

一类具有时空时滞的“食物有限”种群模型的波前解的局部稳定性

王军蕊, 张国宝, 杜婷婷

西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州

收稿日期: 2025年3月4日; 录用日期: 2025年4月7日; 发布日期: 2025年4月17日

摘 要

本文主要研究了一类具有时空时滞的“食物有限”种群模型的波前解的稳定性。利用线性化算子的谱分析, 证明了波前解在有界一致连续函数空间中是不稳定的。但是, 当波前解的初始扰动属于某个指数加权函数空间时, 波前解是渐近稳定的。

关键词

食物有限种群模型, 波前解, 局部稳定性, 时空时滞

Local Stability of Traveling Wavefronts for a “Food-Limited” Population Model with Spatio-Temporal Delay

Junrui Wang, Guobao Zhang, Tingting Du

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Mar. 4th, 2025; accepted: Apr. 7th, 2025; published: Apr. 17th, 2025

Abstract

This paper is concerned with the stability of traveling wavefronts for a “food-limited” population model with spatio-temporal delay. By the spectral analysis of the linearized operators, we show that the traveling wavefronts are essentially unstable in the space of bounded and uniformly continuous functions. However, if the initial perturbations of the traveling wavefronts belong to certain exponential weighted spaces, then we prove that the traveling wavefronts are asymptotically stable in the exponential weighted spaces.

文章引用: 王军蕊, 张国宝, 杜婷婷. 一类具有时空时滞的“食物有限”种群模型的波前解的局部稳定性[J]. 理论数学, 2025, 15(4): 221-233. DOI: 10.12677/pm.2025.154125

Keywords

Food-Limited Population Model, Traveling Wavefronts, Local Stability, Spatio-Temporal Delay

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

本文主要考虑如下的“食物有限”种群模型

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + u(x,t) \left(\frac{1 - (f * u)(x,t)}{1 + \gamma (f * u)(x,t)} \right), \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \quad (1.1)$$

其中, $u(x,t)$ 表示在空间位置 x 和时刻 t 处的单个物种的生物种群密度, 参数 $\gamma > 0$ 。卷积项 $f * u$ 定义为

$$(f * u)(x,t) := \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y, t-s) u(y,s) dy ds, \quad (1.2)$$

其中, 核函数 f 满足

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t) dx dt = 1.$$

经典的时滞“食物有限”种群模型考虑的都是生物种群个体过去一段时间对当前状态的影响, 并没有考虑个体在过去所有时间的各个可能位置都会对当前状态产生影响, 即时间-空间的非局部(又称时空时滞或非局部时滞)。基于空间加权平均思想[1]和特征线方法[2], 可以将这种非局部归结为卷积项 $\int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y, t-s) u(y,s) dy ds$ 。因此, 具有时空时滞的模型(1.1)更具实际意义[3]。数学上, 非局部项 $f * u$ 的出现可以显著地改变无非局部项的偏微分方程(1.1)的解的性质。因此, 本文将探讨具有时空时滞的“食物有限”种群模型(1.1)的波前解的局部稳定性。显然, 模型(1.1)具有常数稳态解 $u \equiv 0$ 和 $u \equiv 1$ 。

在空间齐次情形下, 如果时滞不存在, 则模型(1.1)的原型为如下方程

$$\frac{du(t)}{dt} = ru(t) \frac{K - u(t)}{K + \gamma u(t)}, \quad (1.3)$$

其中, $u(t)$ 表示 t 时刻单个物种的生物种群密度, r 是内禀增长率, K 是环境容纳量, r, K, γ 均为正数。方程(1.3)是 Smith 在文献[4]中首次提出的水蚤种群的数学模型, 其推导和讨论可参看文献[5]。之后, 该方程也被用于研究环境毒物对种群的影响[6]。把时滞引入(1.3), 则可得如下的时滞“食物有限”种群模型

$$\frac{du(t)}{dt} = ru(t) \frac{K - u(t-\tau)}{K + \gamma u(t-\tau)}, \quad \tau > 0. \quad (1.4)$$

Gopalsamy 等人在[7]中证明了如果 $r\tau e^{r\tau} < 1$, 则(1.4)的正平衡解 $u = K$ 是全局稳定的。在文献[8]中, 他们进一步研究了系数 r 和 γ 为 t 的周期函数的情形。So 和 Yu 在文献[9]中对更一般的时滞“食物有限”种群模型证明了解的全局稳定性。

目前, 已经有很多工作致力于研究具有空间扩散的“食物有限”模型[3][10]-[13]。1999年, Feng 和 Lu [11]研究了标量时滞反应扩散方程

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - Au(x,t) = r(x)u(x,t) \frac{K(x) - au(x,t) - bu(x,t-\tau)}{K(x) + a\gamma(x)u(x,t) + b\gamma(x)u(x,t-\tau)}, \quad (1.5)$$

其中, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω 是有界的, 算子

$$A = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{i,j}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n \beta_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

是一致强椭圆的, 其系数函数在 $\overline{\Omega}$ 中一致 Hölder 连续。显然, 这包括通常在反应扩散方程中看到的算子 $A = \nabla^2$ (拉普拉斯算子)。后来, Feng 和 Lu [12] 进一步研究了时滞和无时滞的“食物有限”模型(1.5), 在一般边界条件下(包括零-狄利克雷和零-诺伊曼边界条件), 建立了非零稳态(可能与 x 有关)的全局收敛结果。

众所周知, 在反应扩散方程的研究中, 行波解得到了学者们的广泛关注。这是因为它可以很好地呈现方程解的振荡现象以及扰动以有限速度传播的现象, 参见[14]。数学上, 行波解是方程的一类特殊的解, 形如 $u(x,t) = \varphi(x-ct)$, 其中 c 为传播速度, φ 表示波形或波廓。这类解是一类在空间中以常数波速沿一定方向传播且波形保持不变的解。如果选取核函数 f 为

$$f(x,t) = \delta(x)\delta(t-\tau),$$

其中 $\delta(x)$ 为狄拉克 delta 函数, Gourley 在文献[10]中证明了对于任意的 $c > 2$, 存在一个 $\tau^* > 0$, 使得当 $\tau < \tau^*$ 时, 模型(1.1)存在连接平衡点 0 和平衡点 1 的单调波前解。他所采用的方法为 Wu 和 Zou 在[15]中提出的上下解方法。对于弱时滞核,

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (1.6)$$

Gourley 和 Chaplain 在[3]中证明了当 $c \geq 2$ 和 $\tau > 0$ 足够小时, 模型(1.1)存在单调波前解。Wang 和 Li 在[13]中通过选择 4 个特殊核函数, 分别建立了模型(1.1)的单调波前解存在的标准。对于强时滞核,

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \frac{t}{\tau^2} e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (1.7)$$

Wei 等人[16]利用几何奇异摄动理论和 Fredholm 二择一定理(见[17])建立了模型(1.1)的波前解的存在性, 并利用标准的渐近理论得到了波前解的渐近行为。其他关于时空时滞方程行波解的存在性的研究, 读者可以参见文献[18]-[21]。

据我们所知, 具有时滞核(1.6)或(1.7)的“食物有限”种群模型(1.1)的波前解的稳定性, 目前还没有相关结果。在过去的几十年里, 人们已经对反应扩散方程的行波解的稳定性进行了广泛的研究, 参考文献[22]-[32]。本文将采用谱分析的方法来研究具有时滞核(1.6)的模型(1.1)的单稳波前解的稳定性。首先利用线性链技术将非局部时滞方程(1.1)转化为无时滞的二维系统, 然后研究无时滞系统的波前解在无穷远处的渐近行为, 最后, 证明模型(1.1)的单稳波前解的稳定性。研究结果表明, 模型(1.1)的单稳波前解在有界一致连续函数空间中是不稳定的, 但是, 在某些指数加权空间中是稳定的。

本文的其余部分组织如下。第 2 节给出一些预备知识, 并陈述主要的结果。第 3 节讨论模型(1.1)的波前解的渐近行为。第 4 节致力于研究模型(1.1)的波前解的局部稳定性。

2. 预备知识和主要结果

本节给出一些预备知识, 并陈述局部不稳定和稳定性结果。令 $v(x,t) := (f * u)(x,t)$. 易得 $v(x,t)$ 满足

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{\tau}(u - v).$$

则积分微分方程(1.1)可以改写为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \left(\frac{1-v}{1+\gamma v} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{\tau}(u - v). \end{cases} \quad (2.1)$$

显然, 系统(2.1)不是一个时滞系统。很容易看出, 如果 u 是(1.1)的解, 则 (u, v) 是(2.1)的解。反之, 如果 (u, v) 是(2.1)的解, 则 u 是(1.1)的解。

相应地, (1.1)的平衡点 0 和 1 变为(2.1)的 $(0, 0)$ 和 $(1, 1)$ 。系统(2.1)的行波解是形如 $(u, v)(x, t) = (U, V)(z)$ 的解, 其中 $z = x - ct$ 。通常, 称 c 为波速, (U, V) 为波廓。如果 U 和 V 都是单调的, 则 $(U, V)(z)$ 被称为波前解。将 $(u, v)(x, t) = (U, V)(z)$ 代入系统(2.1)中, 得到如下具有渐近边界条件的波廓系统

$$\begin{cases} 0 = U''(z) + cU'(z) + U \left(\frac{1-V}{1+\gamma V} \right), \\ 0 = V''(z) + cV'(z) + \frac{1}{\tau}(U - V), \\ (U, V)(-\infty) = (1, 1), \quad (U, V)(+\infty) = (0, 0). \end{cases} \quad (2.2)$$

系统(2.2)的单调解的存在性已由 Gourley 和 Chaplain 在文献[3] [定理 2.2]中被证明, 也可以参考[13] [注 3.20]。

引理 2.1 对任意固定的 $c \geq 2$, 当时滞 $\tau > 0$ 充分小时, 系统(2.2)存在一个单调递减的波前解 $(U, V)(x - ct)$ 。

我们将 $(u(x, t), v(x, t))$ 的系统(2.1)重新改写为具有移动坐标 $z = x - ct$ 的 $(\tilde{u}(x, t), \tilde{v}(x, t)) = (u(z + ct, t), v(z + ct, t)) \equiv (u(x, t), v(x, t))$ 的系统, 并为了方便起见, 去掉波浪线,

$$\begin{cases} u_t = u_{zz} + cu_z + u \left(\frac{1-v}{1+\gamma v} \right), \\ v_t = v_{zz} + cv_z + \frac{1}{\tau}(u - v). \end{cases} \quad (2.3)$$

显然, (2.2)的解 (U, V) 是(2.3)的稳态解。下面将定义一些下文需考虑的函数空间。

定义 2.2 定义 $BUC(R) := \{p: R \rightarrow R^2 \mid p \text{ 是有界且一致连续的}\}$, 其具有上确界范数 $\|\cdot\|_\infty$ 和

$$BUC_\sigma(R) := \{p: R \rightarrow R^2 \mid p(z), (1 + e^{\sigma z})p(z) \in BUC(R)\},$$

其中 $\sigma > 0$ 常数。 $BUC_\sigma(R)$ 上定义加权范数如下

$$\|p\|_\sigma := \sup_{z \in R} |(1 + e^{\sigma z})p(z)|.$$

显然, 当 $\sigma = 0$ 时, $BUC_\sigma(R) = BUC(R)$ 。当 $\sigma > 0$ 时, 加权函数空间 $BUC_\sigma(R)$ 比函数空间 $BUC(R)$ 要小。

定理 2.3 假设 τ 充分小, 初始函数 $(u(x, 0), v(x, 0)) = (u_0(x), v_0(x))$ 满足 $(0, 0) \leq (u_0(x), v_0(x)) \leq (1, 1)$ 。

则下面的断言成立。

(1) 波速为 $c > 2$ 的波前解 (U, V) 在空间 $B \cup C(\mathbb{R})$ 中关于范数 $\|\cdot\|_\infty$ 是不稳定的。

(2) 波速为 $c > 2$ 的波前解 (U, V) 在空间 $B \cup C_\sigma(\mathbb{R})$ 中关于范数 $\|\cdot\|_\sigma$ 是指数稳定的, 其中 σ 是正常数满足

$$\frac{c - \sqrt{c^2 - 4}}{2} < \sigma < \frac{c + \sqrt{c^2 - 4}}{2}. \quad (2.4)$$

即如果存在充分小的 $\delta > 0$, 使得对于任意 $(u_0, v_0)(\cdot) \in B \cup C_\sigma(\mathbb{R})$ 满足

$(u_0(\cdot), v_0(\cdot)) - (U(\cdot), V(\cdot)) \in (B \cup C_\sigma(\mathbb{R}))$ 和 $\|(u_0(\cdot), v_0(\cdot)) - (U(\cdot), V(\cdot))\|_\sigma < \delta$, 则系统 (2.3) 的初值为 $(u_0(x), v_0(x))$ 的唯一解 $(u(z, t), v(z, t))$ 满足 $(u(\cdot, t), v(\cdot, t)) - (U(\cdot), V(\cdot)) \in B \cup C_\sigma(\mathbb{R})$ 且

$$\|(u(\cdot, t), v(\cdot, t)) - (U(\cdot), V(\cdot))\|_\sigma \leq k e^{-lt}, \quad \forall t \geq 0.$$

这里, k 和 l 是与初值 $(u_0(x), v_0(x))$ 无关的正常数。

3. 波前解的渐近行为

众所周知, 系统(2.1)的波前解 (U, V) 在 $\pm\infty$ 的渐近行为将决定其在加权函数空间 $B \cup C_\sigma(\mathbb{R})$ 中的稳定性。因此, 本节通过标准渐近理论(参见, 例如 Smith 和 Zhao [30] 和 Lv 和 Wang [33])建立波前解 (U, V) 的渐近行为。

在系统(2.2)中, 对 z 求导可得

$$\begin{cases} U_1'' + cU_1' + U_1 \left(\frac{1-V}{1+\gamma V} \right) - \frac{(1+\gamma)V_1 U}{(1+\gamma V)^2} = 0, \\ V_1'' + cV_1' + \frac{1}{\tau}(U_1 - V_1) = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

因为 $U(+\infty) = V(+\infty) = 0$, 所以系统(3.1)在 $z \rightarrow +\infty$ 时的极限系统为

$$\begin{cases} U_{1+}'' + cU_{1+}' + U_{1+} = 0, \\ V_{1+}'' + cV_{1+}' + \frac{1}{\tau}(U_{1+} - V_{1+}) = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

设

$$U_{1+}' = U_{2+}, \quad V_{1+}' = V_{2+}.$$

则系统(3.2)可以被改写为如下系统

$$\begin{cases} U_{1+}' = U_{2+}, \\ U_{2+}' = -U_{1+} - cU_{2+}, \\ V_{1+}' = V_{2+}, \\ V_{2+}' = -cV_{2+} - \frac{1}{\tau}(U_{1+} - V_{1+}). \end{cases} \quad (3.3)$$

令 $Z_+ = (U_{1+}, U_{2+}, V_{1+}, V_{2+})^T$ 。则系统(3.3)可以改写为如下的向量微分方程

$$Z_+' = AZ_+, \quad (3.4)$$

其中,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\tau} & 0 & \frac{1}{\tau} & -c \end{pmatrix}.$$

求解系统(3.4), 可得

$$Z_+ = (U_{1+}, U_{2+}, V_{1+}, V_{2+})^T = \sum_{i=1}^4 c_i \phi_i e^{\Lambda_i z}, \quad (3.5)$$

其中,

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4}}{2} < 0, & \Lambda_2 &= \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4}}{2} < 0, \\ \Lambda_3 &= \frac{-c + \sqrt{c^2 + \frac{4}{\tau}}}{2} > 0, & \Lambda_4 &= \frac{-c - \sqrt{c^2 + \frac{4}{\tau}}}{2} < 0, \end{aligned}$$

$\phi_i (i=1, 2, 3, 4)$ 是矩阵 A 的对应特征值为 Λ_i 的特征向量, 且 c_i 是任意的常数。因为当 $z \rightarrow +\infty$ 时,

$$(U_{1+}, U_{2+}, V_{1+}, V_{2+})^T \rightarrow (0, 0, 0, 0)^T,$$

所以由(3.5)可得 $c_3 = 0$, 且

$$(U_{1+}, U_{2+}, V_{1+}, V_{2+})^T = c_1 \phi_1 e^{\Lambda_1 z} + c_2 \phi_2 e^{\Lambda_2 z} + c_4 \phi_4 e^{\Lambda_4 z}.$$

因此, 可以得到如下的当 $z \rightarrow +\infty$ 时的渐近行为:

$$\begin{pmatrix} U_1(z) \\ V_1(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1,2,4} \alpha_i (m_i + o(1)) e^{\Lambda_i z} \\ \sum_{i=1,2,4} \alpha_i (n_i + o(1)) e^{\Lambda_i z} \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

其中 $m_i, n_i (i=1, 2, 4)$ 为常数, 且 $\alpha_i (i=1, 2, 4)$ 不能同时为零。这里声明(3.6)中的 $m_i \neq 0$ 且 $n_i \neq 0 (i=1, 2, 4)$ 。如果特征向量 ϕ_i 的第一个分量为零, 则意味着矩阵 A 的其他分量为零。因此, 得 $m_i \neq 0$ 和 $n_i \neq 0$ 。

类似地, 由于 $U(-\infty) = V(-\infty) = 1$, 则(3.1)在 $z \rightarrow -\infty$ 时的极限系统为

$$\begin{cases} U_{1-}'' + cU_{1-}' - \frac{1}{1+\gamma}V_{1-} = 0, \\ V_{1-}'' + cV_{1-}' + \frac{1}{\tau}(U_{1-} - V_{1-}) = 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

设

$$U_{1-}' = U_{2-}, \quad V_{1-}' = V_{2-}.$$

然后将系统(3.7)改写为如下系统

$$\begin{cases} U_{1-}' = U_{2-}, \\ U_{2-}' = \frac{1}{1+\gamma}V_{1-} - cU_{2-}, \\ V_{1-}' = V_{2-}, \\ V_{2-}' = -cV_{2-} - \frac{1}{\tau}(U_{1-} - V_{1-}). \end{cases} \quad (3.8)$$

令 $Z_- = (U_{1-}, U_{2-}, V_{1-}, V_{2-})^T$ 。则系统(3.8)可以重新写为

$$Z'_- = BZ_-, \quad (3.9)$$

其中,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -c & \frac{1}{1+\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\tau} & 0 & \frac{1}{\tau} & -c \end{pmatrix}.$$

求解系统(3.9), 可得

$$Z_- = (U_{1-}, U_{2-}, V_{1-}, V_{2-})^T = \sum_{i=1}^4 d_i \psi_i e^{\tilde{\Lambda}_i z}, \quad (3.10)$$

其中, $\psi_i (i=1, 2, 3, 4)$ 为矩阵 B 的对应特征值为 $\tilde{\Lambda}_i$ 的特征向量, 且 d_i 是任意的常数。通过基本计算, 得到矩阵 B 的特征方程为

$$\tilde{\Lambda}^4 + 2c\tilde{\Lambda}^3 + \left(c^2 - \frac{1}{\tau}\right)\tilde{\Lambda}^2 - \frac{c}{\tau}\tilde{\Lambda} + \frac{1}{\tau(1+\gamma)} = 0. \quad (3.11)$$

对于充分小的 τ 和 $c > 2$, 方程(3.11)有两个负实根, 记为 $\tilde{\Lambda}_1, \tilde{\Lambda}_2$, 和两个正实根, 记为 $\tilde{\Lambda}_3 < \tilde{\Lambda}_4$ 。由于当 $z \rightarrow -\infty$ 时, $(U_{1-}, U_{2-}, V_{1-}, V_{2-})^T \rightarrow (1, 0, 1, 0)^T$, 故我们得到负特征值的相关系数 $d_i = 0 (i=1, 2)$ 。于是, 当 $z \rightarrow -\infty$ 时, 我们推导出以下渐近行为,

$$\begin{pmatrix} U_1(z) \\ V_1(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=3}^4 \tilde{\alpha}_i (\tilde{m}_i + o(1)) e^{\tilde{\Lambda}_i z} \\ \sum_{i=3}^4 \tilde{\alpha}_i (\tilde{n}_i + o(1)) e^{\tilde{\Lambda}_i z} \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

其中 $\tilde{m}_i, \tilde{n}_i (i=3, 4)$ 为常数, 且 $\tilde{\alpha}_i (i=3, 4)$ 不能为零。基于上面的讨论, 可以得到以下引理。

定理 3.1 如果 $c > 2$ 且 τ 充分小, 则存在正常数 A_i 和 $B_i (i=1, 2)$ 使得系统(1.1)的满足(1.6)的波前解 $\Phi(z) = (U(z), V(z))$ 具有以下渐近性质

$$\Phi(z) = \begin{pmatrix} (A_1 + o(1))e^{\Lambda_1 z} \\ (A_2 + o(1))e^{\Lambda_2 z} \end{pmatrix}, \quad z \rightarrow +\infty \quad (3.13)$$

和

$$\Phi(z) = \begin{pmatrix} 1 - (B_1 + o(1))e^{\tilde{\Lambda}_3 z} \\ 1 - (B_2 + o(1))e^{\tilde{\Lambda}_4 z} \end{pmatrix}, \quad z \rightarrow -\infty, \quad (3.14)$$

其中 $\Lambda \in \{\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_4\}$, $\tilde{\Lambda} \in \{\tilde{\Lambda}_3, \tilde{\Lambda}_4\}$ 。

注 3.2 已知 $\Lambda_4 < \Lambda_2 < \Lambda_1 < 0$, 于是, 当 $z \rightarrow +\infty$ 时, $e^{\Lambda_i z}$ 可以控制 $e^{\Lambda_i z} |z|^n$, $i=2, 4$ 和 $0 \leq n \in \mathbb{Z}$ 。因此, 存在 $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^2$ (与 Λ_1 相关)使得

$$\Phi(z) = \begin{pmatrix} (A_1 + o(1))e^{\Lambda_1 z} \\ (A_2 + o(1))e^{\Lambda_1 z} \end{pmatrix}, \quad z \rightarrow +\infty. \quad (3.15)$$

已知 $0 < \tilde{\Lambda}_3 < \tilde{\Lambda}_4$, 则当 $z \rightarrow -\infty$ 时, $e^{\tilde{\Lambda}_i z}$ 可以控制 $e^{\tilde{\Lambda}_i z} |z|^n$, $0 \leq n \in \mathbb{Z}$ 。因此, 存在 $B_1, B_2 \in \mathbb{R}^2$ (与 $\tilde{\Lambda}_3$ 相关)

使得

$$\Phi(z) = \begin{pmatrix} 1 - (B_1 + o(1)e^{\tilde{\Lambda}_3 z}) \\ 1 - (B_2 + o(1)e^{\tilde{\Lambda}_3 z}) \end{pmatrix}, \quad z \rightarrow -\infty, \quad (3.16)$$

可以证明 $\Lambda = \Lambda_1$ 和 $\tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda}_3$, 参考文献[13] [24]。

4. 波前解的稳定性

本节将分别证明系统(2.1)的波前解 (U, V) 在不同函数空间中的不稳定性 and 稳定性。定义

$$\Phi(z) = (U, V)^T(z), \\ D = \text{diag}(1, 1), \quad 0 = (0, 0)^T, \quad 1 = (1, 1)^T.$$

那么由(2.2)得, Φ 满足

$$\begin{cases} D\Phi'' + c\Phi' + F(\Phi) = 0, \\ \Phi(-\infty) = 1, \quad \Phi(+\infty) = 0, \end{cases}$$

其中 $F = (F_1, F_2)^T \in \mathbb{R}^2$ 表示式(2.2)中的非线性项:

$$F_1(\Phi) = U \left(\frac{1-V}{1+\gamma V} \right), \quad F_2(\Phi) = \frac{1}{\tau}(U-V).$$

系统(2.3)的围绕波前解 $\Phi(z)$ 的线性化系统为

$$\begin{cases} \hat{u}_t = \hat{u}_{zz} + c\hat{u}_z + \left(\frac{1-V}{1+\gamma V} \right) \hat{u} - \left(\frac{U(1+\gamma)}{(1+\gamma V)^2} \right) \hat{v}, \\ \hat{v}_t = \hat{v}_{zz} + c\hat{v}_z + \frac{1}{\tau} \hat{u} - \frac{1}{\tau} \hat{v}. \end{cases} \quad (4.1)$$

设 $p = (\hat{u}, \hat{v})^T$ 。显然, 系统(4.1)可以被改写 $p_t = L[p]$, 其中线性算子 L 定义为

$$L[p](z) = Dp''(z) + G_L(z)p'(z) + H_L(z)p(z), \quad (4.2)$$

其中,

$$G_L(z) = cI_2 = c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad H_L(z) = F'(\Phi(z)) = \begin{pmatrix} \frac{1-V}{1+\gamma V} & \frac{U(-1-\gamma)}{(1+\gamma V)^2} \\ \frac{1}{\tau} & -\frac{1}{\tau} \end{pmatrix}.$$

如果线性化算子 L 的谱包含在左半复平面上, 且 0 为简单特征值, 则行波解 $\Phi(z)$ 为线性稳定, 而如果 L 的谱中某些元素的实部为正, 则行波解 $\Phi(z)$ 是不稳定的。我们设 $\sigma(L)$ 为 L 的谱, $\sigma_n(L)$ 为 L 的正规谱, 它包含有限重数的孤立特征值, $\sigma_e(L) := \sigma(L) \setminus \sigma_n(L)$ 为 L 的本质谱。 $\sigma_e(L)$ 的边界可以通过以下引理估计, 参见文献[24] [34]。

引理 4.1 设 $G_L^\pm := G_L(\pm\infty)$, $H_L^\pm := H_L(\pm\infty)$ 和 $S_L^\pm$ 为复平面上的曲线定义为

$$S_L^\pm := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \text{对某个 } \eta \in \mathbb{R}, \det(-\eta^2 D + i\eta G_L^\pm + H_L^\pm - \lambda I_2) = 0 \right\}$$

设 Ω 为复平面上包含 $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{Re } \lambda > \lambda_0\}$ 的连通开集, 其中 λ_0 充分大, $S_L^+ \cup S_L^-$ 为其边界。则有

$$S_L^+ \cup S_L^- \subset \sigma_e(L) \subset S_L^+ \cup S_L^- \cup (\mathbb{C}/\Omega).$$

利用引理 4.1, 可以证明 (U, V) 在 $BUC(\mathbb{R})$ 中是不稳定的。这意味着定理 2.3 (i) 成立。

引理 4.2 (U, V) 在 $BUC(\mathbb{R})$ 中是不稳定的。

证明 易得

$$G_L^\pm := G_L(\pm\infty) = cI_2,$$

$$H_L^\pm := H_L(\pm\infty) = F'(\Phi(\pm\infty)) = \begin{pmatrix} \frac{1-V^\pm}{1+\gamma V^\pm} & \frac{U^\pm(-1-\gamma)}{(1+\gamma V^\pm)^2} \\ \frac{1}{\tau} & -\frac{1}{\tau} \end{pmatrix}.$$

更准确地,

$$H_L^- = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{1+\gamma} \\ \frac{1}{\tau} & -\frac{1}{\tau} \end{pmatrix}, \quad H_L^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\tau} & -\frac{1}{\tau} \end{pmatrix}.$$

则可得

$$-\eta^2 D + i\eta G_L^+ + H_L^+ - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} -\eta^2 + i\eta c + 1 - \lambda & 0 \\ \frac{1}{\tau} & -\eta^2 + i\eta c - \frac{1}{\tau} - \lambda \end{pmatrix}$$

且

$$-\eta^2 D + i\eta G_L^- + H_L^- - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} -\eta^2 + i\eta c - \lambda & -\frac{1}{1+\gamma} \\ \frac{1}{\tau} & -\eta^2 + i\eta c - \frac{1}{\tau} - \lambda \end{pmatrix}.$$

由引理 4.1, 分别计算

$$\det(-\eta^2 D + i\eta G_L^\pm + H_L^\pm - \lambda I_2) = 0$$

可得 $S_L^\pm$ 如下

$$S_L^+ = \left\{ \lambda \left| \begin{array}{l} \operatorname{Re} \lambda = -\left(\frac{\operatorname{Im} \lambda}{c}\right)^2 + 1 \\ \operatorname{Re} \lambda = -\left(\frac{\operatorname{Im} \lambda}{c}\right)^2 - \frac{1}{\tau} \end{array} \right. \right\}$$

和

$$S_L^- = \left\{ \lambda \left| \begin{array}{l} \operatorname{Re} \lambda = -\left(\frac{\operatorname{Im} \lambda}{c}\right)^2 - \frac{1}{2\tau} + \frac{\sqrt{\frac{1}{\tau^2} - \frac{4}{\tau} + \gamma}}{2} \\ \operatorname{Re} \lambda = -\left(\frac{\operatorname{Im} \lambda}{c}\right)^2 - \frac{1}{2\tau} - \frac{\sqrt{\frac{1}{\tau^2} - \frac{4}{\tau} + \gamma}}{2} \end{array} \right. \right\}.$$

事实上, 若 $\det(-\eta^2 D + i\eta G_L^+ + H_L^+ - \lambda I_2) = 0$, 则

$$-\eta^2 + i\eta c + 1 - \lambda = 0 \text{ 或 } -\eta^2 + i\eta c - \frac{1}{\tau} - \lambda = 0.$$

即, $-\eta^2 + i\eta c + 1 - \operatorname{Re} \lambda - i \operatorname{Im} \lambda = 0$ 或 $-\eta^2 + i\eta c - \frac{1}{\tau} - \operatorname{Re} \lambda - i \operatorname{Im} \lambda = 0$. 由第一个等式可得,

$$\operatorname{Re} \lambda = -\eta^2 + 1 \text{ 和 } \operatorname{Im} \lambda = \eta c. \text{ 从 } \operatorname{Im} \lambda = \eta c \text{ 解得 } \eta = \frac{\operatorname{Im} \lambda}{c}, \text{ 并把它代入 } \operatorname{Re} \lambda = -\eta^2 + 1 \text{ 得 } \operatorname{Re} \lambda = -\left(\frac{\operatorname{Im} \lambda}{c}\right)^2 + 1.$$

同理, 由第二等式可得 $\operatorname{Re} \lambda = -\left(\frac{\operatorname{Im} \lambda}{c}\right)^2 - \frac{1}{\tau}$. 由引理 4.1, 本质谱 $\sigma_e(L)$ 包含在四条

抛物线 $S_L^\pm$ 及其围出的内部区域。易得

$$\sup_{\lambda \in \sigma_e(L)} \operatorname{Re} \lambda = \max \left\{ 1, -\frac{1}{\tau}, -\frac{1}{2\tau} + \frac{\sqrt{\frac{1}{\tau^2} - \frac{4}{\tau} + \frac{1}{\gamma}}}{2}, -\frac{1}{2\tau} - \frac{\sqrt{\frac{1}{\tau^2} - \frac{4}{\tau} + \frac{1}{\gamma}}}{2} \right\} > 0.$$

因此, 由文献[35]中第 5 章的定理 3.1 可得 (U, V) 在 Lyapunov 意义下在空间 $B \cup C(\mathbb{R})$ 中是不稳定的。证毕。

接下来, 将证明系统(2.1)的波前解 (U, V) 在加权函数空间 $B \cup C_\sigma(\mathbb{R})$ (其中 $\sigma > 0$) 中是稳定的。定义算子 $T: B \cup C_\sigma(\mathbb{R}) \rightarrow B \cup C(\mathbb{R})$ 如下:

$$Tp(z) = (1 + e^{\sigma z})p(z).$$

进一步, 我们定义

$$\tilde{L} := TLT^{-1}. \quad (4.3)$$

如果 $L: B \cup C_\sigma(\mathbb{R}) \rightarrow B \cup C_\sigma(\mathbb{R})$, 则 $\tilde{L}: B \cup C(\mathbb{R}) \rightarrow B \cup C(\mathbb{R})$ 。易见, $\sigma(L) = \sigma(\tilde{L})$ 。因此, 在研究 $B \cup C_\sigma(\mathbb{R})$ 中的谱问题时, 总是考虑 $\tilde{L}p = \lambda p$, $p \in B \cup C(\mathbb{R})$ 。正如[35]中所示, $\tilde{L}$ 可以表示为

$$\tilde{L}p = Dp'' + G_L(z)p' + H_L(z)p,$$

其中 $p = (\hat{u}, \hat{v})^T$,

$$G_L(z) = cI_2 - 2g_1(z)D, \quad H_L(z) = h_1(z)D - cg_1(z)I_2 + H_L(z)$$

和

$$g_1(z) = \frac{\sigma e^{\sigma z}}{1 + e^{\sigma z}}, \quad h_1(z) = \frac{\sigma^2 e^{\sigma z} (e^{\sigma z} - 1)}{(1 + e^{\sigma z})^2}.$$

引理 4.3 如果 σ 满足(2.4), 则 $\sup_{\lambda \in \sigma_e(\tilde{L})} \operatorname{Re} \lambda < 0$ 。

证明 定义

$$S_L^\pm := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \det(-\eta^2 D + i\eta G_L^\pm + H_L^\pm - \lambda I_2) = 0 \right\},$$

其中 $G_L^\pm := G_L(\pm\infty)$, $H_L^\pm := H_L(\pm\infty)$ 。则由(4.4)式可以得到

$$\begin{aligned} g_1(z) &\rightarrow \sigma, \quad h_1(z) \rightarrow \sigma^2 \text{ 当 } z \rightarrow +\infty, \\ g_1(z) &\rightarrow 0, \quad h_1(z) \rightarrow 0 \text{ 当 } z \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

这意味着当 $z \rightarrow -\infty$ 时, 权重不起作用。因此, 我们有

$$G_L^- = cI_2, \quad H_L^- = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{1+\gamma} \\ \frac{1}{\tau} & -\frac{1}{\tau} \end{pmatrix}$$

和

$$G_L^+ = (c-2\sigma)I_2, \quad H_L^+ = \begin{pmatrix} \sigma^2 - c\sigma + 1 & 0 \\ \frac{1}{\tau} & \sigma^2 - c\sigma - \frac{1}{\tau} \end{pmatrix}.$$

于是, 可以得到

$$\begin{aligned} & -\eta^2 D + i\eta G_L^+ + H_L^+ - \lambda I_2 \\ &= \begin{pmatrix} -\eta^2 + i\eta(c-2\sigma) + \sigma^2 - c\sigma + 1 - \lambda & 0 \\ \frac{1}{\tau} & -\eta^2 + i\eta(c-2\sigma) + \sigma^2 - c\sigma - \frac{1}{\tau} - \lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

和

$$-\eta^2 D + i\eta G_L^- + H_L^- - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} -\eta^2 + i\eta c - \lambda & -\frac{1}{1+\gamma} \\ \frac{1}{\tau} & -\eta^2 + i\eta c - \frac{1}{\tau} - \lambda \end{pmatrix}.$$

因此,

$$S_L^+ = \left\{ \lambda \left| \begin{aligned} \operatorname{Re} \lambda &= -\left(\frac{\operatorname{Im} \lambda}{c-2\sigma} \right)^2 + \sigma^2 - c\sigma + 1 \\ \operatorname{Re} \lambda &= -\left(\frac{\operatorname{Im} \lambda}{c-2\sigma} \right)^2 + \sigma^2 - c\sigma - \frac{1}{\tau} \end{aligned} \right. \right\}$$

且 $S_L^- = S_L^-$ 。因此, 本质谱 $\sigma_e(\tilde{L})$ 包含在四个抛物线 $S_L^\pm$ 所包围的区域中。对足够小 τ , 为了得到 $\sup_{\lambda \in \sigma_e(\tilde{L})} \operatorname{Re} \lambda < 0$, 需要选择 σ 使 S_L^+ 的抛物线的顶点小于 0。由于 (2.4) 成立且 $c > 2$, 故得 $\sigma^2 - c\sigma + 1 < 0$ 。因此,

$$\max \left\{ \sigma^2 - c\sigma + 1, \sigma^2 - c\sigma - \frac{1}{\tau} \right\} < 0.$$

证毕。

根据引理 4.3, $\sigma_e(\tilde{L})$ 的所有本质谱都有负实部。现在需要证明 $\sigma_n(\tilde{L})$ 的所有正规谱都有负实部。

引理 4.4 如果 σ 满足 (2.4), 则下列结论成立。

(i) 当 $\operatorname{Re} \lambda > 0$ 时, 不存在 $\lambda \in \sigma_n(\tilde{L})$ 。

(ii) $0 \notin \sigma_n(\tilde{L})$ 。

证明(i) 根据引理 2.1, 我们知道 $\Phi' < 0$, 这意味着 $w(z) := -(1 + e^{\sigma z})\Phi'(z)$ 是满足 $\tilde{L}w = 0$ 的正函数。由 [35] 的第 4 章的定理 5.1 得, 当 $\operatorname{Re} \lambda > 0$ 时, 不存在 $\lambda \in \sigma_n(\tilde{L})$ 。

(ii) 由定理 3.1 和注 3.2 可得

$$\Phi(z) = \begin{pmatrix} (A_1 + o(1))e^{\Lambda_1 z} \\ (A_2 + o(1))e^{\Lambda_1 z} \end{pmatrix}, \quad z \rightarrow +\infty.$$

由于 $\sigma + \Lambda_1 > 0$, 故有

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} (1 + e^{\sigma z}) \Phi'(z) \neq 0.$$

然后, 应用[35]的第4章的定理5.1, 我们得到 $0 \notin \sigma_n(\tilde{L})$ 。证毕。

定理 2.3 (ii) 的证明 如文献[35]的第5章中的引理2.1, 利用 $(\lambda I - \tilde{L})^{-1}$ 的预解估计, 可以获得 $\tilde{L}$ 生成一个解析半群 $e^{\tilde{L}t}$ 。进一步, 利用[35]的定理1.2或第5章的定理2.1所给出的标准理论: 线性稳定性隐含着渐近稳定性, 可得 (U, V) 在 $BUC_\sigma(\mathbb{R})$ 中是无平移意义下指数稳定的。证毕。

注4.5 定理2.3只得到了波速 $c > 2$ 的波前解的指数稳定性, 但是波速 $c = 2$ 的波前解的稳定性依然是未知的, 这是由于波速 $c = 2$ 的波前解具有不同的渐近行为。为了获得波速 $c = 2$ 的波前解的稳定性, 需要考虑波的其他类型的扰动, 选择更加合适的函数空间。该问题我们留待后文探讨。

基金项目

国家自然科学基金(12261081)。

参考文献

- [1] Britton, N.F. (1990) Spatial Structures and Periodic Travelling Waves in an Integro-Differential Reaction-Diffusion Population Model. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **50**, 1663-1688. <https://doi.org/10.1137/0150099>
- [2] Smith, H.L. and Thieme, H.R. (1991) Strongly Order Preserving Semiflows Generated by Functional Differential Equations. *Journal of Differential Equations*, **93**, 332-363. [https://doi.org/10.1016/0022-0396\(91\)90016-3](https://doi.org/10.1016/0022-0396(91)90016-3)
- [3] Gourley, S.A. and Chaplain, M.A.J. (2002) Travelling Fronts in a Food-Limited Population Model with Time Delay. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, **132**, 75-89. <https://doi.org/10.1017/s0308210500001530>
- [4] Smith, F.E. (1963) Population Dynamics in *Daphnia Magna* and a New Model for Population Growth. *Ecology*, **44**, 651-663. <https://doi.org/10.2307/1933011>
- [5] Pielou, E.C. (1969) *An Introduction to Mathematical Ecology*. Wiley.
- [6] Hallam, T.G. and de Luna, J.T. (1984) Effects of Toxicants on Populations: A Qualitative. *Journal of Theoretical Biology*, **109**, 411-429. [https://doi.org/10.1016/s0022-5193\(84\)80090-9](https://doi.org/10.1016/s0022-5193(84)80090-9)
- [7] Gopalsamy, K., Kulenović, M.R.S. and Ladas, G. (1988) Time Lags in a “Food-Limited” Population. *Applicable Analysis*, **31**, 225-237. <https://doi.org/10.1080/00036818808839826>
- [8] Gopalsamy, K., Kulenović, M.R.S. and Ladas, G. (1990) Environmental Periodicity and Time Delays in a “Food-Limited” Population Model. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **147**, 545-555. [https://doi.org/10.1016/0022-247x\(90\)90369-q](https://doi.org/10.1016/0022-247x(90)90369-q)
- [9] So, J.W. and Yu, J.S. (1995) On the Uniform Stability for a “Food-Limited” Population Model with Time Delay. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, **125**, 991-1002. <https://doi.org/10.1017/s0308210500022605>
- [10] Gourley, S.A. (2001) Wave Front Solutions of a Diffusive Delay Model for Populations of *Daphnia Magna*. *Computers & Mathematics with Applications*, **42**, 1421-1430. [https://doi.org/10.1016/s0898-1221\(01\)00251-6](https://doi.org/10.1016/s0898-1221(01)00251-6)
- [11] Feng, W. and Lu, X. (1999) On Diffusive Population Models with Toxicants and Time Delays. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **233**, 373-386. <https://doi.org/10.1006/jmaa.1999.6332>
- [12] Feng, W. and Lu, X. (2003) Global Periodicity in a Class of Reaction-Diffusion Systems with Time Delays. *Discrete & Continuous Dynamical Systems—B*, **3**, 69-78. <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2003.3.69>
- [13] Wang, Z. and Li, W. (2007) Monotone Travelling Fronts of a Food-Limited Population Model with Nonlocal Delay. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **8**, 699-712. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2006.03.001>
- [14] 叶其孝, 李正元, 王明新, 吴雅萍. 反应扩散方程引论[M]. 北京: 科学出版社, 2011.
- [15] Wu, J. and Zou, X. (2001) Traveling Wave Fronts of Reaction-Diffusion Systems with Delay. *Journal of Dynamics and*

- Differential Equations*, **13**, 651-687.
- [16] Wei, J., Tian, L., Zhou, J., Zhen, Z. and Xu, J. (2017) Existence and Asymptotic Behavior of Traveling Wave Fronts for a Food-Limited Population Model with Spatio-Temporal Delay. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, **34**, 305-320. <https://doi.org/10.1007/s13160-017-0244-1>
 - [17] Fenichel, N. (1979) Geometric Singular Perturbation Theory for Ordinary Differential Equations. *Journal of Differential Equations*, **31**, 53-98. [https://doi.org/10.1016/0022-0396\(79\)90152-9](https://doi.org/10.1016/0022-0396(79)90152-9)
 - [18] 梁飞, 高洪俊. 非局部时滞反应扩散方程行波解的存在性[J]. 数学物理学报, 2011, 31(5): 135-143.
 - [19] Wang, Z., Li, W. and Ruan, S. (2006) Travelling Wave Fronts in Reaction-Diffusion Systems with Spatio-Temporal Delays. *Journal of Differential Equations*, **222**, 185-232. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2005.08.010>
 - [20] 吴事良. 非局部时滞反应扩散方程的行波解和渐近传播速度[D]: [博士学位论文]. 西安: 西安电子科技大学, 2009.
 - [21] 张建明, 彭亚红. 具有非局部反应的时滞扩散 Nicholson 方程的行波解[J]. 数学年刊, 2006, 27(6): 771-778.
 - [22] Alhasanat, A. and Ou, C. (2019) Stability of Traveling Waves to the Lotka-Volterra Competition Model. *Complexity*, **2019**, Article ID: 6569520. <https://doi.org/10.1155/2019/6569520>
 - [23] Chang, C. (2018) The Stability of Traveling Wave Solutions for a Diffusive Competition System of Three Species. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **459**, 564-576. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2017.10.013>
 - [24] Chang, C., Hsu, C. and Yang, T. (2020) Traveling Wavefronts for a Lotka-Volterra Competition Model with Partially Nonlocal Interactions. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, **71**, Article No. 70. <https://doi.org/10.1007/s00033-020-1289-6>
 - [25] Chen, X. (1997) Existence, Uniqueness, and Asymptotic Stability of Traveling Waves in Nonlocal Evolution Equations. *Advances in Differential Equations*, **2**, 125-160. <https://doi.org/10.57262/ade/1366809230>
 - [26] Mei, M., So, J.W.-., Li, M.Y. and Shen, S.S.P. (2004) Asymptotic Stability of Travelling Waves for Nicholson's Blowflies Equation with Diffusion. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, **134**, 579-594. <https://doi.org/10.1017/s0308210500003358>
 - [27] Mei, M., Lin, C., Lin, C. and So, J.W.-. (2009) Traveling Wavefronts for Time-Delayed Reaction-Diffusion Equation: (II) Nonlocal Nonlinearity. *Journal of Differential Equations*, **247**, 511-529. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2008.12.020>
 - [28] Mei, M., Zhang, K.J. and Zhang, Q.F. (2019) Global Stability of Traveling Waves with Oscillations for Nicholson's Blowflies Equation. *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, **16**, 375-397.
 - [29] Sattinger, D.H. (1976) On the Stability of Waves of Nonlinear Parabolic Systems. *Advances in Mathematics*, **22**, 312-355. [https://doi.org/10.1016/0001-8708\(76\)90098-0](https://doi.org/10.1016/0001-8708(76)90098-0)
 - [30] Smith, H.L. and Zhao, X. (2000) Global Asymptotic Stability of Traveling Waves in Delayed Reaction-Diffusion Equations. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **31**, 514-534. <https://doi.org/10.1137/s0036141098346785>
 - [31] Wu, S., Zhao, H. and Liu, S. (2010) Asymptotic Stability of Traveling Waves for Delayed Reaction-Diffusion Equations with Crossing-monostability. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, **62**, 377-397. <https://doi.org/10.1007/s00033-010-0112-1>
 - [32] Zhang, G. (2019) Global Stability of Non-Monotone Traveling Wave Solutions for a Nonlocal Dispersal Equation with Time Delay. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **475**, 605-627. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.02.058>
 - [33] Lv, G. and Wang, M. (2010) Existence, Uniqueness and Asymptotic Behavior of Traveling Wave Fronts for a Vector Disease Model. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **11**, 2035-2043. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2009.05.006>
 - [34] Henry, D. (1981) Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations. Lecture Notes in Mathematics, vol. 840. Springer.
 - [35] Volpert, A.I., Volpert, V.A. and Volpert, V.A. (1994) Traveling Wave Solutions of Parabolic Systems. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 140. American Mathematical Society.