)^\alpha, t > t_0 \tag{6}$$

对

$$\dot{V}(t) \le -cV(t)^\alpha, t > t_0$$

进行积分可以得到稳定时间边界为：

$$\mathcal{T} \le \frac{1}{c(1-\alpha)} V(x)^{1-\alpha}, x \in \mathbb{R}^n$$

于是，由有限时间稳定的定义与引理 2 可知系统(1)在定理的条件下是有限时间稳定的。

证毕。

注 2 相较于传统的控制方法，饱和控制在充分考虑实际应用中的振幅、频率等物理因素，使控制系统保持在最佳状态，以此达到保护系统，延长系统使用寿命的目的，从而降低硬件损耗所带来的不必要成本。

注 3 有限时间稳定的平衡点确保系统在预先指定的有限时间内从受到干扰恢复到平衡状态，相较于传统的渐近稳定而言，它无需无限的时长，这可以避免因收敛时间过长而导致的失控问题。在工程领域，有限时间稳定引入时间边界条件，从而提供了更加严格稳定性的量化指标，使它在实际操作中更具有准确性。

注 4 非线性系统的收敛速率反映了系统从初始状态到达稳定状态所需要的时间尺度，高收敛速率意味着能以更短时间完成能量耗散与调节过程。另外，稳定时间边界作为一种特殊的边界条件，确保了系统在特殊时间内稳定，在非光滑动态系统中，该边界的存在可以避免其它稳定导致的相位滞后问题，确保各种子系统可以同步稳定。

接下来我们将给出矩阵 K, H 的设计。

定理 2 对于给定的正常数 $,\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{c}, r$ 如果存在对角阵 $N > 0$, 以及矩阵 X, Y, 满足

$$\begin{pmatrix} NA^T + AN + rL_f NL_f + ND_i XC^T + ND_i^- YC^T + CD_i XN + CD_i^- YN + \tilde{\beta}N & BN \\ \bigstar & -rN \end{pmatrix} < 0, \tag{7}$$

$$\tilde{c} = \tilde{\beta}\lambda(N)^{\tilde{\alpha}-1} \tag{8}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & z_i Y \\ \bigstar & -N \end{pmatrix} \le 0, i \in [1, m] \cap \mathbb{Z}_+ \tag{9}$$

其中

$$K = XN^{-1}, H = YN^{-1}, R = rN^{-1} 。$$

且 $z_i, i \in [1, m] \cap \mathbb{Z}_+$ 表示一个行向量，它的第 i 项为 1，其余项为 0。

证明 令 $N = P^{-1}$，将(7)左右同乘对角阵 $diag\{N^{-1}, N^{-1}\}$，则有(2)成立，再由 N 的定义，(3)成立。由(9)又有 $\varepsilon(P, \rho) \subset \mathcal{L}(H)$ 成立，于是与定理 1 的条件相同。证毕。

4. 数值模拟

考虑系统(1)的矩阵满足如下条件时的系统状态：

$$A = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, f(x) = \begin{pmatrix} \tan(x) \\ \tan(x) \end{pmatrix},$$

其中 $x_0 = (0.5, 0.2)$，该系统在 $u \equiv 0$ 时的系统状态如图 1。

显然，他本身并不稳定。添加饱和输入控制后的系统状态如图 2。

如图所示，在饱和输入控制下该系统实现有限时间稳定，相较于传统的渐近稳定，有限时间稳定更加可控，而饱和控制输入考虑到系统本身的物理限制，相比其他控制方法更加精准，从而节省成本。

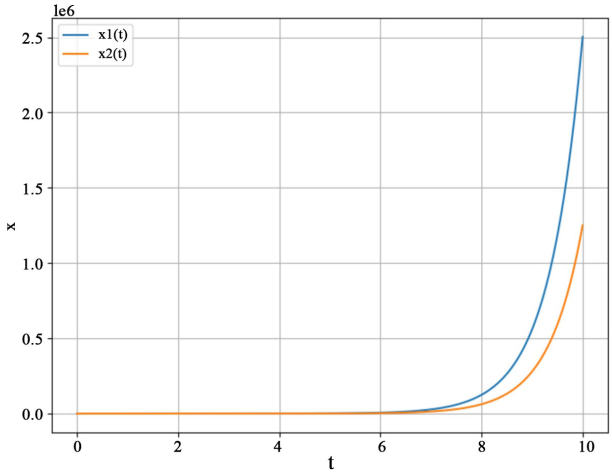

Figure 1. The system status of the system without input control
图 1. 该系统在无输入控制时的系统状态

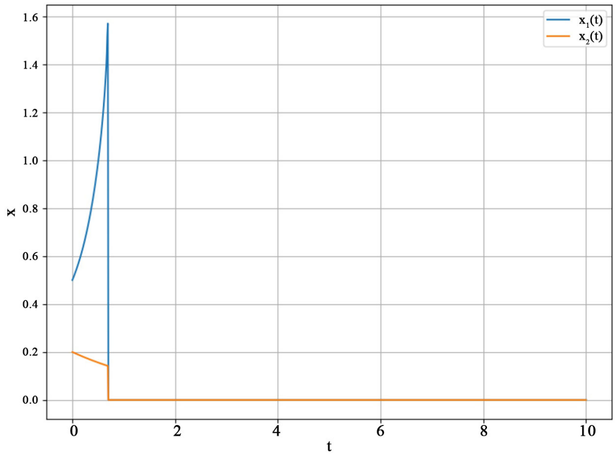

Figure 2. The state of the system under the control of the saturation input
图 2. 在饱和输入控制下的系统状态

5. 结论

本文研究了饱和控制输入下非线性有限时间稳定性问题，通过李雅普诺夫函数与凸组合方法建立了实现稳定的充分条件，并给出了有限时间稳定下了收敛速率系数以及收敛指数，通过不等式方法得到了线性矩阵不等式并给出了控制反馈矩阵与控制增益矩阵的设计。然而，在实际应用中，脉冲扰动与外部干扰也是需要考虑的，这两种扰动会影响系统的收敛速率，收敛时间，甚至收敛结果，其次，在未来研究中，可以在系统中添加时滞项，以符合更多的实用场景。

参考文献

[1] Dorato, P. (1961) Short Time Stability in Linear Time-Varying Systems. Polytechnic Institute of Brooklyn.

[2] Yang, X., Lam, J., Ho, D.W.C. and Feng, Z. (2017) Fixed-Time Synchronization of Complex Networks with Impulsive Effects via Nonchattering Control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **62**, 5511-5521. https://doi.org/10.1109/tac.2017.2691303

[3] He, X., Li, X. and Song, S. (2022) Finite-Time Input-to-State Stability of Nonlinear Impulsive Systems. *Automatica*, **135**, Article 109994. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2021.109994

[4] Li, X., Yang, X. and Song, S. (2019) Lyapunov Conditions for Finite-Time Stability of Time-Varying Time-Delay Systems. *Automatica*, **103**, 135-140. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2019.01.031

[5] Amato, F., De Tommasi, G. and Pironti, A. (2013) Necessary and Sufficient Conditions for Finite-Time Stability of Impulsive Dynamical Linear Systems. *Automatica*, **49**, 2546-2550. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2013.04.004

[6] Hu, T. and Lin, Z. (2001) Control Systems with Actuator Saturation: Analysis and Design. Springer Science and Business Media

[7] Li, H., Jiang, Q. and Deng, H. (2023) Saturation-Degree-Dependent Event-Triggered Control for Saturated Systems. 2023 *China Automation Congress* (*CAC*), Chongqing, 17-19 November 2023, 3291-3296. https://doi.org/10.1109/cac59555.2023.10450541

[8] Li, X. and Zhu, C. (2022) Saturated Impulsive Control of Nonlinear Systems with Applications. *Automatica*, **142**, Article 110375. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2022.110375

[9] Saqib, N.U., Rehan, M., Hussain, M. and Zheng, Z. (2019) Observer-Based Anti-Windup Compensator Design for Nonlinear Systems. *Journal of the Franklin Institute*, **356**, 11364-11384. https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2019.01.056

[10] Yan, L., Liu, Z., Chen, C.L.P., Zhang, Y. and Wu, Z. (2023) Reinforcement Learning Based Adaptive Optimal Control for Constrained Nonlinear System via a Novel State-Dependent Transformation. *ISA Transactions*, **133**, 29-41. https://doi.org/10.1016/j.isatra.2022.07.006