Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(4), 14-21
Published Online April 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.154104

Hans汉斯

马尔可夫跳变非线性系统在离散时间状态下的相关研究

杨　路

重庆理工大学理学院，重庆

收稿日期：2025年2月22日；录用日期：2025年3月20日；发布日期：2025年4月9日

摘　要

本文主要对离散时间正马尔可夫跳变非线性系统(PMJNS)的随机稳定性进行研究。首先对离散时间正马尔可夫跳变非线性系统随机稳定性的一些定义进行介绍。然后利用多重极大可分Lyapunov函数方法，给出了离散时间正马尔可夫跳变非线性系统的一些随机稳定性判据，以及离散时间正马尔可夫跳变线性系统(PMJLS)的一些相应判据。与以往要求子系统稳定或边缘稳定的结论不同，得到的结果允许一些子系统是不稳定的。基于所提出的准则，离散时间正马尔可夫跳变系统的随机稳定性行为可以由系统函数的代数性质和马尔可夫链的概率特征得到。

关键词

马尔可夫跳变系统，随机稳定性，非线性系统

Correlation Study of Discrete Time for Markovian Jump Nonlinear Systems

Lu Yang

School of Science, Chongqing University of Technology, Chongqing

Received: Feb. 22nd, 2025; accepted: Mar. 20th, 2025; published: Apr. 9th, 2025

Abstract

In this paper, the stochastic stability of discrete-time positive Markovian jump nonlinear systems (PMJNS) is studied. First, some definitions of stochastic stability of discrete-time positive Markovian jump nonlinear systems are introduced. Then, some stochastic stability criteria for discrete-time positive Markovian jump nonlinear systems are given by using the method of multiple maximal separable Lyapunov functions. And some corresponding criteria for discrete-time positive Markovian

文章引用: 杨路. 马尔可夫跳变非线性系统在离散时间状态下的相关研究[J]. 理论数学, 2025, 15(4): 14-21.
DOI: 10.12677/pm.2025.154104

jump linear systems (PMJLS). Unlike previous conclusions that require subsystem stability or edge stability, the results obtained allow some subsystems to be unstable based on the proposed criteria, the stochastic stability behavior of discrete-time positive Markovian jump systems can be obtained from the algebraic properties of the system functions and the probabilistic characteristics of Markov chains.

Keywords

Markov Jump Systems, Stochastic Stability, Nonlinear Systems

1. 引言

本文对离散时间正马尔可夫跳变非线性系统的随机稳定性进行了研究，给出了仅凭非线性系统函数的代数性质和马尔可夫链的概率特征便可判断系统稳定性的判据。其中正系统是一种动态系统，当初始条件为非负时，输入、输出和状态变量被约束为非负。这种系统最初是由 Luenberger [1]提出的，如今，我们已经可以在许多领域发现这种系统，如生物、制药、多智能体系统、网络控制等。由于它们的重要性和广泛的适用性，这些系统也得到了广泛的研究。在稳定性[2] [3]、鲁棒稳定性[4] [5]、故障检测[6] [7]、饱和控制[8]、模型预测控制[9]、正滤波[10] [11]等方面都有较为全面的研究成果。

在实践中，正系统可能在各种环境因素的某些子系统之间表现出切换现象。到目前为止，关于切换正线性系统[12] [13]和切换正非线性系统[14] [15]已经做了大量的工作。马尔可夫跳变系统是随机切换系统的一个重要模型，它在描述随机切换现象方面具有更多的优势。对于正马尔可夫跳变线性系统的研究，Bolzern 等人给出了一些随机稳定性的概念和相应充分条件[16]。文献[17]使用马尔可夫链对双通道时延进行建模，提出一种网络预测控制算法，基于模型预测控制方法来补偿双通道时延，给出系统随机稳定性的充分条件以及状态反馈控制器设计方法，并在直线开关磁阻电机测试平台上进行了实验验证。文献[18]针对具有时延的正马尔可夫跳变系统，通过构建一个新的 Lyapunov-Krasovskii 泛函，给出一种新的与时延相关的随机稳定性判据，并设计了一个状态反馈控制器，通过仿真结果证明了所提出的控制方法能够有效的降低保守性。[19]中证明了如果线性切换系统的状态矩阵是 Lie-代数可解的，则系统对于任意切换信号都将表现出渐近稳定性，这为切换系统的渐近稳定性提供了一个充分条件。对于 $PMJNS$ 的研究，也有一些和[20] [21]一样的结果。但是，这些结果中的非线性主要表现为扰动和线性约束并且它们是以线性的方式处理的。只有在[22]中考虑了具有随机切换信号的连续时间非线性正系统的随机稳定性，并作为随机切换的特例给出了 $PMJNS$ 的随机稳定性判据。因此， $PMJNS$ 需要进一步研究。

齐次系统是一类特殊的非线性系统[23]，它具有一般非线性系统的行为，但动力学行为却相对简单。因此，齐次正系统得到了广泛的研究，并在[4] [22] [24]中已经给出了许多结果。基于[14]中离散时间切换齐次正系统的稳定性和[16]中 $PMJLS$ 的随机稳定性研究，本文将考虑离散时间 $PMJNS$ 的全局概率渐近稳定性($GASiP$)和全局均值渐近稳定性($GASiM$)，并在非线性中表现出齐次性。我们在许多应用中都遇到离散时间切换正系统，因此，研究离散时间切换正系统的稳定性问题具有重要意义。目前，对于稳定的离散时间切换正系统，现有的结果要求系统中的所有子系统必须稳定或至少是边际稳定[13]。在本文中，对于正马尔可夫跳变系统，可以允许某些子系统不稳定。为了给出我们的主要结果，充分利用多重

最大可分 $Lyapunov$ 函数和加权 l_∞ 范数的性质来克服由马尔可夫跳变参数引入的耦合项产生的影响。结果表明，仅从非线性系统函数的代数性质和马尔可夫链的概率特征就可以判断离散时间 $PMJNS$ 的随机稳定性。此外，还给出了离散时间 $PMJLS$ 的 $GASiP$ 和 $GASiM$ 的判据。

本文的其余部分组织如下。第 2 节提供离散时间正系统的一些符号、定义和初步结果。第 3 节给出主要结果。首先对离散时间 $PMJNS$ 进行解释，并给出相应的随机意义上的稳定性定义。在此基础上，给出了离散时间 $PMJNS$ 随机稳定的充分条件。此外，对于离散时间 $PMJLS$，给出了随机稳定性的充分条件作为推论，并举出一个实例验证结论的有效性。最后，在第 4 部分得出了一些结论。

2. 注释和说明

本文中非负实数集、自然数集、含 0 自然数集分别用 R_+, N, N_0 表示；R_+^n 表示 R^n 中 n 维正实空间，$R_+^n=\left\{x=\left(x_1,x_2,\cdots x_n\right)^T\in R^n:\ x_i\ge 0, i\in I_n\right\}$，$T$ 为转置，$I_n=\{1,2,\cdots n\}$。$\|\cdot\|_p$ 为 R^n 中 p 范数，最大范数定义为 $\|\cdot\|_\infty$。加权 l_∞ 范数定义为 $\|x\|_\infty^v=\max\limits_{1\le i\le n}\left\{\dfrac{|x_i|}{v_i}\right\}, 0\prec i\in R^n$。除特别说明外，本文讨论的向量均为列向量。复合函数 $\psi\circ\phi(\cdot)=\psi(\phi(\cdot))$。K 类函数为连续函数，定义为 $\{\gamma:\ R_+^n, \gamma(0)=0\}$，$\gamma$ 严格递增。K_∞ 类函数为 K 中无界函数。KL 类函数 $\beta:\ R_+^2\to R_+$，其中第一个过程为 K 类函数，在第二个过程中减小至 0。

定义 2.1 [24]

$\phi:\ R_+^n\to R_+^n$ 是关于 α 齐次，若 $\phi(\rho(x))=\rho^\alpha\phi(x)$ 对 $\forall x\in R_+^n, \rho\in R, \rho\succ 0$。若 $\alpha=1$，ϕ 称为1齐次。

定义 2.2 [24]

定义 $g:\ R^n\to R^{n\times m}$ 在 R_+^n 上保序，若对 $\forall x,y\in R_+^n, g(x)\ge g(y)$，都有 $x\ge y$。

考虑以下离散时间 n 维马尔可夫跳变非线性系统

$$x(k+1)=f\left(x(k),r_k\right), k\in N_0 \tag{1}$$

$x(k)\in R^n$ 是系统状态，$r_k, k\in N_0$ 是离散时间马尔可夫过程，取值为有限集 $\mathrm{P}=\{1,2,\cdots N\}$，转移概率 $P\{r_{k+1}=q|r_k=p\}=\lambda_{pq}, p,q\in P$，转移概率矩阵 $\Lambda=\left(\lambda_{pq}\right)_{n\times n}$

$x(k,x_0,r_0)$ 表示初始时刻为 $k_0=0$ 时 k 的状态，$x(0)=x_0=\left(x_{01},x_{02},\cdots,x_{0n}\right)^T$，初始为 r_0。

假设 2.3，对 $\forall p\in P$，向量场 $f(\cdot,p)$ 在 R^n 上连续，在 R_+^n 上一次齐次且保序。

假设 2.3 暗示马尔可夫跳变系统(1)是正的且存在零解[14]。与连续时间正系统的随机稳定性定义类似，下面介绍离散时间正系统的随机稳定性定义。

定义 2.4 [22]

PMJNS (1)的平衡点 $x=0$ 是全局渐近概率稳定(*GASiP*)的，若对 $\forall\varepsilon\succ 0$，存在正向量 $v\in R^n$ 和一类 KL 函数 $\beta(\cdot,\cdot)$ 使得对 $\forall x_0\in R_+^n/\{0\}$ 和 $r_0\in P$，都有

$$P\left\{x(k,x_0,r_0)\le\beta\left(\|x_0\|_\infty,k\right)v\right\}\ge 1-\varepsilon, \forall k\in N_0 \tag{2}$$

定义 2.5 [16]

PMJNS (1)的平衡点 $x=0$ 是全局渐近均方稳定(*GASiM*)的，若存在正向量 $v\in R^n$ 和一类 KL 函数 $\beta(\cdot,\cdot)$ 使得对 $\forall x_0\in R_+^n/\{0\}$ 和 $r_0\in P$，都有

$$E\left[x(k,x_0,r_0)\right]\le\beta\left(\|x_0\|_\infty,k\right)v, \forall k\in N_0 \tag{3}$$

在上述定义中，若存在正实数 a 和 b 使得 $\beta(r,s)=a\times re^{-bs}$，则称为全局概率指数稳定(*GESiP*)和全局均方指数稳定(*GESiM*)。

3. 主要结果

对于正非线性系统，常采用极大可分 *Lyapunov* 函数法进行稳定性分析。其中 Lyapunov 函数$V(x)$满足以下属性：

1) $V(x)$是满足稳定性判据条件的一个正定的标量函数，且对 x 具有连续的一阶偏导数。

2) 对于给定系统，如果$V(x)$是可找到的，则通常是非唯一的。

3) $V(x)$函数仅表示系统在平衡状态附近某邻域内局部运动的稳定情况。

本文采用多重极大可分 *Lyapunov* 函数法对 *PMJNS* 进行随机稳定性分析。对于 *PMJNS* (1)的第 p 个子系统，由 *Lyapunov* 函数的属性，极大可分 *Lyapunov* 函数记为

$$V(x,p)=\max_{1\le i\le n}\left\{\frac{x_i(k)}{\nu_{pi}}\right\},p\in P \tag{4}$$

标量函数$V(\cdot,p)$：$R_+\to R_+,\nu_{pi}\succ 0$对$\forall p\in P,i\in I_n$。设 k 时刻模态为 p，在 $k+1$时刻，系统跃迁到任意模态 $q\in Q$ 的概率为 λ_{pq}。

取$V(x(k),r_k)$的差值为：

$$\Delta V(x(k),r_k)=E\left[V(x(k+1)),r_{k+1}\middle|x(k),r_k=p\right]-V(x(k),r_k) \tag{5}$$

得到第一个结果如下

定理 3.1

设假设 2.3 成立。若对 $\forall p\in P$，存在向量 $\nu_p=(\nu_{p1},\nu_{p2},\cdots,\nu_{pn})^T\succ 0$ 和常数 $\alpha\in(0,1)$，使得对 $\forall i\in I_n$，都有

$$\sum_{q=1}^{N}\left[\left(\max_{1\le i\le n}\left\{\frac{f_i(\nu_q,q)}{\nu_{qi}}\right\}\mu-\alpha\right)\lambda_{pq}\right]\le 0 \tag{6}$$

则系统(1)是全局概率渐近稳定和全局概率指数稳定。其中 $\mu=\max_{1\le i\le n}\left\{\frac{\bar{\nu}_i}{\underline{\nu}_i}\right\}$，$\bar{\nu}_i=\max_{p\in P}\{\nu_{pi}\}$，$\underline{\nu}_i=\max_{q\in Q}\{\nu_{qi}\}$。

证明：取极大可分 *Lyapunov* 函数

$$V(x(k),r_k)=\max_{1\le i\le n}\left\{\frac{x_i(k)}{\nu_{r_k i}}\right\}=\max_{1\le i\le n}\{V_i(x_i(k),r_k)\} \tag{7}$$

将差分算子应用于联合过程$\{x(k),r(k),k\ge 0\}$，由系统(1)与$\Delta V(x(k),r_k)$显式表达式，可以得到

$$\begin{aligned}\Delta V(x(k),r_k)&=\sum_{q=1}^{N}\left(\max_{1\le i\le n}\{V_i(x_i(k+1),q)\}\right)\lambda_{pq}-\max_{1\le i\le n}\{V_i(x_i(k),p)\}\\&=\sum_{q=1}^{N}\left(\max_{1\le i\le n}\left\{\frac{x_i(k+1)}{\nu_{qi}}\right\}\right)\lambda_{pq}-\max_{1\le i\le n}\left\{\frac{x_i(k)}{\nu_{pi}}\right\}\\&=\sum_{q=1}^{N}\left(\max_{1\le i\le n}\left\{\frac{f_i(x(k),q)}{\nu_{qi}}\right\}\right)\lambda_{pq}-\max_{1\le i\le n}\left\{\frac{x_i(k)}{\nu_{pi}}\right\}\end{aligned} \tag{8}$$

由于 f_p 是齐次且保序的，故有

$$\Delta V(x(k),r_k)+(1-\alpha)V(x(k),r_k)\le\sum_{q=1}^{N}\left(\max_{1\le i\le n}\left\{\frac{f_i(\nu_q,q)}{\nu_{qi}}\right\}\|x(k)\|_\infty^{\nu_q}\right)\lambda_{pq}-\alpha\max_{1\le i\le n}\left\{\frac{x_i(k)}{\nu_{pi}}\right\}$$

$$\le \sum_{q=1}^{N}\left(\max_{1\le i\le n}\left\{\frac{f_i\left(v_q,q\right)}{v_{qi}}\right\}\left\|x(k)\right\|_{\infty}^{v_q}\right)\lambda_{pq}-\alpha\left\|x(k)\right\|_{\infty}^{v_p} \tag{9}$$

对 $\forall p,q\in \mathrm{P}$，有

$$\left\|x(k)\right\|_{\infty}^{v_q}=\max_{1\le i\le n}\left\{\frac{x_i(k)}{v_{qi}}\right\}=\max_{1\le i\le n}\left\{\frac{v_{pi}}{v_{qi}}\cdot\frac{x_i(k)}{v_{pi}}\right\}\le\frac{\overline{v}_i}{\underline{v}_i}\cdot\left\|x(k)\right\|_{\infty}^{v_p}=\mu\left\|x(k)\right\|_{\infty}^{v_p} \tag{10}$$

将(10)式代入(9)式，并将加权范数以转移概率展开可得

$$\begin{aligned}\Delta V\left(x(k),r_k\right)+(1-\alpha)V\left(x(k),r_k\right)&\le\sum_{q=1}^{N}\left(\max_{1\le i\le n}\left\{\frac{f_i\left(v_q,q\right)}{v_{qi}}\right\}\mu\left\|x(k)\right\|_{\infty}^{v_p}\right)\lambda_{pq}-\alpha\sum_{q=1}^{N}\lambda_{pq}\left\|x(k)\right\|_{\infty}^{v_p}\\&=\sum_{q=1}^{N}\left(\max_{1\le i\le n}\left\{\frac{f_i\left(v_q,q\right)}{v_{qi}}\right\}\mu-\alpha\right)\lambda_{pq}\left\|x(k)\right\|_{\infty}^{v_p}\end{aligned} \tag{11}$$

由于转移概率 $\lambda_{pq}\succ 0$，结合(6)式可得

$$\Delta V\left(x(k),r_k\right)+(1-\alpha)V\left(x(k),r_k\right)\le 0 \tag{12}$$

将(5)式 *Lyapunov* 差值函数代入(12)式并取期望后整理可得

$$E\left[V\left(x(k+1),r_{k+1}\right)\right]\le\alpha E\left[V\left(x(k),r_k\right)\right] \tag{13}$$

用归纳法对(13)式进行迭代可得

$$E\left[V\left(x(k),r_k\right)\right]\le\alpha^k V\left(x_0,r_0\right),\ k\in N_0 \tag{14}$$

结合极大可分 *Lyapunov* 函数定义与加权 l_∞ 范数定义可得

$$E\left[\left\|x(k)\right\|_{\infty}^{v_{rk}}\right]\le\alpha^k V\left(x_0,r_0\right)=\alpha^k\left\|x_0\right\|_{\infty}^{v_{r0}}\le\frac{1}{\underline{v}_{r0}}\alpha^k\left\|x_0\right\|_{\infty}=\tilde{\beta}\left(\left\|x_0\right\|_{\infty},k\right) \tag{15}$$

常量 $\underline{v}_{r0}=\min\limits_{i\in I_n}\left\{v_{r0i}\right\}$。

对 $\forall\varepsilon\in(0,1)$，设 $\beta=\dfrac{\tilde{\beta}}{\varepsilon}\in\mathrm{KL}$，由(8)与切雪比夫不等式，对 $\forall k\in N_0$，有

$$P\left\{\ \left\|x(k)\right\|_{\infty}^{v_{rk}}\ge\beta\left(\left\|x_0\right\|_{\infty},k\right)\ \right\}\le\frac{E\left[\left\|x(k)\right\|_{\infty}^{v_{rk}}\right]}{\beta\left(\left\|x_0\right\|_{\infty},k\right)}\prec\varepsilon \tag{16}$$

由加权 l_∞ 范数定义，结合(2)式可得

$$P\left\{x\left(k,x_0,r_0\right)\le\beta\left(\left\|x_0\right\|_{\infty},k\right)\overline{v}\right\}\ge 1-\varepsilon,\ \forall k\in N_0 \tag{17}$$

其中 $\overline{v}=\left(\overline{v}_1,\overline{v}_2,\cdots,\overline{v}_n\right)^T$。故系统(1)是 *GASiP* 和 *GESiP*。

注释 3.2

由(8)的估计解，有 $E\left[x\left(k,x_0,r_0\right)\right]\le\tilde{\beta}\left(\left\|x_0\right\|_{\infty},k\right)\overline{v}$，由定义 2.5，故 *PMJNS* (1)是 *GASiM* 和 *GESiM*。

由定理 3.1，我们可以得到两个更严格且更容易验证的结论。

推论 3.3

设假设 2.3 成立，若对 $\forall p\in P$，存在向量 $v_p=\left(v_{p1},v_{p2},\cdots,v_{pn}\right)^T\succ 0$ 与常量 $\alpha\in(0,1)$，使得对 $\forall i\in I_n$，

有 $\sum_{q=1}^{N}\lambda_{pq}\left(f_i\left(v_q,q\right)\mu-\alpha v_{qi}\right)\le 0$，即

$$\sum_{q=1}^{N}\lambda_{pq}\left(f\left(v_q,q\right)\mu-\alpha v_q\right)\le 0 \tag{18}$$

则系统(1)是全局概率渐近稳定和全局概率指数稳定。

推论 3.4

设假设 2.3 成立，若对 $\forall p\in P$，存在向量 $v_p=\left(v_{p1},v_{p2},\cdots,v_{pn}\right)^T\succ 0$ 与常量 $\alpha\in\left(0,1\right)$。

使得对 $\forall i\in I_n$，有 $f_i\left(v_p,p\right)\mu-\alpha v_{pi}\le 0$，即

$$f\left(v_p,p\right)\mu-\alpha v_p\le 0 \tag{19}$$

则系统(1)是全局概率渐近稳定和全局概率指数稳定。

注释 3.5

在[14]中研究了一类连续时间和离散时间切换正非线性系统(SPNS)的稳定性问题，并由结果可知 SPNS 的稳定性等价于正向量的存在性，且满足 $f_p\left(v_p\right)\le v_p$ (非线性)，$A_pv_p\le v_p$ (线性)。在[22]中研究了具有随机开关信号的连续时间非线性正系统的随机稳定性，由[22]中定理 3.3 可得 *PMJNS* 的随机稳定性需要满足：存在正向量 v_p，使得 $f_p\left(v_p\right)+\lambda_0 v_p\prec 0$ ($\lambda_0\succ 0$)。由[14]和[22]的结果可以看出，当要求整个混合系统稳定时，每个子系统都需要是稳定的，如推论 3.4。但由定理 3.1 与推论 3.3 可知，由于转移概率的影响，某些子系统可以为不稳定的。

作为 *PMJNS* 的一个特例，考虑 *PMJLS*

$$x\left(k+1\right)=A_{rk}x\left(k\right) \tag{20}$$

若对 $\forall p\in P, A_p=\left[a_{pij}\right]_{n\times n}$ 是非负的，则假设 2.3 易满足，故有定理 3.1 的特殊情况。

推论 3.6

对于每个 $p\in P$ 且具有非负矩阵 A_p 的 *PMJL S*(12)，若对 $\forall p\in P$，存在向量 $v_p=\left(v_{p1},v_{p2},\cdots,v_{pn}\right)^T\succ 0$ 和常量 $\alpha\in\left(0,1\right)$，使得

$$\sum_{q=1}^{N}\lambda_{pq}\left(\max_{1\le i\le n}\left\{\frac{A_{qi}V_q}{V_{qi}}\right\}\mu-\alpha\right)\le 0 \tag{21}$$

则系统(12)是 *GASiP* (*GESiP*)和 *GASiM* (*GESiM*)，μ 同定理 3.1 中定义。

与推论 3.3，3.4 相似，若(13)被替换为

$$\sum_{q=1}^{N}\lambda_{pq}\left(A_q v_q\mu-\alpha v_q\right)\le 0 \tag{22}$$

或

$$A_q v_q\mu-\alpha v_q\le 0 \tag{23}$$

则系统(12)是 *GASiP* (*GESiP*)和 *GASiM* (*GESiM*)。

注释 3.7

对于正马尔可夫跳变系统的稳定性，由(13)可以看出，马尔可夫切换的转移概率会影响正向量的选择；由(15)可以看出，若存在正向量使得(15)成立，则对任意马尔可夫跳变过程，系统(12)的稳定性总是成立。

实例 3.8

考虑系统(1)，其中两个子系统为

$$f_1(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}\dfrac{x_1x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\\ 0.5x_2\end{pmatrix},\quad f_2(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}0.5x_1\\ \dfrac{x_1x_2}{\sqrt{2x_1^2+3x_2^2}}\end{pmatrix}$$

且 f_1, f_2 都是一次齐次与保序的，两个子系统间的马尔可夫切换为 $P=\{1,2\}$，转移概率矩阵 $M=\begin{pmatrix}0.6 & 0.4\\ 0.4 & 0.6\end{pmatrix}$。存在 $v_1=v_2=(1,1)$，$\mu=1$，$\alpha=\dfrac{4}{5}$ 使得(18)，(19)成立。故系统(1)是全局概率指数稳定和全局均方指数稳定的。

4. 结论

本文研究了一类具有齐次性质的离散时间 *PMJNS* 的随机稳定性问题。在此过程中，引入了多重最大可分 *Lyapunov* 函数，并利用它们之间的相互关系克服了马尔可夫跳变参数引起的耦合项的存在。利用该方法，给出的准则允许随机稳定马尔可夫跳正系统的某些子系统是不稳定的。同时，根据随机稳定性判据，我们可以从非线性系统函数的代数性质和马尔可夫链的概率特征来判断系统的稳定性。

参考文献

[1] Luenberger, D. (1979) Introduction to Dynamic Systems. Wiley.

[2] Li, S. and Xiang, Z. (2016) Stochastic Stability Analysis and l∞-Gain Controller Design for Positive Markov Jump Systems with Time-Varying Delays. *Nonlinear Analysis*: *Hybrid Systems*, **22**, 31-42. https://doi.org/10.1016/j.nahs.2016.02.004

[3] De Leenheer, P. and Aeyels, D. (2001) Stabilization of Positive Linear Systems. *Systems & Control Letters*, **44**, 259-271. https://doi.org/10.1016/s0167-6911(01)00146-3

[4] Zhang, N., Sun, Y. and Zhao, P. (2017) State Bounding for Homogeneous Positive Systems of Degree One with Time-Varying Delay and Exogenous Input. *Journal of the Franklin Institute*, **354**, 2893-2904. https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2017.01.031

[5] Zhao, Y. and Meng, F. (2019) Input-to-State Stability of Nonlinear Positive Systems. *International Journal of Control*, *Automation and Systems*, **17**, 3058-3068. https://doi.org/10.1007/s12555-018-0715-4

[6] Shafai, B., Oghbaee, A. and Nazari, S. (2016) Robust Fault Detection for Positive Systems. 2016 *IEEE* 55*th Conference on Decision and Control* (*CDC*), Las Vegas, 12-14 December 2016, 6470-6476. https://doi.org/10.1109/cdc.2016.7799265

[7] Xiang, M. and Xiang, Z. (2014) Robust Fault Detection for Switched Positive Linear Systems with Time-Varying Delays. *ISA Transactions*, **53**, 10-16. https://doi.org/10.1016/j.isatra.2013.07.013

[8] Wang, J. and Zhao, J. (2016) Stabilisation of Switched Positive Systems with Actuator Saturation. *IET Control Theory & Applications*, **10**, 717-723. https://doi.org/10.1049/iet-cta.2015.0064

[9] Zhang, J., Cai, X., Zhang, W. and Han, Z. (2015) Robust Model Predictive Control with ℓ1-Gain Performance for Positive Systems. *Journal of the Franklin Institute*, **352**, 2831-2846. https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2015.05.007

[10] Chen, X., Lam, J. and Li, P. (2014) Positive Filtering for Continuous-Time Positive Systems Under L1 Performance. *International Journal of Control*, **87**, 1906-1913. https://doi.org/10.1080/00207179.2014.893587

[11] Trindade Nascimento, F. and Cunha, J.P.V.S. (2019) Positive Filter Synthesis for Sliding-Mode Control. *IET Control Theory & Applications*, **13**, 1006-1014. https://doi.org/10.1049/iet-cta.2018.5293

[12] Gurvits, L., Shorten, R. and Mason, O. (2007) On the Stability of Switched Positive Linear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **52**, 1099-1103. https://doi.org/10.1109/tac.2007.899057

[13] Ju, Y. and Sun, Y. (2020) Stabilization of Discrete-Time Switched Positive Linear Systems via Weak Switched Linear Copositive Lyapunov Function. *Automatica*, **114**, Article 108836. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2020.108836

[14] Dong, J. (2015) Stability of Switched Positive Nonlinear Systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **26**, 3118-3129. https://doi.org/10.1002/rnc.3495

[15] Li, S. and Xiang, Z. (2016) Stabilisation of a Class of Positive Switched Nonlinear Systems under Asynchronous

Switching. *International Journal of Systems Science*, **48**, 1537-1547. https://doi.org/10.1080/00207721.2016.1271916

[16] Bolzern, P., Colaneri, P. and De Nicolao, G. (2014) Stochastic Stability of Positive Markov Jump Linear Systems. *Automatica*, **50**, 1181-1187. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2014.02.016

[17] Shi, Y. and Yu, B. (2009) Output Feedback Stabilization of Networked Control Systems with Random Delays Modeled by Markov Chains. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **54**, 1668-1674. https://doi.org/10.1109/tac.2009.2020638

[18] Fei, Z., Gao, H. and Shi, P. (2009) New Results on Stabilization of Markovian Jump Systems with Time Delay. *Automatica*, **45**, 2300-2306. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2009.06.020

[19] Liberzon, D., Hespanha, J.P. and Morse, A.S. (1999) Stability of Switched Systems: A Lie-Algebraic Condition. *Systems & Control Letters*, **37**, 117-122. https://doi.org/10.1016/s0167-6911(99)00012-2

[20] Lian, J., Li, S. and Liu, J. (2018) T-S Fuzzy Control of Positive Markov Jump Nonlinear Systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **26**, 2374-2383. https://doi.org/10.1109/tfuzz.2017.2778694

[21] Ren, C. and He, S. (2019) Sliding Mode Control for a Class of Nonlinear Positive Markov Jumping Systems with Uncertainties in a Finite-Time Interval. *International Journal of Control, Automation and Systems*, **17**, 1634-1641. https://doi.org/10.1007/s12555-018-0793-3

[22] Zhao, P., Zhao, Y. and Song, X. (2020) Stochastic Stability of Nonlinear Positive Systems with Random Switching Signals. *Nonlinear Analysis*: *Hybrid Systems*, **38**, Article 100940. https://doi.org/10.1016/j.nahs.2020.100940

[23] Aeyels, D. and De Leenheer, P. (2002) Extension of the Perron—Frobenius Theorem to Homogeneous Systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **41**, 563-582. https://doi.org/10.1137/s0363012900361178

[24] Feyzmahdavian, H.R., Charalambous, T. and Johansson, M. (2014) Exponential Stability of Homogeneous Positive Systems of Degree One with Time-Varying Delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **59**, 1594-1599. https://doi.org/10.1109/tac.2013.2292739