Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(4), 178-189
Published Online April 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.154121

指数截断莱维跳跃分布对流体场中CTRW的影响

马　宾

成都理工大学数学科学学院，四川 成都

收稿日期：2025年2月28日；录用日期：2025年3月19日；发布日期：2025年4月17日

摘　要

连续时间随机漫步是布朗随机漫步的自然推广，它允许合并等待时间分布　和一般跳跃分布函数。我们知道，要想进一步研究连续时间随机游可以通过研究跳跃步长概率密度函数以及等待时间概率密度函数的性质。将连续时间随机漫步推广到流动流体场中也是一大热点研究命题。这种推广可以导出在运动流体中连续时间随机漫步模型的宏观方程。在这里，我们考虑具有指数截断莱维跳跃分布的连续时间随机漫步，在这种情况下，流体极限导致具有指数截断分数阶导数的运输方程，该方程描述了中间渐进状态下记忆、跳跃和截断效应之间的相互作用。该模型在流体力学中具有重要应用，例如可描述污染物在湍流边界层的输运：高速流场主导平流输送，湍流脉动引发指数截断的莱维跳跃，而颗粒在涡旋结构的暂留形成幂律等待时间。通过调节参数，可量化评估海洋溢油扩散中早期快速扩展与后期受海流约束的竞争机制，为预测污染范围提供理论依据。

关键词

连续时间随机游走，分布函数，指数截断，运输方程

The Impact of Truncated Lévy Jump Distribution on CTRW in Fluid Fields

Bin Ma

School of Mathematical Sciences, Chengdu University of Technology, Chengdu Sichuan

Received: Feb. 28th, 2025; accepted: Mar. 19th, 2025; published: Apr. 17th, 2025

Abstract

Continuous-time random walk is a natural extension of the Brownian random walk, allowing for the combination of waiting time distribution and general jump distribution functions. We know that to

文章引用: 马宾. 指数截断莱维跳跃分布对流体场中 CTRW 的影响[J]. 理论数学, 2025, 15(4): 178-189.
DOI: 10.12677/pm.2025.154121

further study continuous-time random walks, one can investigate the properties of the jump step length probability density function and the waiting time probability density function. Extending continuous-time random walks to fluid flow fields is also a major research topic. This extension can lead to the macroscopic equations of the continuous-time random walk model in moving fluid. Here, we consider continuous-time random walks with exponentially truncated Lévy jump distributions. In this case, the fluid limit leads to a transport equation with an exponentially truncated fractional derivative, which describes the interaction between memory, jumps, and truncation effects in the intermediate asymptotic state. This model has important applications in environmental fluid mechanics, such as describing the transport of pollutants in turbulent boundary layers: high-speed flow fields dominate advection transport, turbulent pulsations cause exponentially truncated Lévy jumps, and particles' residence in vortex structures form power-law waiting times. By adjusting parameters, the competition mechanism between the early rapid expansion and the later constraint by ocean currents in the diffusion of marine oil spills can be quantitatively evaluated, providing a theoretical basis for predicting the pollution range.

Keywords

Continuous-Time Random Walk, Distribution Function, Exponential Truncation, Transport Equation

1. 引言

速度场中的扩散是扩散理论的一个重要问题，除了许多基本问题外，它还与许多工业、技术和环境情况有关。这个问题已经从不同的角度进行了大量的研究：扩散－平流方程[1] [2]。

连续时间随机漫步的基本方程是 Montroll-Weiss 方程[3]，它用等待时间分布 $\varphi(t)$ 和跳跃分布函数 $\lambda(x)$ 来描述粒子位移的概率分布函数[4]。因此通过不同的等待时间分布以及跳跃步长分布，我们可以探究连续时间随机漫步模型[5]。

连续时间随机游走模型和扩散过程的区别在于，连续随机时间游走允许更一般的跳跃等待时间分布和跳跃步长分布，而扩散过程通常是其连续极限，当跳跃步长很小且等待时间很短时的近似。例如，当跳跃步长和等待时间的分布具有有限的二阶矩和一阶矩时，在长时间极限下，连续时间随机游走可以收敛到扩散方程。

连续时间随机漫步(Continuous-Time Random Walk, CTRW)由 Montroll 和 Weiss 于 1965 年提出，是经典布朗运动的重要推广。与布朗运动不同，CTRW 允许粒子在跳跃之间经历随机的等待时间，且跳跃步长可服从非高斯分布。这种灵活性使其能够描述复杂系统中广泛存在的反常扩散现象，例如多孔介质中的溶质输运、细胞内分子运动以及湍流场中的粒子扩散。CTRW 的核心由两个独立随机变量刻画等待时间分布和跳跃步长分布，具体而言：

(1) 等待时间分布：它定义为粒子在两次跳跃之间停留时间的概率密度函数 $\varphi(t)$。当 $\varphi(t)$ 呈现幂律衰减形式时，即

$$\varphi(t) \sim t^{-(1+\alpha)} \left(0 < \alpha < 1\right)$$

系统的记忆效应显著，导致次扩散 $(\alpha < 1)$ 或超扩散 $(\alpha > 1)$。例如，幂律型等待时间使得粒子可能长

时间滞留于局部区域，打破马尔可夫性，从而需要分数阶导数描述动力学过程。

(2) 跳跃步长分布：它定义为粒子单次跳跃位移的概率密度函数 $\lambda(x)$。如果 $\lambda(x)$ 具有重尾特性(如莱维分布)：

$$\lambda(x) \sim |x|^{-(1+\mu)} \ (0 < \mu < 2),$$

则二阶矩发散，粒子可能发生远距离跳跃(莱维飞行)，导致均方位移随时间的超线性增长($\mu < 2$ 时为超扩散)。然而，实际物理系统受限于有限尺度或耗散效应，大尺度跳跃需通过指数截断修正，即截断莱维分布：

$$\lambda(x) \sim |x|^{-(1+\mu)} e^{-\gamma|x|},$$

其中 γ 为截断参数，确保矩收敛并恢复高斯扩散的渐近行为。

Montroll-Weiss 方程是 CTRW 的数学框架核心，其傅里叶－拉普拉斯空间形式为：

$$\rho(k,u) = \frac{1}{u}\frac{1-\varphi(u)}{1-\lambda(k)\varphi(u)},$$

其中 $\rho(k,u)$ 为概率密度的积分变换。$\varphi(u)$ 和 $\lambda(k)$ 分别是等待时间和跳跃步长概率密度函数的拉普拉斯变换和傅里叶变换。通过选择不同的 $\varphi(t)$ 和 $\lambda(x)$ 连续时间随机游走可退化为扩散方程(有限矩情形)或分数阶扩散方程(重尾情形)，从而统一描述正常与反常扩散。

在本文中我们考虑速度场是匀速的情况。粒子除了随机跳跃之外，还有平流运动。这时候需要将平流项加入到连续时间随机游走模型中。例如，在每次跳跃之间，粒子不仅等待一段时间 t，并且在这段时间内以速度 v 移动，然后在跳跃时有一个随机位移，或者跳跃本身可能同时包含确定性和随机性的部分。本文我们将探究具有指数截断的莱维跳跃分布的连续时间随机漫步模型，我们研究截断莱维分布的主要动机之一源于我们对磁约束等离子体中的湍流输运的研究。在这个系统中输运是典型的非扩散的，并且已经证明连续时间随机游走模型和分数扩散输运方程能够描述一些基本的现象[6]-[8]。

2. 流体场中的连续时间随机游走

2.1. 经典连续时间随机游走模型

在时间连续随机游走这个模型中，粒子要么先等待一段时间，再发生一个有一定步长的即时跳跃，然后再重复这一过程；要么这个粒子先发生一个具有一定跳跃步长的即时跳跃，然后随机等待一段时间，接着发生即时跳跃，依次重复……对于时间连续随机游走模型而言，我们通常假设时间与空间相互之间没有影响，即等待时间以及跳跃步长这两个是相互独立的[9]。

随机变量是相互独立的。在连续时间随机漫步方案中，定义运动的量是随机漫步者在其起点等待一段时间 τ 后进行长度为 r 的跳跃的概率分布 $\psi(r,\tau)$。它的傅里叶－拉普拉斯变换通过众所周知的关系式与行走者在时刻 t 在 x 点的概率密度 $\rho(x,t)$ 的积分变换有关：

$$\rho(k,u) = \frac{1}{u}\frac{1-\varphi(u)}{1-\psi(k,u)} \tag{1}$$

其中 $\varphi(u)$ 是等待时间分布。$\rho(k,u)$ 是 $\rho(x,t)$ 的傅里叶－拉普拉斯变换。

对(1)式进行傅里叶－拉普拉斯逆变换有：

$$\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} = \int dx'\int d\tau K(x-x',t-\tau)\rho(x',\tau) \tag{2}$$

其中

$$K(k,u)=u\frac{\psi(k,u)-\varphi(u)}{1-\varphi(u)}$$

众所周知连续时间随机游走模型主要是由粒子在相邻两次游走所需要的等待时间 τ_i 和跳跃步长 λ_i 这两个重要的随机变量来刻画的。这两个影响因素都是随机的，但随机程度各不相同，分别由它们各自服从的概率函数决定。我们不妨先考虑离散的情况：关注的是利用等待时间和跳跃步长去描述连续时间随机游走。

等待时间：$\tau_i\,(i=1,2\cdots)$ 且他们之间是独立同分布的，τ_i 的概率密度函数 $\varphi(t)$ 呈幂率型，即

$$\varphi(t)\sim t^{-\alpha-1},\alpha>0$$

计数过程

$$N(t)=\max\left\{k\geq 0:\sum_{i=0}^{k}\tau_i\leq t\right\}$$

跳跃步长：$\lambda_i\,(i=1,2\cdots)$ 且它们之间是独立同分布的。

所以连续随机时间游走定义为

$$N(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}\lambda_i \tag{3}$$

假设跳跃步长的概率密度函数为 $\lambda(x)$，则有 $\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda(x)dx=1$。假设向左跳跃和向右跳跃的概率相等，即其概率密度函数是对称的：$\lambda(x)=\lambda(-x)$。在跳跃一步之前，粒子等待了 t 时间，假设等待时间的概率密度函数为 $\varphi(t)$，于是 $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)dx=1$。从而 $\lambda(x)$ 和 $\varphi(t)$ 就决定了连续时间随机游走的宏观性质。在标准的连续时间随机游走中这两个量是独立的，称此种连续时间随机游走为非耦合的连续时间随机游走模型。

定义一个存活概率 $\Psi(t)$，它刻画了粒子在 $(0,t)$ 时间内发生一次跳跃以后保持静止的概率

$$\Psi(t)=1-\int_0^t\varphi(\tau)d\tau$$

于是可以得到如下关系

$$Q(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda(y)\int_0^t\varphi(\tau)Q(x-y,t-\tau)d\tau dy+P_0(x)\varphi(t)$$

$$P(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda(y)\int_0^t\Psi(\tau)Q(x-y,t-\tau)d\tau dy+P_0(x)\Psi(t)$$

其中 $Q(x,t)$ 表示为粒子经过 τ 时间，发生跳跃 y 距离恰好到达位置 (x,t) 的粒子量，$P(x,t)$ 表示为粒子经过 τ 时间，发生跳跃 y 距离恰好到达位置 (x,t) 的粒子量，此时初始条件 $P_0(x,t=0)$ 是粒子在 $t=0$ 时的初始分布。

对于上面两个式子，我们分别对跳跃步长概率密度函数 $\lambda(x)$ 作傅里叶变换，即 $\lambda(x)\to\lambda(k)$；对等待时间概率密度函数 $\varphi(t)$ 作拉普拉斯变换，即 $\varphi(t)\to\varphi(u)$，然后利用傅里叶－拉普拉斯空间中的卷积公式我们可以得到

$$Q(k,u)=\lambda(k)\varphi(u)Q(k,u)+P_0(k)\varphi(u)$$

$$P(k,u)=\lambda(k)\Psi(u)Q(k,u)+P_0(k)\Psi(u)$$

整理得到传播函数 $P(x,t)$ 的主方程，即著名的 Montroll-Weiss 方程

$$P(k,u)=\frac{P_0(k)\left[1-\varphi(u)\right]}{u\left[1-\lambda(k)\varphi(u)\right]} \tag{4}$$

其中 $\Psi(u)=\frac{1-\varphi(u)}{u}$。对(4)式作傅里叶－拉普拉斯逆变换，我们便可以得到传播函数 $P(x,t)$ 的表达式变形为

$$P(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda(y)\int_0^t\varphi(\tau)P(x-y,t-\tau)d\tau dy+P_0(x)\Psi(t)$$

根据(4)式中当等待时间概率密度函数和跳跃步长概率密度函数取不同的值时，我们都可以推导出其对应的扩散方程，进而研究其二阶矩等性质。所以，对于连续时间随机游走来说，式(4)起到了关键的作用，它对研究传播函数 $P(x,t)$ 以及二阶矩等性质有重要意义。注意到，耦合情况下，这里的是(4)与式(1)几乎是一样的。

2.2. 流体中连续时间随机漫步模型

连续时间随机游走模型扩展到流体中是非常有必要的。该模型结合了流体的确定性平流和随机跳跃过程，能够描述粒子在恒定速度场中的扩散行为，宏观上表现为带有修正漂移和扩散系数的对流－扩散方程。

下面考虑在流动流体中的随机行人，也就是说，有偏见的连续时间随机漫步[10]。从标准的扩散－平流方程开始，计算沿 x 方向匀速 v 运动的流体中的扩散[11] [12]：

$$\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t}+v\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial x}=D\nabla^2\rho(x,t) \tag{5}$$

在傅里叶空间中，这个方程变成

$$\frac{\partial\rho(k,t)}{\partial t}=-\left(ikv+Dk^2\right)\rho(k,t) \tag{6}$$

定义恒定速度运动流体场中连续时间随机游走：

$$\psi(x,t)=\psi_0(x-v\tau,t) \tag{7}$$

在傅里叶空间中，这个方程变成：

$$\psi(k,t)=e^{-i\tau kv}\psi_0(k,t) \tag{8}$$

首先对(8)式进行拉普拉斯变换有：

$$\varphi(k,u)=e^{-i\tau kv}\varphi_0(k,u)$$

结合 $\varphi_0(k,u)=\lambda(k)\varphi(u)$

$$\text{故有：}\quad \varphi(k,u)=e^{-i\tau kv}\lambda(k)\varphi(u) \tag{9}$$

将(9)式带入(1)式中有：

$$\rho(k,u)=\frac{1-\varphi(u)}{u}\frac{1}{1-e^{-i\tau kv}\lambda(k)\varphi(u)} \tag{10}$$

又因为生存函数 $\Psi(u)=\frac{1-\varphi(u)}{u}$ 代入等式(9)中得到：

$$\rho(k,u)=\frac{\Psi(u)}{1-e^{-i\tau kv}\lambda(k)\left(1-u\Psi(u)\right)} \tag{11}$$

在这里，为了研究方便，我们考虑

$$\Psi(t)=E_{\beta}\left(-t^{\beta}\right)$$

它是 Mittag-Leffler 函数。通过文献我们知道：

$$\mathscr{L}\left[t^{(n)\beta}E_{\beta}^{n}\left(\pm at^{\beta}\right)\right]\rho(k,u)=\frac{u^{\beta-1}}{u^{\beta}+1-e^{-i\tau vk}\lambda(k)} \tag{12}$$

结合式(12)以及式(11)有：

$$\rho(k,u)=\frac{u^{\beta-1}}{u^{\beta}+1-e^{-i\tau vk}\lambda(k)} \tag{13}$$

对其进行拉普拉斯变换有：

$${}_{0}^{c}D_{t}^{\beta}\rho(k,t)=\left[e^{i\tau kv}\lambda(k)-1\right]\rho(k,t) \tag{14}$$

Mittag-Leffler 函数的使用允许用分数阶时间导数对拉普拉斯变换进行精确的反转，这对于一般的等待时间分布函数来说是不可能的。然而，在流体极限中，重要的是生存概率分布函数的渐近衰减，这是被大家所认可的。因此，任何表现出与 Mittag-Leffler 函数相同的代数衰减的分布，将在流体极限中产生方程(14)。

在傅里叶空间中，大尺度宏观流体极限对应于 $k\to 0$。在这个极限下：

$$\lambda(k)=e^{\Lambda(k)}\approx 1+\Lambda(k)+\cdots$$

结合式(14)得到：

$${}_{0}^{c}D_{t}^{\beta}\rho(k,t)=\left[\Lambda(k)-i\tau vk\right]\rho(k,t) \tag{15}$$

式(15)为宏观输运方程，描述在小 k 流体极限下，具有跳跃的一般概率分布函数，特征函数为 $\lambda(k)=e^{\Lambda(k)}$。通过傅里叶－拉普拉斯逆变换可以求得方程(15)在初始条件 $\rho_0(x)=\rho(x,t=0)$ 的通解为：

$$\rho(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G(x-y,t)\rho_0(y)dy \tag{16}$$

其中函数 G 为格林函数或者传播子。

$$G(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}E_{\beta}\left[t^{\beta}\Lambda(k)\right]dk \tag{17}$$

为了取得进一步的进展，我们需要指定跳跃概率分布函数的形式。我们假设这个函数属于无穷可分分布的大类，跳跃分布函数对应的特征函数的对数由莱维 Khintchine 给出[13]。

$$\Lambda=In\lambda(k)=aik-\frac{1}{2}\sigma^2k^2+\int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{-ikx}-1-iku(x)\right]w(x)dx \tag{18}$$

其中 a 是一个常数并且 $\sigma\geq 0$。函数 $u(x)$ 是一个截断函数，用来消除被积函数在原点处的奇异性，保证积分的收敛性，函数 $w(x)$ 是莱维密度函数。将(18)式代入(15)式再求傅里叶逆变换便得到：

$${}_{0}^{c}D_{t}^{\beta}\rho(x,t)=-(a+\tau v)\partial_x\rho+\frac{1}{2}\sigma^2\partial_x^2\rho+\int_{-\infty}^{\infty}\left[\rho(x-y,t)-\rho(x,t)+u(y)\partial_x\rho\right]w(y)dy \tag{19}$$

方程(19)是描述具有一般跳跃分布函数的连续时间随机漫步流体极限的宏观输运方程，其特征为一般的莱维密度。

3. 分数扩散方程的指数截断莱维过程

在本节中，我们考虑两个具体的莱维过程，并从方程(19)中得到相应的宏观运输方程。第一个例子对应于莱维稳定情况，并恢复了众所周知的标准分数扩散方程的推导。第二个例子考虑了指数截断的莱维过程的情况，并导致了一个分数传输方程，描述了记忆效应、远程跳跃和截断的相互作用[14]。

3.1. 莱维稳定过程

对于一个莱维稳定过程，莱维密度由式(20)给出：

$$w(x)=\begin{cases} c\dfrac{(1+\theta)}{2}|x|^{-(1+\alpha)} & x<0 \\ c\dfrac{(1-\theta)}{2}x^{-(1+\alpha)} & x>0 \end{cases} \tag{20}$$

其中 $c>0$， $-1\le\theta\le1$ 是一个不对称参数。将方程(20)代入方程(18)进行积分可以得到：

$$\Lambda=iak-\frac{1}{2}\sigma^2k^2-\begin{cases} c|k|^{\alpha}\left[1+i\theta\operatorname{sgn}(k)\tan(\alpha\pi/2)\right] & \alpha\ne1 \\ c|k|\left(1+\dfrac{2i\theta}{\pi}\operatorname{sgn}(k)In|k|\right) & \alpha=1 \end{cases} \tag{21}$$

在这里， $\operatorname{sgn}(k)=\dfrac{|k|}{k}$，式(21)是莱维稳定过程的特征指数。为了进一步计算出扩散方程，我们介绍 Riemann-Liouville 分数阶导数。

定义：

$${}_aD_x^{\alpha}f=\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\frac{\partial^m}{\partial x^m}\int_a^x\frac{f(y)}{(x-y)^{\alpha+1-m}}dy \tag{22}$$

$${}_xD_b^{\alpha}f=\frac{(-1)^m}{\Gamma(m-\alpha)}\frac{\partial^m}{\partial x^m}\int_x^b\frac{f(y)}{(y-x)^{\alpha+1-m}}dy \tag{23}$$

使用

$$\mathcal{F}\left[{}_{-\infty}D_x^{\alpha}f\right]=(-ik)^{\alpha}f(k)$$

$$\mathcal{F}\left[{}_xD_{\infty}^{\alpha}f\right]=(ik)^{\alpha}f(k)$$

通过将特征指数代入方程(15)中就能得到分数阶扩散方程：

$${}_0^cD_t^{\beta}\rho(x,t)=-(a+\tau v)\partial_x\rho+\frac{1}{2}\sigma^2\partial_x^2\rho+c\left[l\,{}_{-\infty}D_x^{\alpha}+r\,{}_xD_{\infty}^{\alpha}\right]\rho \tag{24}$$

其中 $l=-\dfrac{1-\theta}{2\cos(\alpha\pi/2)}$， $r=-\dfrac{1+\theta}{2\cos(\alpha\pi/2)}$

3.2. 指数截断莱维过程

对于指数截断的莱维过程，莱维密度由(25)式给出：

$$w(x)=\begin{cases} c\dfrac{(1+\theta)}{2}|x|^{-(1+\alpha)}e^{-\lambda|x|} & x<0 \\ c\dfrac{(1-\theta)}{2}x^{-(1+\alpha)}e^{-\lambda x} & x>0 \end{cases} \tag{25}$$

这里我们取 $0<\alpha\le 1, c>0, -1\le\theta\le 1, \lambda\ge 0$ 。在这种情况下，方程(18)导致特征指数为：

$$\Lambda = iak - \frac{1}{2}\sigma^2 k^2 - \frac{c}{2\cos(\alpha\pi/2)}\left[(1+\theta)(\lambda+ik)^\alpha + (1-\theta)(\lambda-ik)^\alpha - 2\lambda^\alpha\right] \tag{26}$$

现在我们将(26)式代入方程(15)并利用

$$\mathcal{F}\left[e^{-\lambda x}{}_{-\infty}D_x^\alpha e^{\lambda x} f\right] = (\lambda-ik)^\alpha f(k)$$

$$\mathcal{F}\left[e^{\lambda x}{}_{x}D_\infty^\alpha e^{-\lambda x} f\right] = (\lambda+ik)^\alpha f(k)$$

通过傅里叶－拉普拉斯逆变换我们可以得到：

$${}_0^cD_t^\beta \rho(x,t) = -(a+\tau v)\partial_x\rho + \frac{1}{2}\sigma^2\partial_x^2\rho + cD_x^{\alpha,\lambda}\rho - q\rho \tag{27}$$

其中

$$D_x^{\alpha,\lambda} = le^{-\lambda x}{}_{-\infty}D_x^\alpha e^{\lambda x} + re^{\lambda x}\rho$$

$$q = -\frac{c\lambda^\alpha}{\cos(\alpha\pi/2)}$$

和预想的一样当 $\lambda=0$，方程(27)退变回成方程(24)。

为了直观的了解截断的作用，我们考虑传播子的矩。

由

$$\rho(k,u) = \frac{u^{\beta-1}}{u^\beta + 1 - e^{i\tau kv}\lambda(k)}\rho_0(k)$$

所以

$$G(k,u) = \frac{u^{\beta-1}}{u^\beta + 1 - e^{i\tau kv}\lambda(k)}$$

由

$$L\left\{t^{n\beta}E_\beta^{(n)}\left[\pm at^\beta\right]\right\} = \frac{n!u^{\beta-1}}{\left(u^\beta \mp 1\right)^{n+1}}$$

故有

$$G(k,t) = E_\beta\left[\gamma t^\beta\right]$$

其中

$$\gamma = e^{i\tau kv}\lambda(k) - 1$$

求傅里叶逆变换有：

$$G(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}E_\beta\left[\gamma t^\beta\right]dk$$

又

$$\left\langle x^{(n)}\right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^n G(x,t)\,dx = (-i)^n\frac{\partial^n G(k,t)}{\partial k^n}(k=0)$$

求得

$$\langle x\rangle=\frac{(a+\tau v)t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}$$

$$\langle x^{2}\rangle=\frac{2t^{2\beta}(\tau v+a)^{2}}{\Gamma(2\beta+1)}+\frac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}2\mathcal{X}$$

其中

$$\mathcal{X}=\frac{\sigma^{2}}{2}+\frac{c\alpha|\alpha-1|}{2|\cos(\alpha\pi/2)|\lambda^{2-\alpha}}$$

3.3. 关键参数对输运行为及宏观方程的影响分析

3.3.1. 截断参数 λ 的调控作用

截断参数 λ 表征指数截断的强度，其倒数 $1/\lambda$ 定义了跳跃步长的特征截断尺度。当 λ 增大时，莱维跳跃的尾部衰减速率加快，大尺度输运事件的发生概率显著降低。在宏观输运方程(27)中，λ 通过修正扩散项 σ_{λ}^{2} 影响输运速率：

$$\sigma_{\lambda}^{2}=\sigma_{0}^{2}+\frac{C}{\lambda^{2-\alpha}}$$

其中截断项 $\frac{C}{\lambda^{2-\alpha}}$ 与 λ 成反比。当 $\lambda\to\infty$ 时，方程(27)退化为标准分数阶扩散方程(24)。此时扩散系数发散；当 λ 有限时，截断效应使扩散系数趋于有限值，系统从超扩散逐渐过渡到正常扩散。物理上，λ 的增大对应于湍流场中涡旋结构的特征尺度减小，污染物颗粒的长程跳跃受限于涡旋破碎过程，扩散行为由早期莱维主导的快速扩展转变为后期平流主导的受限扩散。例如，在海洋溢油模型中，λ 的增大可抑制溢油初期的大范围扩散，使其更快进入受海流约束的阶段。

3.3.2. 莱维指数 α 的动力学效应

莱维指数 $\alpha(1<\alpha<2)$ 决定跳跃步长分布的重尾特性。α 越小，跳跃步长分布的尾部越厚，粒子发生长程跳跃的概率越高。在宏观方程中，α 直接决定分数阶导数项 $\frac{\partial^{\alpha}}{\partial|x|^{\alpha}}$ 的阶数。当 $\alpha\to 2$ 时，分数阶导数退化为经典二阶导数，扩散过程趋于高斯扩散；当 $\alpha\to 1$ 时，分数阶导数的非局部性增强，系统呈现显著的超扩散特性，均方位移 $\langle x^{2}(t)\rangle$ 随时间的增长速率加快($\langle x^{2}(t)\rangle\propto t^{2/\alpha}$)。在湍流边界层中，较小的 α 值意味着颗粒更易被大尺度涡旋携带，导致污染物在空间上呈现“跃迁式”扩散，这对预测污染范围的上界具有重要参考价值。

3.3.3. 等待时间幂律指数指数 β 的记忆效应

等待时间分布 $\varphi(t)\propto t^{-(1+\beta)}$ 的幂律指数 $\beta(0<\beta<1)$ 控制粒子在局部区域的滞留时间。β 越小，等待时间的长期记忆效应越显著，粒子更倾向于长时间停留在涡旋结构中。在宏观方程中，β 与分数阶时间导数 $\frac{\partial^{\beta}}{\partial t^{\beta}}$ 的阶数相关联。当 $\beta\to 1$ 时，记忆效应消失，方程退化为经典扩散－平流方程；当 $\beta\to 0$ 时，系统的次扩散特性 $\left(\langle x^{2}(t)\rangle\propto t^{\beta}\right)$ 占主导，扩散速率大幅降低。例如，在海洋溢油场景中，若 β 较小，污染物初期因颗粒滞留于涡旋而扩散缓慢，后期随海流平流作用逐渐释放，形成两阶段竞争机制。调节 β 可量化评估滞留时间对污染演化的影响。

3.4. 湍流边界层中的污染物输运机制与模型应用

3.4.1. 流体场中污染物输运的物理机制

在湍流边界层中，污染物的输运由多尺度涡旋结构与平均流场的耦合作用主导。其物理机制可分为以下三个层次[15] [16]：

(1) 平流主导运输：高速流场的平均速度(如海表风驱流或河道主流)通过平流作用推动污染物整体迁移，表现为确定性运动。

(2) 湍流脉动诱导的随机跳跃：湍流产生的瞬时速度脉动引发污染物的随机位移。大尺度涡旋通过夹带作用使污染物发生长程跳跃(莱维跳跃特性)，而小尺度涡旋则导致短程扩散。由于实际系统的有限尺度(如海洋深度或管道半径)，大位移事件受物理边界或能量耗散的限制，形成指数截断效应。

(3) 涡旋驻留与等待时间，污染物颗粒在涡旋内部滞留时，受涡旋寿命的影响，其等待时间分布呈现幂律特性($\varphi(\tau)\sim\tau^{-(1+\alpha)}$)。这一过程与非马尔可夫性记忆效应直接相关，解释了污染物扩散中的时间依赖性异常行为。

3.4.2. 湍流边界层的特点及其影响

湍流边界层的动力学特性通过以下方面影响污染物扩散：

(1) 速度梯度与剪切效应：边界层内速度梯度导致强烈的剪切湍流，增强污染物的横向混合。剪切流中涡旋拉伸作用可能改变莱维跳跃的方向性分布，需在模型中引入各向异性修正因子。

(2) 雷诺应力与能量级串：根据 Kolmogorov 理论，湍动能从大尺度涡旋向小尺度传递并最终耗散。这一过程导致污染物跳跃步长的多尺度分布，其中截断参数可关联于耗散尺度 $l_\eta\left(\lambda\sim 1/l_\eta\right)$，反映系统对最大跳跃尺度的物理限制。

(3) 拟序结构与间接性：湍流边界层中拟序结构(如发卡涡)的周期性生成与破碎，导致污染物扩散呈现间歇性爆发特征。模型中的截断莱维分布可捕捉此类间歇性，其尾部衰减速率与拟序结构的空间相关性直接相关。

3.5. 模型对比

3.5.1. 与传统布朗运动模型的对比

本文模型：引入指数截断的莱维跳跃分布，允许幂律型跳跃步长(如 $\lambda(x)\propto|x|^{-1-\alpha}e^{-\gamma|x|}$)，结合平流效应和截断机制。

传统布朗运动：基于正态分布，跳跃步长和等待时间的二阶矩有限，均方位移(MSD)与时间呈线性关系(正常扩散，$\left\langle x^2\right\rangle\propto t$)。

传统的布朗运动具有一定的局限性：无法描述反常扩散现象(如超扩散或次扩散)，且缺乏对长尾跳跃和记忆效应的刻画。

本文模型与传统布朗运动相比较，我们的模型可以更好地描述超扩散且适用于湍流边界层污染物输运等场景。并且通过指数截断避免莱维分布的二阶矩发散，物理上更合理。

3.5.2. 与标准连续时间随机游走模型的对比

标准连续时间随机游走模型：使用未截断的莱维稳定分布，导致跳跃步长的二阶矩发散$(\alpha<2)$。

标准连续时间随机游走模型的局限性在于：理论上的无限大跳跃与实际物理系统矛盾，无法描述截断效应。

本文模型采用指数截断莱维跳跃分布，保留了长跳跃特性同时保证二阶矩有限。通过截断参数 λ 调节跳跃尺度，量化早期快速扩散与后期受约束的竞争机制。同时推导出了含指数截断分数阶导数的宏观

输运方程(式 27)，统一描述记忆效应、长程跳跃与截断的相互作用。

3.5.3. 与其他扩散模型(如分数阶扩散方程)的对比

分数阶扩散模型：通过分数阶导数(如 Riemann-Liouville 导数)刻画非局域性和记忆效应，但通常基于未截断的莱维过程。

分数阶扩散模型的局限性在于：仍存在矩发散问题，且未明确结合流体场的平流效应。

本文模型在分数阶导数中引入指数截断(式 27)，使方程兼具分数阶非局域性和截断的物理约束。优势在于结合流体场平流项(式 19)，更真实模拟运动流体中污染物的输运(如高速平流主导、湍流引发截断跳跃)。并且通过调节 α (跳跃指数)和 γ (截断强度)，灵活量化扩散行为的跨尺度特征。

总之，本文模型在理论合理性(截断避免发散)、物理适用性(流体场耦合)和应用灵活性(参数可调)三方面超越传统模型，为反常扩散研究提供了兼具数学严谨性与工程实用性的新范式。

3.6. 模型的推广应用

本研究所建立的指数截断莱维跳跃连续时间随机漫步(CTRW)模型不仅适用于湍流边界层中的污染物输运问题，还可通过参数调整和理论扩展推广至其他复杂环境或流体动力学条件。以下从不同应用场景及流场特性出发，探讨模型的潜在应用价值[17]。

3.6.1. 大气扩散中的污染物输运

大气扩散受风速、温度分层及地形效应等因素的显著影响。例如，近地面大气边界层中风速的垂直梯度可能导致平流速度的非均匀分布，而温度逆温层会抑制湍流混合，改变跳跃步长的截断特性。通过引入与高度相关的截断参数 $\lambda(z)$ 和莱维指数 $\mu(z)$，可量化不同大气层结下的跳跃行为差异。此外，地形复杂度(如山脉或城市建筑)会引发局部涡旋，此时等待时间分布需结合多尺度幂律衰减，以反映粒子在涡旋中的滞留效应。该模型可为大气污染物(如 PM2.5 或工业废气)的跨区域扩散预测提供理论支持，尤其在突发污染事件中评估污染范围时具有重要应用价值。

3.6.2. 海洋环流与河流混合中的物质输运

海洋环流中存在多尺度涡旋和剪切流，此类复杂流场中物质的输运既受大尺度平流主导，也受小尺度湍流引发的莱维跳跃影响。通过将流场速度分解为平均流与脉动分量，可将平流项与随机跳跃项动态耦合，进而建立适用于非定常流场的扩展 CTRW 模型。在河流混合问题中，河床粗糙度与弯道效应会改变湍流强度，此时指数截断参数 λ 可关联于局部雷诺数，以反映流场能量耗散对跳跃截断的影响。此类推广模型可用于预测微塑料颗粒在近海区域的输运路径或重金属污染物在河流中的扩散规律。

4. 结论

截断通过一个与参数 λ 成反比与参数 c 成正比的量，增大了高斯扩散系数。进一步地，在极限 $\lambda \to 0, X \to \infty$ 下，二阶矩的散度结果是一致的。对于莱维稳定过程，我们可以恢复到通常的分数阶扩散方程，对于莱维稳定过程而言，由于代数衰减尾，它们具有发散矩。截断的莱维过程能够导致有限的矩，能够很好解决矩发散的问题。指数截断参数 λ 的引入有效平衡了莱维过程的长程跳跃特性与物理系统的有限尺度约束。理论分析表明，截断项通过修正扩散系数实现了扩散行为的动态调控：当 $\lambda > 0$ 时，模型退化为标准莱维稳定过程，呈现超扩散特性；随着截断参数 λ 增大截断效应增强，系统逐渐过渡到高斯扩散。这一机制为解释湍流边界层中污染物早期快速扩展与后期受限扩散的竞争现象提供了量化工具。

参考文献

[1] 王旭东. 非均质非齐次系统的反常扩散与非遍历行为分析[D]: [博士学位论文]. 兰州: 兰州大学, 2020.

[2] 邓竞伟. 反常动力学与回火反常动力学的模型与计算方法[D]: [博士学位论文]. 兰州: 兰州大学, 2016.

[3] Montroll, E.W. and Weiss, G.H. (1965) Random Walks on Lattices. II. *Journal of Mathematical Physics*, **6**, 167-181. https://doi.org/10.1063/1.1704269

[4] Metzler, R. and Klafter, J. (2000) The Random Walk's Guide to Anomalous Diffusion: A Fractional Dynamics Approach. *Physics Reports*, **339**, 1-77. https://doi.org/10.1016/S0370-1573(00)00070-3

[5] Jha, R., Kaw, P.K., Kulkarni, D.R. and Parikh, J.C. (2003) Evidence of Lévy Stable Process in Tokamak Edge Turbulence. *Physics of Plasmas*, **10**, 699-704. https://doi.org/10.1063/1.1541607

[6] Dubrulle, B. and Laval, J. (1998) Truncated Lévy Laws and 2D Turbulence. *The European Physical Journal B*, **4**, 143-146. https://doi.org/10.1007/s100510050362

[7] Bruno, R., Sorriso-Valvo, L., Carbone, V. and Bavassano, B. (2004) A Possible Truncated-Lévy-Flight Statistics Recovered from Interplanetary Solar-Wind Velocity and Magnetic-Field Fluctuations. *Europhysics Letters* (*EPL*), **66**, 146-152. https://doi.org/10.1209/epl/i2003-10154-7

[8] Mantegna, R.N. and Stanley, H.E. (1995) Scaling Behaviour in the Dynamics of an Economic Index. *Nature*, **376**, 46-49. https://doi.org/10.1038/376046a0

[9] 周甜. 时间连续随机游走以及莱维游走的随机重置[D]: [硕士学位论文]. 兰州: 兰州大学, 2019: 15-18.

[10] 侯茹. 反应反常扩散和非遍历动力学: 模型、理论及应用[D]: [博士学位论文]. 兰州: 兰州大学, 2019: 15-27.

[11] Foister, R.T. and Van de Ven, T.G.M. (1980) Diffusion of Brownian Particles in Shear Flows. *Journal of Fluid Mechanics*, **96**, 105-132. https://doi.org/10.1017/s0022112080002042

[12] Liron, N. and Rubinstein, J. (1984) Calculating the Fundamental Solution to Linear Convection-Diffusion Problems. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **44**, 493-511. https://doi.org/10.1137/0144033

[13] Sato, K. (2013) Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions. Cambridge University Press.

[14] 李勇. 关于非均匀环境中 Lévy 噪声诱导的次扩散及其遍历性破缺的研究[D]: [硕士学位论文]. 昆明: 云南大学, 2018.

[15] Kolmogorov, A.N. (1941) The Local Structure of Turbulence in Incompressible Viscous Fluid for Very Large Reynolds Numbers. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, **30**, 301-305.

[16] Mazzino, A. and Rosti, M.E. (2021) Unraveling the Secrets of Turbulence in a Fluid Puff. *Physical Review Letters*, **127**, Article ID: 094501. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.127.094501

[17] Tyukhova, A., Dentz, M., Kinzelbach, W., *et al.* (2016) Mechanisms of Anomalous Dispersion in Flow Through Heterogeneous Porous Media. *Physical Review Fluids*, **1**, Article ID: 074002. https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.1.074002