Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(4), 234-242
Published Online April 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.154126

Hans汉斯

半空间上Choquard方程的Liouville型定理

蔡千春

广西师范大学数学与统计学院，广西 桂林

收稿日期：2025年3月6日；录用日期：2025年4月7日；发布日期：2025年4月17日

摘 要

本文研究半空间上Choquard方程
$$\begin{cases} -\Delta u(y)=\int_{\partial\mathbb{R}_+^N}\dfrac{|u(\bar{x},0)|^p}{|(\bar{x},0)-y|^{N-\alpha}}\mathrm{d}\bar{x}\,|u(y)|^{p-2}u(y),\ y\in\mathbb{R}_+^N \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(\bar{x},0)=\int_{\mathbb{R}_+^N}\dfrac{|u(y)|^p}{|(\bar{x},0)-y|^{N-\alpha}}\mathrm{d}y\,|u(\bar{x},0)|^{p-2}u(\bar{x},0),(\bar{x},0)\in\partial\mathbb{R}_+^N \end{cases}$$
应用积分形式的移动平面法，证明了在参数p的一定取值条件下，该方程不存在非平凡正解。

关键词

Choquard方程，移动平面法，Liouville型定理

Liouville-Type Theorem for Choquard Equation in Half-Space

Qianchun Cai

School of Mathematics and Statistics, Guangxi Normal University, Guilin Guangxi

Received: Mar. 6th, 2025; accepted: Apr. 7th, 2025; published: Apr. 17th, 2025

Abstract

This paper investigates the Choquard equation in a half-space setting
$$\begin{cases} -\Delta u(y)=\int_{\partial\mathbb{R}_+^N}\dfrac{|u(\bar{x},0)|^p}{|(\bar{x},0)-y|^{N-\alpha}}\mathrm{d}\bar{x}\,|u(y)|^{p-2}u(y),\ y\in\mathbb{R}_+^N \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(\bar{x},0)=\int_{\mathbb{R}_+^N}\dfrac{|u(y)|^p}{|(\bar{x},0)-y|^{N-\alpha}}\mathrm{d}y\,|u(\bar{x},0)|^{p-2}u(\bar{x},0),(\bar{x},0)\in\partial\mathbb{R}_+^N \end{cases}$$
. By applying the method of moving

文章引用: 蔡千春. 半空间上 Choquard 方程的 Liouville 型定理[J]. 理论数学, 2025, 15(4): 234-242.
DOI: 10.12677/pm.2025.154126

planes in integral form, it is demonstrated that under certain conditions on the parameter p, the equation has no nontrivial positive solutions.

Keywords

Choquard Equation, Method of Moving Planes, Liouville-Type Theorem

1. 引言

Choquard 方程首先于 1976 年被 P. Choquard 提出，也被称为非线性的 Schrodinger-Newton 方程[1]，Choquard 方程在量子力学、统计物理和凝聚态物理中有着重要的应用[2]-[4]，因此研究 Choquard 方程解的存在性结果与非存在性结果有着重要的意义。

在过去的几年中，移动平面法对于证明椭圆方程正解的非存在性结果的证明[5]-[7]，起到了很大的作用。传统的移动平面法的工具是椭圆方程的最大值原理，但是由于 Choquard 方程卷积项的影响，直接应用最大值原理面临极大的困难，因为非局部项的影响以及非线性项仅仅是连续的，因此不能直接应用通常的最大值原理，所以我们用积分不等式代替最大值原理，目前这种方法已经广泛应用于椭圆方程的移动平面法[8] [9]。在最近一篇论文[10]中，给出了全空间 Choquard 方程

$$-\Delta u(x)=\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(y)|^p}{|x-y|^{N-\alpha}}\mathrm{d}y|u(x)|^{p-2}u(x),x\in\mathbb{R}^N \tag{1.1}$$

非平凡正解的非存在性，其中 p 满足 $1<p<\dfrac{N+\alpha}{N-2}$。从椭圆方程先验界的角度来看，为了用爆破方法得到有界区域上的方程解的先验界，通常需要全空间上的 Liouville 型定理和半空间上的 Liouville 型定理，因此本文参考一篇[11]的做法，给全空间增加边界条件，在此条件下得到半空间解的性质，同样给 Choquard 方程加上边界条件，有

$$\begin{cases}-\Delta u(y)=\int_{\partial\mathbb{R}_+^N}\dfrac{|u(\bar{x},0)|^p}{|(\bar{x},0)-y|^{N-\alpha}}\mathrm{d}\bar{x}|u(y)|^{p-2}u(y),y\in\mathbb{R}_+^N,\\ \dfrac{\partial u}{\partial v}(\bar{x},0)=\int_{\mathbb{R}_+^N}\dfrac{|u(y)|^p}{|(\bar{x},0)-y|^{N-\alpha}}\mathrm{d}y|u(\bar{x},0)|^{p-2}u(\bar{x},0),(\bar{x},0)\in\partial\mathbb{R}_+^N.\end{cases} \tag{1.2}$$

接下来我们有定理 1.1 成立，其中证明过程在 2、3 章给出。

定理 1.1 假定 u 是方程(1.2)的非负弱解，$\max\{p,N-2\}<\alpha<N$，满足 $1<p<\dfrac{2N-2}{N-2}$ 时，那么有 $u\equiv0$。

接下来的章节给出定理 1.1 证明，我们证明的主要思路是，先利用经过 Kelvin 变换后方程(1.2)的解在无穷远处衰减的性质，得到解与其对称点的大小关系，这是为了得出强极值原理效果一样的不等式关系。再利用移动平面法，得出解关于平行于 x_N 轴的每一个平面都是对称的性质。最后把解代入方程，得到所要证明的结论。

2. 准备工作与积分不等式

如前所述，由于卷积的影响，直接对方程(1.2)应用移动平面法存在较大的困难，为此我们先把方程化为微分方程与积分方程组成的方程组。我们定义

$$\begin{cases} m(y)=\int_{\partial\mathbb{R}_+^N}\dfrac{|u(\bar{x},0)|^p}{|(\bar{x},0)-y|^{N-\alpha}}\mathrm{d}\bar{x}, \\ n(\bar{x})=\int_{\mathbb{R}_+^N}\dfrac{|u(y)|^p}{|(\bar{x},0)-y|^{N-\alpha}}\mathrm{d}y. \end{cases} \tag{2.1}$$

那么由(2.1)的定义得方程(1.2)等价于下面的方程

$$\begin{cases} -\Delta u(y)=m(y)|u(y)|^{p-2}u(y), y\in\mathbb{R}_+^N, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(\bar{x},0)=n(\bar{x})|u(\bar{x},0)|^{p-2}u(\bar{x},0),(\bar{x},0)\in\partial\mathbb{R}_+^N. \end{cases} \tag{2.2}$$

我们最终的目标是方程组(2.2)的每一个解，关于平行于 x_N 轴的每一个平面都是对称的，由于我们无法排除卷积项的影响，因此不能直接应用移动平面法。我们对 u，m，n 做 Kelvin 变换，利用它们在无穷远点的衰减性，得到经过 Kelvin 变换后 u，m，n 的对称性。下面我们先定义 u，m，n 的 Kelvin 变换。对任意的 $x_p=(\bar{x}_p,0)\in\partial\mathbb{R}_+^N$，我们定义 u，m，n 在 x_p 点的 Kelvin 变换为

$$v(x)=\frac{1}{|x-x_p|^{N-2}}u\left(\frac{x-x_p}{|x-x_p|^2}+x_p\right),w(x)=\frac{1}{|x-x_p|^{N-\alpha}}m\left(\frac{x-x_p}{|x-x_p|^2}+x_p\right),z(\bar{x})=\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}_p|^{N-\alpha}}n\left(\frac{\bar{x}-\bar{x}_p}{|\bar{x}-\bar{x}_p|^2}+\bar{x}_p\right),$$

不失一般性地假设 $x_p=0$。直接计算可知，Kelvin 变换以后的函数 v，w，z 满足下面的方程组

$$\begin{cases} w(y)=\int_{\partial\mathbb{R}_+^N}\dfrac{\left||\bar{x}|^{N-2}v(\bar{x},0)\right|^p}{|(\bar{x},0)-y|^{N-\alpha}|\bar{x}|^{N-2+\alpha}}\mathrm{d}\bar{x}, \qquad y\in\mathbb{R}_+^N, \\ z(\bar{x})=\int_{\mathbb{R}_+^N}\dfrac{\left||y|^{N-2}v(y)\right|^p}{|(\bar{x},0)-y|^{N-\alpha}|y|^{N+\alpha}}\mathrm{d}y, \qquad (\bar{x},0)\in\partial\mathbb{R}_+^N\setminus\{0\}, \\ -\Delta v(y)=\dfrac{1}{|y|^{\alpha+2}}w(y)\left||y|^{N-2}v(y)\right|^{p-2}|y|^{N-2}v(y), \qquad y\in\mathbb{R}_+^N, \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu}(\bar{x},0)=\dfrac{1}{|\bar{x}|^{\alpha}}z(\bar{x})\left||\bar{x}|^{N-2}v(\bar{x},0)\right|^{p-2}|\bar{x}|^{N-2}v(\bar{x},0), \quad (\bar{x},0)\in\partial\mathbb{R}_+^N\setminus\{0\}. \end{cases} \tag{2.3}$$

有了 Kelvin 变换以后，我们再引入移动平面过程中要用到的一些记号。假定 $\lambda>0$，我们记

$$\Sigma_\lambda=\left\{x\in\mathbb{R}_+^N \mid x_1>\lambda\right\},\partial\Sigma_\lambda=\left\{x\in\partial\mathbb{R}_+^N \mid x_1>\lambda\right\},T_\lambda=\left\{x\in\mathbb{R}_+^N \mid x_1=\lambda\right\}.$$

对任意的 $x\in\Sigma_\lambda$，我们记 x^λ 为 x 关于平面 T_λ 的平面对称点，即

$$x^\lambda=(2\lambda-x_1,x_2,\cdots,x_N)$$

引理 2.1 对任意的 $\lambda>0$，我们记

$$\Sigma_\lambda^v=\left\{x\in\Sigma_\lambda \mid v(x)>v(x^\lambda)\right\},$$

$$\partial\Sigma_\lambda^v=\left\{x\in\partial\Sigma_\lambda \mid v(x)>v(x^\lambda)\right\},$$

存在一个大于 p 的数 β，那么对任意的 $y\in\Sigma_\lambda$ 以及 $(\overline{x},0)\in\partial\Sigma_\lambda\setminus\{(2\lambda,0,\cdots,0)\}$，我们有下面的不等式

$$w(y)-w(y^\lambda)\le\int_{\partial\Sigma_\lambda^v}\frac{1}{|(\overline{x},0)-y|^{N-\alpha}}\frac{1}{|\overline{x}|^{N-2+\alpha-(N-2)\beta}}\left||\overline{x}|^{N-2}v(\overline{x},0)\right|^{p-\beta}\left[v(\overline{x},0)^\beta-v(\overline{x}^\lambda,0)^\beta\right]\mathrm{d}\overline{x} \tag{2.4}$$

以及

$$z(\overline{x})-z(\overline{x}^\lambda)\le\int_{\Sigma_\lambda^v}\frac{1}{|(\overline{x},0)-y|^{N-\alpha}}\frac{1}{|y|^{N+\alpha-(N-2)\beta}}\left||y|^{N-2}v(y)\right|^{p-\beta}\left[v(y)^\beta-v(y^\lambda)^\beta\right]\mathrm{d}y. \tag{2.5}$$

我们只证明不等式(2.4)，不等式(2.5)的证明是类似的。首先，我们有等式

$$w(y)=\int_{\partial\Sigma_\lambda}\frac{\left||\overline{x}|^{N-2}v(\overline{x},0)\right|^p}{|(\overline{x},0)-y|^{N-\alpha}|\overline{x}|^{N-2+\alpha}}\mathrm{d}\overline{x}+\int_{\partial\Sigma_\lambda}\frac{\left||\overline{x}^\lambda|^{N-2}v(\overline{x}^\lambda,0)\right|^p}{|(\overline{x}^\lambda,0)-y|^{N-\alpha}|\overline{x}^\lambda|^{N-2+\alpha}}\mathrm{d}\overline{x} \tag{2.6}$$

以及

$$w(y^\lambda)=\int_{\partial\Sigma_\lambda}\frac{\left||\overline{x}|^{N-2}v(\overline{x},0)\right|^p}{|(\overline{x},0)-y^\lambda|^{N-\alpha}|\overline{x}|^{N-2+\alpha}}\mathrm{d}\overline{x}+\int_{\partial\Sigma_\lambda}\frac{\left||\overline{x}^\lambda|^{N-2}v(\overline{x}^\lambda,0)\right|^p}{|(\overline{x}^\lambda,0)-y^\lambda|^{N-\alpha}|\overline{x}^\lambda|^{N-2+\alpha}}\mathrm{d}\overline{x} \tag{2.7}$$

成立，由于有等式 $|(\overline{x},0)-y^\lambda|=|(\overline{x}^\lambda,0)-y|$ 且 $|(\overline{x},0)-y|=|(\overline{x}^\lambda,0)-y^\lambda|$ 成立，再通过上面两个方程可以得到

$$w(y)-w(y^\lambda)=\int_{\partial\Sigma_\lambda^v}\left(\frac{1}{|(\overline{x},0)-y|^{N-\alpha}}-\frac{1}{|(\overline{x},0)-y^\lambda|^{N-\alpha}}\right)\left(\frac{\left||\overline{x}|^{N-2}v(\overline{x},0)\right|^p}{|\overline{x}|^{N-2+\alpha}}-\frac{\left||\overline{x}^\lambda|^{N-2}v(\overline{x}^\lambda,0)\right|^p}{|\overline{x}^\lambda|^{N-2+\alpha}}\right)\mathrm{d}\overline{x}. \tag{2.8}$$

一方面，如果 $(\overline{x},0)\in\partial\Sigma_\lambda^v=\{(\overline{x},0)\in\partial\Sigma_\lambda\mid v(\overline{x},0)>v(\overline{x}^\lambda,0)\}$，我们有 $|\overline{x}|^{N-2}>|\overline{x}^\lambda|^{N-2}$，那么我们有 $|\overline{x}|^{N-2}v(\overline{x},0)>|\overline{x}^\lambda|^{N-2}v(\overline{x}^\lambda,0)$。于是

$$\begin{aligned}&\frac{\left||\overline{x}|^{N-2}v(\overline{x},0)\right|^p}{|\overline{x}|^{N-2+\alpha}}-\frac{\left||\overline{x}^\lambda|^{N-2}v(\overline{x}^\lambda,0)\right|^p}{|\overline{x}^\lambda|^{N-2+\alpha}}\\&\le\frac{\left||\overline{x}|^{N-2}v(\overline{x},0)\right|^{p-\beta}v(\overline{x},0)^\beta}{|\overline{x}|^{N-2-(N-2)\beta}}-\frac{\left||\overline{x}^\lambda|^{N-2}v(\overline{x}^\lambda,0)\right|^{p-\beta}v(\overline{x}^\lambda,0)^\beta}{|\overline{x}^\lambda|^{N-2-(N-2)\beta}}\\&\le\frac{1}{|\overline{x}|^{N-2-(N-2)\beta}}\left||\overline{x}|^{N-2}v(\overline{x},0)\right|^{p-\beta}\left[v(\overline{x},0)^\beta-v(\overline{x}^\lambda,0)^\beta\right].\end{aligned} \tag{2.9}$$

另一方面，如果 $(\overline{x},0)\in\partial\Sigma_\lambda\setminus\partial\Sigma_\lambda^v$，那么我们有

$$\begin{aligned}\frac{\left||\overline{x}|^{N-2}v(\overline{x},0)\right|^p}{|\overline{x}|^{N-2+\alpha}}&\le\frac{\left||\overline{x}|^{N-2}v(\overline{x}^\lambda,0)\right|^p}{|\overline{x}|^{N-2+\alpha}v(\overline{x}^\lambda,0)^\beta}v(\overline{x}^\lambda,0)^\beta\\&=\frac{1}{|\overline{x}|^{N-2+\alpha-\beta(N-2)}}\frac{\left||\overline{x}|^{N-2}v(\overline{x}^\lambda,0)\right|^p}{|\overline{x}|^{(N-2)\beta}v(\overline{x}^\lambda,0)^\beta}v(\overline{x}^\lambda,0)^\beta\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \frac{1}{\left|\overline{x}^{\lambda}\right|^{N-2+\alpha-\beta(N-2)}} \frac{\left|\left|\overline{x}^{\lambda}\right|^{N-2} v\left(\overline{x}^{\lambda},0\right)\right|^{p}}{\left|\overline{x}^{\lambda}\right|^{(N-2)\beta} v\left(\overline{x}^{\lambda},0\right)^{\beta}} v\left(\overline{x}^{\lambda},0\right)^{\beta} \\
&= \frac{\left|\left|\overline{x}^{\lambda}\right|^{N-2} v\left(\overline{x}^{\lambda},0\right)\right|^{p}}{\left|\overline{x}^{\lambda}\right|^{N-2+\alpha}}.
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

因此，我们由方程(2.8)和不等式(2.9)、(2.10)得到不等式(2.4)。不等式(2.5)的证明与不等式(2.4)的证明类似，因此我们省略。

引理 2.2 在定理 1.1 的假设下，对于任意 $\lambda > 0$，函数 $v,\left(v-v^{\lambda}\right)^{+} \in L^{2^{*}}\left(\Sigma_{\lambda}\right) \cap L^{\infty}\left(\Sigma_{\lambda}\right)$，其中 $2^{*}=\dfrac{2N}{N-2}$ 为临界 Sobolev 指数。此外，存在关于 λ 单调递减的常数 c^{λ}，使得下面不等式成立

$$
\begin{aligned}
\int_{\Sigma_{\lambda}} \left|\nabla\left(v-v^{\lambda}\right)^{+}\right|^{2} \mathrm{d}x \le C_{\lambda} \Bigg[&\left\|w(y)\right\|_{L^{\frac{2N}{N-\alpha}}\left(\Sigma_{\lambda}^{v}\right)} \left\|v(y)\right\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}\left(\Sigma_{\lambda}^{v}\right)}^{\frac{(N-2)(\beta-2)}{2N}} + \left\|z(\overline{x})\right\|_{L^{\frac{2(N-1)}{N-\alpha}}\left(\partial\Sigma_{\lambda}^{v}\right)} \left\|v(\overline{x},0)\right\|_{L^{\frac{2(N-1)}{N-2}}\left(\partial\Sigma_{\lambda}^{v}\right)}^{\frac{(N-2)(\beta-2)}{2(N-1)}} \\
&+ \left\|v(\overline{x},0)\right\|_{L^{\frac{2(N-1)}{N-2}}\left(\partial\Sigma_{\lambda}^{v}\right)}^{\beta-1} \left\|v(y)\right\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}\left(\Sigma_{\lambda}^{v}\right)}^{\beta-1} \Bigg] \int_{\Sigma_{\lambda}} \left|\nabla\left(v-v^{\lambda}\right)^{+}\right|^{2} \mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{2.11}
$$

证明：首先，因为 $\lambda > 0$，所以存在 $r > 0$，使得 $\Sigma_{\lambda} \subset \mathbb{R}_{+}^{N} \setminus B_{r}^{+}(0)$，其中 $B_{r}^{+}(0)=\left\{x \in \mathbb{R}_{+}^{N} \mid |x| < r\right\}$。因此，我们由 $v(x)$ 的定义以及它在无穷远点的衰减性得

$$
v,\left(v-v^{\lambda}\right)^{+} \in L^{2^{*}}\left(\Sigma_{\lambda}\right) \cap L^{\infty}\left(\Sigma_{\lambda}\right).
$$

其次，为了处理 $v(x), w(x), z(\overline{x})$ 在原点的可能奇性，我们需要作适当的截断。为此，我们选取下面的径向截断函数 $\eta=\eta_{\varepsilon} \in C^{1}\left(\mathbb{R}_{+}^{N},[0,1]\right)$，且它满足

$$
\eta_{\varepsilon}(x)=\begin{cases} 1, & 2\varepsilon \le \left|x-p^{\lambda}\right| \le \dfrac{1}{\varepsilon}, \\ 0, & \left|x-p^{\lambda}\right| < \varepsilon, \left|x-p^{\lambda}\right| > \dfrac{2}{\varepsilon}. \end{cases}
$$

此外，我们还要求当 $\varepsilon < \left|x-p^{\lambda}\right| < 2\varepsilon$ 的时候，$|\nabla\eta| \le \dfrac{2}{\varepsilon}$。当 $\dfrac{1}{\varepsilon} < \left|x-p^{\lambda}\right| < \dfrac{2}{\varepsilon}$ 的时候，$|\nabla\eta| \le 2\varepsilon$。容易验证，满足上面条件的截断函数是存在的。

有了上面的截断函数以后，我们定义 $\varphi=\varphi^{\varepsilon}=\eta_{\varepsilon}^{2}\left(v-v^{\lambda}\right)^{+}$ 以及 $\psi=\psi^{\varepsilon}=\eta_{\varepsilon}\left(v-v^{\lambda}\right)^{+}$，那么我们由截断函数的定义可知，函数 Φ 和 Ψ 在 Σ^{λ} 内是有定义的。同时，通过一个简单的计算可知

$$
|\nabla\psi|^{2}=\nabla\left(v-v^{\lambda}\right)^{+}\nabla\varphi+\left[\left(v-v^{\lambda}\right)^{+}\right]^{2}|\nabla\eta|^{2}.
$$

有了上面的准备工作以后，我们有下面的估计

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Sigma_{\lambda} \cap \left\{2\varepsilon \le \left|x-p^{\lambda}\right| \le \frac{1}{\varepsilon}\right\}} \left|\nabla\left(v-v^{\lambda}\right)^{+}\right|^{2} \mathrm{d}x \\
&\le \int_{\Sigma_{\lambda}^{v}} \left|\nabla\psi_{i}(x)\right|^{2} \mathrm{d}x \le \int_{\Sigma_{\lambda}^{v}} \nabla\left(v-v^{\lambda}\right)\nabla\varphi \mathrm{d}x + \int_{\Sigma_{\lambda}^{v}} \left[\left(v-v^{\lambda}\right)^{+}\right]^{2} \left|\nabla\eta_{\varepsilon}\right|^{2} \mathrm{d}x \\
&= \int_{\Sigma_{\lambda}^{v}} -\Delta\left(v-v^{\lambda}\right)\varphi(y)\mathrm{d}y + \int_{\partial\Sigma_{\lambda}^{v}} \frac{\partial\left(v-v^{\lambda}\right)}{\partial\nu}\varphi(\overline{x},0)\mathrm{d}\overline{x} + I_{\varepsilon},
\end{aligned} \tag{2.12}
$$

其中 $I_{\varepsilon}=\int_{\Sigma_{\lambda}^{v}} \left[\left(v(y)-v\left(y^{\lambda}\right)\right)^{+}\right]^{2} \left|\nabla\eta_{\varepsilon}\right|^{2} \mathrm{d}y$。

我们断言，当$\varepsilon \to 0$时，$I_\varepsilon \to 0$。我们定义两个区域

$$D_\varepsilon^1 = \left\{ x \in \Sigma_\lambda \mid \varepsilon < \left| x - p^\lambda \right| < 2\varepsilon \right\},\quad D_\varepsilon^2 = \left\{ x \in \Sigma_\lambda \mid \frac{1}{\varepsilon} < \left| x - p^\lambda \right| < \frac{2}{\varepsilon} \right\}.$$

那么有

$$\int_{D_\varepsilon^1} \left|\nabla \eta\right|^N \mathrm{d}x \le C \frac{1}{\varepsilon^N} \cdot \varepsilon^N = C.$$

同理，

$$\int_{D_\varepsilon^2} \left|\nabla \eta\right|^N \mathrm{d}x \le C \varepsilon^N \cdot \frac{1}{\varepsilon^N} = C.$$

因此，由 Holder 不等式和$\left(v - v^\lambda\right)^+ \in L^{2^*}\left(\Sigma_\lambda\right)$，我们得到，当$\varepsilon \to 0$时，

$$I_\varepsilon \le \left(\int_{D_\varepsilon^1 \cup D_\varepsilon^2} \left[\left(w - w^\lambda\right)^+ \right]^{2^*} \mathrm{d}x \right)^{\frac{2}{2^*}} \cdot \left(\int_{\Sigma_\lambda} \left|\nabla \eta\right|^N \mathrm{d}x \right)^{\frac{2}{N}} \to 0.$$

接下来我们先估计不等式(2.12)的第一部分，方程为下式

$$\begin{aligned} &\int_{\Sigma_\lambda^v} -\Delta\left(v - v^\lambda\right)\varphi(y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{\Sigma_\lambda^v} \left(\frac{1}{|y|^{\alpha+2}} w(y) \left|f(y)\right|^{p-2} f(y) - \frac{1}{\left|y^\lambda\right|^{\alpha+2}} w\left(y^\lambda\right) \left|f\left(y^\lambda\right)\right|^{p-2} f\left(y^\lambda\right) \right) \left[v(y) - v\left(y^\lambda\right) \right]^+ \eta_\varepsilon^2 \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

简化方程，我们记$|y|^{N-2} v(y)|$为$f(y)$，一方面$w(y) > w\left(y^\lambda\right)$时，

$$\begin{aligned} &\frac{1}{|y|^{\alpha+2}} w(y) \left|f(y)\right|^{p-2} f(y) - \frac{1}{\left|y^\lambda\right|^{\alpha+2}} w\left(y^\lambda\right) \left|f\left(y^\lambda\right)\right|^{p-2} f\left(y^\lambda\right) \\ &\le \frac{1}{|y|^{\alpha+2}} \left[w(y) - w\left(y^\lambda\right) \right] \left|f(y)\right|^{p-2} f(y) \\ &\quad + w(y) \left[\frac{1}{|y|^{\alpha+2}} \left|f(y)\right|^{p-2} f(y) - \frac{1}{\left|y^\lambda\right|^{\alpha+2}} \left|f\left(y^\lambda\right)\right|^{p-2} f\left(y^\lambda\right) \right]. \end{aligned}$$

另一方面$w(y) < w\left(y^\lambda\right)$时，

$$\begin{aligned} &\frac{1}{|y|^{\alpha+2}} w(y) \left|f(y)\right|^{p-2} f(y) - \frac{1}{\left|y^\lambda\right|^{\alpha+2}} w\left(y^\lambda\right) \left|f\left(y^\lambda\right)\right|^{p-2} f\left(y^\lambda\right) \\ &\le w(y) \left[\frac{1}{|y|^{\alpha+2}} \left|f(y)\right|^{p-2} f(y) - \frac{1}{\left|y^\lambda\right|^{\alpha+2}} \left|f\left(y^\lambda\right)\right|^{p-2} f\left(y^\lambda\right) \right] \end{aligned}$$

接下来我们对于这两个不等式分别进行估计，由β的取值范围我们得到$\alpha - (N-2)(\beta - 1) \ge 0$且$\alpha - 2 + \alpha - (N-2)\beta \ge 0$，再由$|y|$的系数和$f(y)$的单调递减性和在无穷远处的衰减性，结合 HLS 不等式，可以得到一个关于λ递减的常数C_λ，使得下面两个估计成立

$$\int_{\Sigma_\lambda^v} \left[w(y) \left(\frac{1}{|y|^{\alpha+2}} \left|f(y)\right|^{p-2} f(y) - \frac{1}{\left|y^\lambda\right|^{\alpha+2}} \left|f\left(y^\lambda\right)\right|^{p-2} f\left(y^\lambda\right) \right) \right] \left[v(y) - v\left(y^\lambda\right) \right]^+ \eta_\varepsilon^2 \mathrm{d}y$$

$$
\begin{aligned}
&\le \int_{\Sigma_\lambda^v} w(y)\frac{|f(y)|^{p-2} f(y)}{|f(y)|^{\beta-1}}\frac{|v(y)|^{\beta-2}}{|y|^{\alpha+2-(N-2)(\beta-1)}}\left[v(y)-v(y^\lambda)\right]^2 \mathrm{d}y \\
&\le C_\lambda \int_{\Sigma_\lambda^v} w(y)|v(y)|^{\beta-2}\left[v(y)-v(y^\lambda)\right]^2 \mathrm{d}y \\
&\le C_\lambda \left(\int_{\Sigma_\lambda^v} w(y)^{\frac{2N}{N-\alpha}}\mathrm{d}y\right)^{\frac{N-\alpha}{2N}}\left(\int_{\Sigma_\lambda^v} v(y)^{\frac{2N}{N-2}}\mathrm{d}y\right)^{\frac{(N-2)(\beta-2)}{2N}}\left(\int_{\Sigma_\lambda^v}\left[v(y)-v(y^\lambda)\right]^{\frac{2N}{N-2}}\mathrm{d}y\right)^{\frac{N-2}{N}}
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

代入(2.4)，得到估计

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Sigma_\lambda^v}\frac{1}{|y|^{\alpha+2}}\left[w(y)-w(y^\lambda)\right]|f(y)|^{p-2} f(y)\left[v(y)-v(y^\lambda)\right]^+\eta_\varepsilon^2\mathrm{d}y \\
&\le C_\lambda \int_{\Sigma_\lambda^v}\frac{1}{|y|^{\alpha+2-(N-2)(\beta-1)}}\left[w(y)-w(y^\lambda)\right]v(y)^{\beta-1}\left[v(y)-v(y^\lambda)\right]\mathrm{d}y \\
&\le C_\lambda \left\|v(\bar{x},0)^{\beta-1}\left(v(\bar{x},0)-v(\bar{x}^\lambda,0)\right)\right\|_{L^{\frac{2(N-1)}{N-2+\alpha}}(\partial\Sigma_\lambda^v)}\left\|v(y)^{\beta-1}\left[v(y)-v(y^\lambda)\right]\right\|_{L^{\frac{2N}{N+\alpha}}(\Sigma_\lambda^v)} \\
&\le C_\lambda \left\|v(\bar{x},0)\right\|^{\beta-1}_{L^{\frac{2(N-1)}{N-2}}(\partial\Sigma_\lambda^v)}\left\|v(\bar{x},0)-v(\bar{x}^\lambda,0)\right\|_{L^{\frac{2(N-1)}{N-2}}(\partial\Sigma_\lambda^v)}\times\left\|v(y)\right\|^{\beta-1}_{L^{\frac{2N}{N-2}}(\Sigma_\lambda^v)}\left\|v(y)-v(y^\lambda)\right\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(\Sigma_\lambda^v)}
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

接下来我们再估计不等式(2.12)的第二部分

$$
\begin{aligned}
&\int_{\partial\Sigma_\lambda^v}\frac{\partial(v-v^\lambda)}{\partial\nu}\varphi(\bar{x},0)\mathrm{d}\bar{x} \\
&=\int_{\partial\Sigma_\lambda^v}\left(\frac{1}{|\bar{x}|^\alpha}z(\bar{x})|f(\bar{x},0)|^{p-2} f(\bar{x},0)-\frac{1}{|\bar{x}^\lambda|^\alpha}z(\bar{x}^\lambda)|f(\bar{x}^\lambda,0)|^{p-2} f(\bar{x}^\lambda,0)\right)\left[v(\bar{x},0)-v(\bar{x}^\lambda,0)\right]^+\eta_\varepsilon^2\mathrm{d}\bar{x}.
\end{aligned}
$$

相同的方法下，我们同样有

$$
\begin{aligned}
&\int_{\partial\Sigma_\lambda^v} z(\bar{x})\frac{|f(\bar{x},0)|^{p-2} f(\bar{x},0)}{|f(\bar{x},0)|^{\beta-1}}\frac{|v(\bar{x},0)|^{\beta-2}}{|\bar{x}|^{\alpha-(N-2)(\beta-1)}}\left[v(\bar{x},0)-v(\bar{x}^\lambda,0)\right]^2\mathrm{d}\bar{x} \\
&\le C_\lambda\left(\int_{\partial\Sigma_\lambda^v} z(\bar{x})^{\frac{2(N-1)}{N-\alpha}}\mathrm{d}\bar{x}\right)^{\frac{N-\alpha}{2(N-1)}}\left(\int_{\partial\Sigma_\lambda^v} v(y)^{\frac{2(N-1)}{N-2}}\mathrm{d}\bar{x}\right)^{\frac{(N-2)(\beta-2)}{2(N-1)}}\left(\int_{\Sigma_\lambda^v}\left[v(y)-v(y^\lambda)\right]^{\frac{2N}{N-2}}\mathrm{d}y\right)^{\frac{N-2}{N}}
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

和

$$
\begin{aligned}
&\int_{\partial\Sigma_\lambda^v}\frac{1}{|\bar{x}|^\alpha}|f(\bar{x},0)|^{p-2} f(\bar{x},0)\left(z(\bar{x})-z(\bar{x}^\lambda)\right)\left[v(\bar{x},0)-v(\bar{x}^\lambda,0)\right]^+\eta_\varepsilon^2\mathrm{d}\bar{x} \\
&\le C_\lambda\left\|v(\bar{x},0)\right\|^{\beta-1}_{L^{\frac{2(N-1)}{N-2}}(\partial\Sigma_\lambda^v)}\left\|v(\bar{x},0)-v(\bar{x}^\lambda,0)\right\|_{L^{\frac{2(N-1)}{N-2}}(\partial\Sigma_\lambda^v)}\times\left\|v(y)\right\|^{\beta-1}_{L^{\frac{2N}{N-2}}(\Sigma_\lambda^v)}\left\|v(y)-v(y^\lambda)\right\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(\Sigma_\lambda^v)}
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

将(2.13)，(2.14)，(2.15)，(2.16)代入(2.12)，由 Sobolev 不等式及 Sobolev 迹不等式可得

$$
\begin{aligned}
\int_{\Sigma_\lambda}\left|\nabla(v-v^\lambda)^+\right|^2\mathrm{d}x \le C_\lambda&\left[\left\|w(y)\right\|_{L^{\frac{2N}{N-\alpha}}(\Sigma_\lambda^v)}\left\|v(y)\right\|^{\frac{(N-2)(\beta-2)}{2N}}_{L^{\frac{2N}{N-2}}(\Sigma_\lambda^v)}+\left\|z(\bar{x})\right\|_{L^{\frac{2(N-1)}{N-\alpha}}(\partial\Sigma_\lambda^v)}\left\|v(\bar{x},0)\right\|^{\frac{(N-2)(\beta-2)}{2(N-1)}}_{L^{\frac{2(N-1)}{N-2}}(\partial\Sigma_\lambda^v)}\right. \\
&\left.+\left\|v(\bar{x},0)\right\|^{\beta-1}_{L^{\frac{2(N-1)}{N-2}}(\partial\Sigma_\lambda^v)}\left\|v(y)\right\|^{\beta-1}_{L^{\frac{2N}{N-2}}(\Sigma_\lambda^v)}\right]\int_{\Sigma_\lambda}\left|\nabla(v-v^\lambda)^+\right|^2\mathrm{d}x.
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

3. 定理 1.1 的证明

有了上面替代极大值不等式的估计后，我们接下来使用移动平面法。

引理 3.1 在定理 1.1 的假设下，存在常数 $\lambda_0 > 0$，使得对任意的 $\lambda \ge \lambda_0, y \in \Sigma_\lambda, \bar{x} \in \partial\Sigma_\lambda$，都有 $w(y) \le w(y^\lambda), v(y) \le v(y^\lambda), z(\bar{x}) \le z(\bar{x}^\lambda)$ 成立。

证明：我们用引理 2.1 与引理 2.2 来证明我们的结果，由衰减性可知，存在充分大的 $\lambda_0 > 0$，使得当 $\lambda > \lambda_0$ 的时候，下面的不等式成立：

$$
\begin{aligned}
C_\lambda \Bigg[& \|w(y)\|_{L^{\frac{2N}{N-\alpha}}(\Sigma_\lambda^v)} \|v(y)\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(\Sigma_\lambda^v)}^{\frac{(N-2)(\beta-2)}{2N}} + \|z(\bar{x})\|_{L^{\frac{2(N-1)}{N-\alpha}}(\partial\Sigma_\lambda^v)} \|v(\bar{x},0)\|_{L^{\frac{2(N-1)}{N-2}}(\partial\Sigma_\lambda^v)}^{\frac{(N-2)(\beta-2)}{2(N-1)}} \\
& + \|v(\bar{x},0)\|_{L^{\frac{2(N-1)}{N-2}}(\partial\Sigma_\lambda^v)}^{\beta-1} \|v(y)\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(\Sigma_\lambda^v)}^{\beta-1} \Bigg] < \frac{1}{2}.
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

将这一不等式代入引理 2.2 就得到，对任意的 $y \in \Sigma_\lambda$，都有 $v(y) \le v(y^\lambda)$。再把这一结果代入引理 2.1 就得到 $y \in \Sigma_\lambda$ 以及 $\bar{x} \in \partial\Sigma_\lambda$，都有 $w(y) \le w(y^\lambda)$ 以及 $z(\bar{x}) \le z(\bar{x}^\lambda)$。

下面我们从右至左移动平面 T_{λ_0}，假定这一过程在 λ_1 的地方停止。即按照下面的方式定义 λ_1：

$$
\lambda_1 = \inf\left\{\lambda \mid w(y) \le w(y^\lambda), v(y) \le v(y^\lambda), z(\bar{x}) \le z(\bar{x}^\lambda), \forall y \in \Sigma_\lambda, \bar{x} \in \partial\Sigma_\lambda\right\}.
$$

引理 3.2 如果 $\lambda_1 > 0$，那么有 $w(y) \equiv w(y^{\lambda_1}), v(y) \equiv v(y^{\lambda_1})$ 以及 $z(\bar{x}) \equiv z(\bar{x}^{\lambda_1})$。

证明：我们用反证法来证明这个引理。如果 $w(y) \not\equiv w(y^{\lambda_1})$ 或 $v(y) \not\equiv v(y^{\lambda_1})$，那么我们断言平面 T_{λ_1} 可以向左边再移动一点点，即存在 $\delta_0 > 0$，使得对任意的 $\lambda \in [\lambda_1 - \delta_0, \lambda_1], y \in \Sigma_\lambda$ 以及 $\bar{x} \in \partial\Sigma_\lambda$，都有 $v(y) \le v(y^\lambda), w(y) \le w(y^\lambda)$ 以及 $z(\bar{x}) \le z(\bar{x}^\lambda)$，这与 λ_1 的定义矛盾，因此反设不成立，即引理得证。我们由 $v(y), w(y), z(\bar{x})$ 无穷远处的衰减性和引理 2.2 得到存在 $\delta > 0$，使得 $\lambda \in [\lambda_1 - \delta, \lambda_1]$ 都有 $w(y) \le w(y^\lambda), v(y) \le v(y^\lambda), z(\bar{x}) \le z(\bar{x}^\lambda)$ 成立。

定理 1.1 的证明假定 u，m，n 是方程(2.1)，(2.2)的非负弱解，满足定理 1.1 中的假设，那么对任意的 $p \in \mathbb{R}$，如果我们记 v，w，z 是 u，m，n 在 p 点的 Kelvin 变换，那么 u，m，n 关于任意经过 p 点且平行于 x_N 轴的平面对称。

我们只需证明 v，w，z 关垂直于 $x_1, x_2, \cdots, x_{N-1}$ 轴上的 $N-1$ 个平面对称，不失一般性设这个平面为过原点且垂直于 x_1 轴，继续引理 3.1 和引理 3.2 的步骤，若 $\lambda_1 > 0$，得到对称，若 $\lambda_1 < 0$，从左向右移动这个平面得到 λ_2，若 $\lambda_2 < 0$，由引理 3.2 可得 λ_2 为替换后的 λ_1，得到对称，若 $\lambda_2 > 0$，得到 x 关于这个平面对称点 x^0 有下面性质 $v(x) \ge v(x^0), w(x) \ge w(x^0), z(\bar{x}) \ge z(\bar{x}^0)$，与 λ_1 得到的 $v(x) \le v(x^0), w(x) \le w(x^0), z(\bar{x}) \le z(\bar{x}^0)$ 性质可得对称。

我们得到 u，m 只依赖于 x_N，n 为常数，得到下面方程组

$$
\begin{cases}
-\dfrac{\mathrm{d}^2 u(y_N)}{\mathrm{d}y_N^2} = \displaystyle\int_{\partial\mathbb{R}_+^N} \frac{|u(0)|^p}{|(\bar{x},0)-y|^{N-\alpha}} \mathrm{d}\bar{x} \left|u(y^N)\right|^{p-2} u(y^N), y^N > 0, \\
-\dfrac{\partial u}{\partial x_N}(0) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^N} \frac{\left|u(y^N)\right|^p}{|(\bar{x},0)-y|^{N-\alpha}} \mathrm{d}y \left|u(0)\right|^{p-2} u(0).
\end{cases}
\tag{3.2}
$$

得到 u 关于 x_N 是凹函数，且 u 关于 x_N 单调递减，u 必然为常数 c，否则 u 关于 x_N 严格单调递减那么由它的凹性可知，当 N 充分大的时候，$u(N) < 0$，这与 u 的非负性矛盾，证得 $u \equiv c$，由方程又可得 $c \equiv 0$，证明完毕。

参考文献

[1] Bartsch, T., Liu, Y. and Liu, Z. (2020) Normalized Solutions for a Class of Nonlinear Choquard Equations. *SN Partial Differential Equations and Applications*, **1**, Article No. 34. https://doi.org/10.1007/s42985-020-00036-w

[2] Ackermann, N. (2004) On a Periodic Schrödinger Equation with Nonlocal Superlinear Part. *Mathematische Zeitschrift*, **248**, 423-443. https://doi.org/10.1007/s00209-004-0663-y

[3] Choquard, P., Stubbe, J. and Vuffray, M. (2008) Stationary Solutions of the Schrödinger-Newton Model—An ODE Approach. *Differential and Integral Equations*, **21**, 665-679. https://doi.org/10.57262/die/1356038617

[4] Bahrami, M., Großardt, A., Donadi, S. and Bassi, A. (2014) The Schrödinger-Newton Equation and Its Foundations. *New Journal of Physics*, **16**, Article 115007. https://doi.org/10.1088/1367-2630/16/11/115007

[5] Chen, W. and Li, C. (1991) Classification of Solutions of Some Nonlinear Elliptic Equations. *Duke Mathematical Journal*, **63**, 615-622. https://doi.org/10.1215/s0012-7094-91-06325-8

[6] Chen, W., Li, C. and Li, Y. (2017) A Direct Method of Moving Planes for the Fractional Laplacian. *Advances in Mathematics*, **308**, 404-437. https://doi.org/10.1016/j.aim.2016.11.038

[7] Chen, W., Li, C. and Ou, B. (2005) Classification of Solutions for an Integral Equation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **59**, 330-343. https://doi.org/10.1002/cpa.20116

[8] Yu, X. (2011) Liouville Type Theorems for Integral Equations and Integral Systems. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **46**, 75-95. https://doi.org/10.1007/s00526-011-0474-z

[9] Yu, X. (2016) Liouville Type Theorems for Singular Integral Equations and Integral Systems. *Communications on Pure and Applied Analysis*, **15**, 1825-1840. https://doi.org/10.3934/cpaa.2016017

[10] 赵晓军, 余晓辉. 一类 Choquard 型方程正解的非存在性结果[J]. 中国科学: 数学, 2017, 47(6): 713-722.

[11] 李泓桥. 半空间上 Hartree 方程的 Liouville 型定理[J]. 数学物理学报, 2021, 41(2): 388-401.