Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(4), 243-256
Published Online April 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.154127

Hans汉斯

一个修正的超粘性Navier-Stokes方程的Sobolev稳定性

金自地，刘晓风*

东华大学理学院，上海

收稿日期：2025年3月11日；录用日期：2025年4月9日；发布日期：2025年4月18日

摘　要

本文主要考虑$T\times R$上的二维修正的超粘性Navier-Stokes方程，通过对方程进行线性化处理，揭示了其无粘阻尼特性以及增强耗散现象。进一步地，借助构造合适的权重函数，并运用Bootstrap论证方法，研究发现，当Couette流受到足够小的扰动时，混合增强耗散效应将显著发挥作用，解在时间$t\gg\nu^{\frac{1}{5}}$时收敛(其中ν表示运动粘度系数)。因此，可以得出结论：具有初值的二维修正的超粘性Navier-Stokes方程的稳定性阈值不比$\nu^{\frac{1}{2}}$差。

关键词

Navier-Stokes方程，增强耗散，无粘阻尼，稳定性

The Sobolev Stability of a Modified Hyperviscous Navier-Stokes Equation

Zidi Jin, Xiaofeng Liu*

College of Science, Donghua University, Shanghai

Received: Mar. 11th, 2025; accepted: Apr. 9th, 2025; published: Apr. 18th, 2025

Abstract

This paper primarily investigates the two-dimensional modified hyperviscous Navier-Stokes equations on $T\times R$. By linearizing the equations, we reveal their inviscid damping properties and enhanced dissipation phenomena. Furthermore, through the construction of appropriate weight

*通讯作者。

文章引用: 金自地, 刘晓风. 一个修正的超粘性 Navier-Stokes 方程的 Sobolev 稳定性[J]. 理论数学, 2025, 15(4): 243-256. DOI: 10.12677/pm.2025.154127

functions and the application of the Bootstrap argument, we find that when the Couette flow is subjected to sufficiently small perturbations, the enhanced dissipation effect due to mixing becomes significant, and the solution converges in time at a rate of $t \gg \nu^{\frac{1}{5}}$ (where ν denotes the kinematic viscosity coefficient). Therefore, we can conclude that the stability threshold for the two-dimensional modified hyperviscous Navier-Stokes equations with initial values is no worse than that of $\nu^{\frac{1}{2}}$.

Keywords

Navier-Stokes Equations, Enhanced Dissipation, Inviscid Damping, Stability

1. 引言

在本文中，我们考虑二维超粘性 Navier-Stokes 方程

$$\begin{cases} \partial_t u + u\cdot\nabla u + \nu\Delta^2 u + u^2\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = -\nabla P, \\ \nabla\cdot u = 0,\quad u(t=0) = u_{in}. \end{cases} \tag{1}$$

在区域 $\Omega = \{(x,y) = T\times R\}$ 上，其中 ν 表示运动粘度系数，流体速度 $u = (u^1, u^2)$，P 为压力，T 的周期是 2π。

首先，针对方程(1)，我们找到其解 $\tilde{u}$，并将其视为 Couette 流 $(y,0)$ 的扰动(方程中的扰动 u_{in} 足够小)。并定义解为

$$\tilde{u}(t,x,y) = (y,0) + u(t,x,y).$$

取 $\omega = \nabla^{\perp}\cdot u = \partial_x u^2 - \partial_y u^1$，由(1)可知，Couette 流周围的扰动的 Navier-Stokes 方程的涡度形式为

$$\begin{cases} \partial_t\omega + y\partial_x\omega + u\cdot\nabla\omega + u^2\omega + u\cdot\nabla^{\perp}u^2 = -\nu\Delta^2\omega, \\ \Delta\psi = \omega, \\ u = \nabla^{\perp}\psi, \\ \omega(t=0) = \omega_{in}. \end{cases} \tag{2}$$

2. 主要结果的陈述

本文的目的是研究在高雷诺数 $\nu\to 0$ 时扰动 ω 求解方程(2)的长期动力学。研究的核心目标是评估 couette 的稳定性阈值，特别是明确其与运动粘度系数 ν 的依赖关系。也就是说，对于给定 $N>1$，尝试找到小的 $\gamma>0$，使得当初始扰动 ω_{in} 满足 $\|\omega_{in}\|_N \lesssim \nu^{\gamma}$ 时，扰动 ω_{in} 在空间中保持很小，并确定这类稳定解的动态行为。

在高雷诺数下，三维实验和计算机模拟中经常观察到非线性不稳定性出现在比线性理论预测更低的雷诺数，这种现象通常被称为亚临界跃迁[1]。在某些情况下，流动在所有雷诺数下均为线性稳定，但非线性稳定性阈值可能随着运动粘度系数 $\nu\to 0$ 而降低，导致在任何实验或模拟中，流动在有限的雷诺数

下出现不稳定性。因此，给定一个范数 $\|\cdot\|_N$，目标是确定一个 $\gamma=\gamma(X)$，使得当初始扰动 ω_{in} 满足 $\|\omega_{in}\|_N \lesssim \nu^{\gamma}$ 时，解保持稳定，而当 $\|\omega_{in}\|_N \gtrsim \nu^{\gamma}$ 时，解则变得不稳定。在应用数学和物理学领域[2] [3]，参数 γ 通常被称为“转换阈值”或“跃迁阈值”，它用于描述系统从一种状态转换到另一种状态的临界值。

参数 γ 的最小值预计会非依赖于标准 X。例如，在 Bedrossian J 和 Masmoudi N [4]的三维 Couette 流的数值实验中，估计“粗糙”初始扰动(例如弱 X)会导致较高的 γ。具体而言，在 Bedrossian J、P. Germain 和 N. Masmoudi [5] [6]的关于三维 Couette 流的文章中显示了当 X 为 $Gevrey-m$ 类且 $m<2$ 时，$\gamma<1$；而在另一篇文章[7]中证明了当 $X=H^s$ 且 $s>\frac{7}{2}$ 时，$\gamma\le\frac{3}{2}$，这一结果与[4]中给出的数值估计 $\gamma=\frac{31}{20}$ 一致。

而对于二维 Couette 流，J. Bedrossian,、N. Masmoudi 和 V. Vicol [8]证明了当 X 为 $Gevrey-m$ 且 $m=2$ 时，$\gamma=0$，这意味着在高雷诺数条件下，当初始扰动足够光滑时，Couette 流能够保持均匀稳定，且不会发生亚临界跃迁。此外，J. Bedrossian 和 N. Masmoudi [9]指出，在二维欧拉方程(即当运动粘性系数 $\nu=0$ 时)的条件下，对于此类足够光滑的 Gevrey 类初始扰动，Couette 流同样表现出非线性稳定性。

在本文中我们估计的稳定性阈值为 $\gamma\le\frac{1}{2}$，我们的主要结果如下。

定理 2.1 若 $\|\omega_{in}\|_{H^s}=\epsilon\ll\nu^{\frac{1}{2}}, \|u^1\|_{H^s}=\epsilon\ll\nu^{\frac{1}{2}}$，其中 $0<\nu\le1$，$s>1$，则方程(1)在时间上的唯一整体解满足

$$\|\omega_0\|_{L^\infty H^s}+\nu^{\frac{1}{2}}\|\Delta\omega_0\|_{L^2H^s}\lesssim\epsilon, \tag{3a}$$

$$\|\omega\circ(x+ty,y)\|_{L^\infty H^s}\lesssim\epsilon, \tag{3b}$$

并且有增强的耗散估计

$$\|\omega_{\neq}\|_{L^2H^s}\lesssim\epsilon\nu^{-\frac{1}{10}}. \tag{4}$$

其中 ω_0 表示 ω 关于 x 的零傅里叶模上的投影，而 $\omega_{\neq}$ 表示关于 x 的非零傅里叶模上的投影；u_0 表示 u 关于 x 的零傅里叶模上的投影；非零频率投影用 $f_{\neq}=f-f_0$ 表示(本文的其他记号将在下一节给出)。

本文最具挑战性的问题在于坐标变换后非线性项的复杂性。此外，为了有效控制非线性项的低频部分，需要借助双拉普拉斯项，而这一项的量级通常小于低频的拉普拉斯项。故在本文中，进一步引入了分数阶拉普拉斯项来实现对非线性项低频部分的精确控制。由于在能量估计的过程中

$$\int_0^T\int A\left(\partial_z\Delta_L^{-1}f_{\neq}\partial_v f_0\right)Af_{\neq}dzdvdt$$

不能由

$$\left\|\sqrt{\dot{M}M}f\right\|_{L^2H^s}\|\partial_{vv}f_0\|_{L^2H^s}\|f\|_{L^\infty H^s}$$

进行控制。所以必须分别来考虑低频部分和高频部分。

符号和预备知识

(1) 对于函数 f、g，当存在常数 $C>0$ 且 $f\le Cg$ 时，用 $f\lesssim g$ 表示(常数 C 与参数 ν,t 无关)；

(2) 对于某个足够接近 0 的通用常数 ϵ_0，当 $f\le\epsilon_0 g$ 时，用 $f\ll g$ 表示(常数 ϵ_0 与参数 ν,t 无关)；

(3) 对于给定的标量或向量 u，定义 $\langle u\rangle=\left(1+|u|^2\right)^{\frac{1}{2}}$；

(4) 函数的 x (或 z)平均值表示为 $f_0=\frac{1}{2\pi}\int_T f(x,y)dx$；

(5) 用 $\|h\|_{L^qL^p}=\|h\|_{L_t^qL_{(x,y)}^p}$ 表示 $\|h\|_{L^qL^p}=\left(\int_0^T\left(\int_\Omega|h|^p\,dxdy\right)^{\frac{p}{q}}dt\right)^{\frac{1}{q}}$ (其中 $p,q\in[1,\infty]$ 且 $T>0$)；

(6) 记 $\|h(t,x,y)\|_{L^qH^s}=\left(\int_0^T\|h\|_{H^s}^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}$ 为 $\|h\|_{L^qH^s}=\|h\|_{L_t^qH_{(x,y)}^s}$ (其中 $q\in[1,\infty]$ 且 $s\geq 0$)；

(7) 用 $\hat{h}$ 表示 h 的傅里叶变换

$$\hat{h}(k,\eta)=\frac{1}{2\pi}\iint_{T\times R}e^{-i(xk+y\eta)}h(x,y)\,dxdy.$$

用 k，l 和 η，ξ 表示 T 方向变量 z (或 x)和 R 方向变量 v (或 y)的傅里叶变换。

(8) 定义较低频投影为，

$$h_{<1}(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R e^{iy\eta}\chi(\eta)\hat{h}(\eta)\,d\eta;$$

及高频投影为

$$h_{\geq 1}(y)=h-h_{<1}(y)=\frac{1}{2\pi}\int_R e^{iy\eta}\left(1-\chi(\eta)\right)\hat{h}(\eta)\,d\eta.$$

(9) Plancherel 定理：设 f 是一个在实数轴上平方可积的函数，即 $f\in L^2(R)$。那么，f 的傅里叶变换 $\hat{f}$ 也是平方可积的，并且有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi.$$

3. 线性化问题

在讨论非线性问题前，理解 Navier-Stokes 方程的线性化问题至关重要。围绕 Couette 流的线性化问题具有经典意义，其研究可追溯至 20 世纪初[10] [11]。近年来，线性稳定性分析取得了显著进展[12]-[16]。

方程(2)的线性化形式可以表示为

$$\begin{cases}\partial_t\omega+y\partial_x\omega=-\nu\Delta^2\omega,\\ \Delta\psi=\omega.\end{cases}\tag{5}$$

考虑其坐标变换

$$x\mapsto z=x-ty,$$
$$y\mapsto v=y.$$

定义其在新坐标中的变换为

$$f(t,z,y)=\omega(t,z+ty,y)=\omega(t,x,y),$$
$$\phi(t,z,y)=\psi(t,z+ty,y)=\psi(t,x,y).$$

故式(5)可写为

$$\begin{cases}\partial_t f=-\nu\Delta_L^2 f,\\ \Delta_L\phi=f,\\ \Delta_L=\partial_{zz}+\left(\partial_y-t\partial_z\right)^2.\end{cases}\tag{6}$$

因此，方程(6)在傅里叶空间中的解为

$$\hat{f}(t,k,\eta)=\hat{f}_{in}(k,\eta)e^{-\nu\int_0^t\left(k^2+|\eta-k\tau|^2\right)^2d\tau}.$$

由 ω 和 f 的关系，得到

$$\hat{\omega}(t,x,y)=\hat{\omega}_{in}(k,\eta+kt)e^{-\nu\int_0^t\left(k^2+|\eta-k(\tau-t)|^2\right)^2d\tau}.$$

不难得到对某个通用的常数 $c>0$，有

$$\left\|\omega_{\neq}(t)\right\|_{L^2}\lesssim\left\|\omega_{in}\right\|_{L^2}e^{-c\nu t^5}. \tag{7}$$

对任何非零的整数 k，有

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(t,k,\eta)&=\frac{\hat{\omega}_{in}(k,\eta+kt)}{k^2+\eta^2}e^{-\nu\int_0^t\left(k^2+|\eta-k(\tau-t)|^2\right)^2d\tau}\\&=\frac{1}{\left(k^2+\eta^2\right)\langle\eta+kt\rangle^2}\langle\eta+kt\rangle^2\hat{\omega}_{in}(k,\eta+kt)e^{-\nu\int_0^t\left(k^2+|\eta-k(\tau-t)|^2\right)^2d\tau},\end{aligned} \tag{8}$$

由于 $k^2+\eta^2\geq1$，易得

$$\left(k^2+\eta^2\right)\langle\eta+kt\rangle^2\gtrsim t^2, \tag{9}$$

根据式(7) (8)和(9)有

$$\left\|\psi_{\neq}(t)\right\|_{L^2}\lesssim\frac{1}{t^2}\left\|\omega_{in}\right\|_{H^2}e^{-c\nu t^5}. \tag{10}$$

通过类似的方法我们可以得到

$$\left\|\partial_x\psi_{\neq0}(t)\right\|_{L^2}+\langle t\rangle^{-1}\left\|\partial_y\psi_{\neq0}(t)\right\|_{L^2}\lesssim\frac{1}{t^2}\left\|\omega_{in}\right\|_{H^2}e^{-c\nu t^5}, \tag{11}$$

这意味着方程具有无粘阻尼特性以及增强耗散现象。

4. 定理 2.1 的证明

采用与线性化问题相同的坐标变换方法：

$$f(t,z,y)=\omega(t,z+ty,y)=\omega(t,x,y),$$

$$\phi(t,z,y)=\psi(t,z+ty,y)=\psi(t,x,y),$$

方程(2)则可改写成

$$\begin{cases}\partial_t f+u\cdot\nabla_L f+u^2 f+u\cdot\nabla^{\perp}u^2=-\nu\Delta_L^2 f,\\u=-\nabla_L^{\perp}\left(-\Delta_L\right)^{-1}f,\\\Delta_L\phi=f,\\\Delta_L=\partial_{zz}+\left(\partial_y-t\partial_z\right)^2.\end{cases} \tag{12}$$

4.1. 权重的构造

在本文中我们需要构造一个具有以下性质的傅里叶乘子：

$$M(0,k,\eta)=M(t,0,\eta)=1, \tag{13a}$$

$$c\leq M(t,k,\eta)\leq1, \tag{13b}$$

对于 $k\neq 0$,

$$-\frac{\dot{M}}{M}\geq\frac{|k|}{k^2+|\eta-kt|^2},\tag{13c}$$

对于 $k\neq 0$，在 η 中一致有，

$$\left|\frac{\partial_\eta M(k,\eta)}{M(k,\eta)}\right|\lesssim\frac{1}{|k|},\tag{13d}$$

对于 $k\neq 0$,

$$\nu^{-\frac{1}{10}}\left(\sqrt{-\dot{M}M(t,k,\eta)}+\nu^{\frac{1}{2}}|k,\eta-kt|^2\right)\gtrsim 1,\tag{13e}$$

$$\sqrt{-\dot{M}M(t,k,\eta)}\lesssim\langle\eta-\xi\rangle\sqrt{-\dot{M}M(t,k,\eta)},\tag{13f}$$

其中常数 $c\in(0,1)$ 与 ν 无关。下面通过引理来证明存在这样的乘子 M 。

引理 4.1.1 对于某个常数 $0<c<1$，存在满足条件(13a)-(13f)的乘子 M 。

证明：首先构造满足(13a)的乘子 u 和 M_2 。第一步先定义当 $k\neq 0$ 时的乘子 M_1 和 M_2 。定义 $k\neq 0$ 的 M_1 为：

$$-\frac{\dot{M}_1}{M_1}=\frac{|k|}{k^2+|\eta-kt|^2},\ M_1(0,k,\eta)=1.$$

易证明 M_1 对于(13b)、(13c)、(13d)和(13f)都成立[17]。再定义 $k\neq 0$ 的 M_2 ：

$$-\frac{\dot{M}_2}{M_2}=\frac{\nu^{\frac{1}{5}}}{1+\left(\nu^{\frac{1}{5}}\left|\frac{\eta}{k}-t\right|\right)^2},\ M_2(0,k,\eta)=1.$$

与 M_1 类似，易证(13b)、(13d)和(13f)对于 M_2 也成立。

对于 $k\neq 0$ 时，当 $\left|t-\frac{\eta}{k}\right|\geq\nu^{-\frac{1}{5}}$，有 $\nu^{\frac{1}{5}}|k,\eta-kt|\gtrsim 1$ 成立；当 $\left|t-\frac{\eta}{k}\right|\leq\nu^{-\frac{1}{5}}$ 时，有 $\frac{1}{\left(\nu^{\frac{1}{5}}\left|t-\frac{\eta}{k}\right|\right)^2+1}\gtrsim 1$ 成立。

当 $\left|t-\frac{\eta}{k}\right|\geq\nu^{-\frac{1}{5}}$， $\nu^{-\frac{1}{10}}\nu^{\frac{1}{2}}|k,\eta-kt|^2=\nu^{\frac{2}{5}}|k,\eta-kt|^2\gtrsim 1$. 当 $\left|t-\frac{\eta}{k}\right|\leq\nu^{-\frac{1}{5}}$，

$\nu^{-\frac{1}{10}}\sqrt{-\dot{M}_2M_2}=\nu^{-\frac{1}{10}}\sqrt{-\frac{\dot{M}_2}{M_2}M_2^{\,2}}\gtrsim\nu^{-\frac{1}{10}}\nu^{\frac{1}{10}}\sqrt{M_2^{\,2}}\gtrsim c.$ 从而可以得到，乘子 M_2 满足不等式(13e)。令 $M=M_1M_2$，则 M 也满足(13a)和(13b)。易证(13c)-(13f)对于 M 也成立。故引理 4.1.1 成立。

定义 $A=M\langle|\nabla|\rangle^s$，由 Plancherel 不等式和(13b)，有

$$\|f\|_{H^s}\lesssim\|A(t)f\|_{L^2}\leq\|f\|_{H^s}$$

和 $\|A(0)f\|_2=\|f\|_{H^s}$ 成立。

4.2. Bootstrap 论证

本文中，式(12)的局部适定性是标准的，对足够小的 $t*$ 、 $\|u^1\|_{H^s}=\epsilon\ll\nu^{\frac{1}{2}}$，有

$$\|Af\|_{L^\infty(0,t;L^2)}+\nu^{\frac{1}{2}}\|\Delta_L Af\|_{L^2(0,t;L^2)}+\left\|\sqrt{-\dot{M}M}\langle|\nabla|\rangle^s f\right\|_{L^2(0,t;L^2)}<2\epsilon,$$

$$\left\|Au_0^1\right\|_{L^\infty(0,t;L^2)}+\nu^{\frac{1}{2}}\left\|\partial_{vv}Au_0^1\right\|_{L^2(0,t;L^2)}+\left\|\sqrt{-\dot{M}M}\langle|\nabla|\rangle^s u_0^1\right\|_{L^2(0,t;L^2)}<2\epsilon,$$

并且上式左侧的所有量均随时间连续变化。设 T ($T\le\infty$)为

$$\|Af\|_{L^\infty(0,T;L^2)}+\nu^{\frac{1}{2}}\|\Delta_L Af\|_{L^2(0,T;L^2)}+\left\|\sqrt{-\dot{M}M}\langle|\nabla|\rangle^s f\right\|_{L^2(0,T;L^2)}<8\epsilon \tag{14a}$$

$$\left\|Au_0^1\right\|_{L^\infty(0,t;L^2)}+\nu^{\frac{1}{2}}\left\|\partial_{vv}Au_0^1\right\|_{L^2(0,t;L^2)}+\left\|\sqrt{-\dot{M}M}\langle|\nabla|\rangle^s u_0^1\right\|_{L^2(0,t;L^2)}<8\epsilon, \tag{14b}$$

成立的最大时间。由以上述的讨论可知，$T>t*$。式(14a) (14b)为引导假设。接下来，证明对于常数 4ϵ 不等式(14a) (14b)也成立。

命题 4.2.1 对于所有的 $s>1$ 且足够小(仅取决于 s)的 ϵ，通过引导假设，有

$$\|Af\|_{L^\infty(0,T;L^2)}+\nu^{\frac{1}{2}}\|\Delta_L Af\|_{L^2(0,T;L^2)}+\left\|\sqrt{-\dot{M}M}\langle|\nabla|\rangle^s f\right\|_{L^2(0,T;L^2)}<4\epsilon.$$

$$\left\|Au_0^1\right\|_{L^\infty(0,t;L^2)}+\nu^{\frac{1}{2}}\left\|\partial_{vv}Au_0^1\right\|_{L^2(0,t;L^2)}+\left\|\sqrt{-\dot{M}M}\langle|\nabla|\rangle^s u_0^1\right\|_{L^2(0,t;L^2)}<4\epsilon,$$

根据连续性论证，$T=\infty$。

证明：对于(14b)，首先将 A 作用于方程，然后与 Af 作内积，再通过直接计算可以得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|Au_0^1\right\|_{L^2}^2+\nu\left\|\partial_{vv}Au_0^1\right\|_{L^2(0,T;L^2)}^2+\left\|\sqrt{-\dot{M}M}\langle|\nabla|\rangle^s u_0^1\right\|_{L^2}^2\\&=-\int A\left(\nabla_L^\perp\phi\cdot\nabla_L u^1\right)_0 Au_0^1dy-\int A\left(u^2u^1\right)_0 Au_0^1dy.\end{aligned}$$

对上述等式在区间 $[0,T]$ 上进行时间积分，得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left\|Au_0^1(T)\right\|_{L^2}^2+\nu\left\|\partial_{vv}Au_0^1\right\|_{L^2(0,T;L^2)}^2+\left\|\sqrt{-\dot{M}M}\langle|\nabla|\rangle^s u_0^1\right\|_{L^2(0,T;L^2)}^2\\&=\frac{1}{2}\left\|Au_{0,in}^1\right\|_{L^2}^2-\int_0^T\int A\left(\nabla_L^\perp\phi\cdot\nabla_L u^1\right)_0 Au_0^1dydt-\int_0^T\int A\left(u^2u^1\right)_0 Au_0^1dydt\\&=\frac{1}{2}\left\|Au_{0,in}^1\right\|_{L^2}^2-\bar{\mathcal{T}}-\bar{D},\end{aligned}$$

其中 $\bar{\mathcal{T}}=\int_0^T\int A\left(\nabla_L^\perp\phi\cdot\nabla_L u^1\right)_0 Au_0^1dydt$。按照零频和非零频进行划分，有

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{T}}&=\int_0^T\int A\left(\nabla_L^\perp\phi_0\cdot\nabla_L u_0^1\right)Au_0^1dydt+\int_0^T\int A\left(\nabla_L^\perp\phi_0\cdot\nabla_L u_\neq^1\right)_0 Au_0^1dydt\\&\quad+\int_0^T\int A\left(\nabla_L^\perp\phi_\neq\cdot\nabla_L u_0^1\right)_0 Au_0^1dydt+\int_0^T\int A\left(\nabla_L^\perp\phi_\neq\cdot\nabla_L u_\neq^1\right)_0 Au_0^1dydt\\&=\bar{\mathcal{T}}_{00}+\bar{\mathcal{T}}_{0\neq}+\bar{\mathcal{T}}_{\neq0}+\bar{\mathcal{T}}_{\neq\neq}\end{aligned} \tag{15}$$

对于项 $\mathcal{T}_{00}$ 和项 $\mathcal{T}_{00}$，由于被积函数为 0，故为 0。对于项 $\mathcal{T}_{0\neq}$，有

$$\mathcal{T}_{0\neq}=\int_0^T\int A\left(\nabla_L^\perp\phi_0\cdot\nabla_L u_\neq^1\right)_0 Au_0^1dydt=\int_0^T\int A\left(-\partial_v\partial_v^{-2}f_0\partial_z u_\neq^1\right)Au_0^1dzdvdt$$

根据 plancherel 定理，有 $\int A\left(-\partial_v\partial_v^{-2}f_0\partial_z u_\neq^1\right)Au_0^1dzdv=0$，故项 $\mathcal{T}_{0\neq}=0$。对于项 $\mathcal{T}_{\neq\neq}$，有

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\neq\neq}&=\int_0^T\int A\left(\nabla_L^{\perp}\phi_{\neq}\cdot\nabla_L u_{\neq}^1\right)_0 Au_0^1 dydt\\&=\int_0^T\int\int A\left(\nabla_L\cdot\left(\nabla_L^{\perp}\phi_{\neq}u_{\neq}^1\right)\right)Au_0^1 dvdzdt\\&=\int_0^T\int\int A\left(\left(\partial_v-t\partial_z\right)\left(\left(\partial_v-t\partial_z\right)\phi_{\neq}\partial_z\phi_{\neq}\right)\right)Au_0^1 dvdzdt\end{aligned}$$

可以通过 H^s 代数性质和 Hölder 不等式以及(13e)和式(14a)，可以得到

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{T}_{\neq\neq}\right|&=\left|\int_0^T\int\int A\left(\left(\partial_v-t\partial_z\right)\left(\left(\partial_v-t\partial_z\right)\phi_{\neq}\partial_z\phi_{\neq}\right)\right)Au_0^1 dvdzdt\right|\\&\le\int_0^T\left|\int\int A\left(\left(\partial_v-t\partial_z\right)^2\phi_{\neq}\partial_z\phi_{\neq}+\left(\partial_v-t\partial_z\right)\phi_{\neq}\left(\partial_v-t\partial_z\right)\partial_z\phi_{\neq}\right)Au_0^1 dvdz\right|dt\\&\lesssim\int_0^T\left(\left\|\left(\partial_v-t\partial_z\right)^2\phi_{\neq}\right\|_{H^s}\left\|\partial_z\phi_{\neq}\right\|_{H^s}+\left\|\left(\partial_v-t\partial_z\right)\phi_{\neq}\right\|_{H^s}\left\|\left(\partial_v-t\partial_z\right)\partial_z\phi_{\neq}\right\|_{H^s}\right)\left\|Au_0^1\right\|_{L^2_{(z,v)}}dt\\&\lesssim\left\|f_{\neq}\right\|_{L_t^2H^s}^2\left\|Au_0^1\right\|_{L^2_{(z,v)}L_t^{\infty}}\\&\lesssim\left\|f_0\right\|_{L^{\infty}H^s}\left\|\nu^{-\frac{1}{10}}\left(\sqrt{-\dot{M}M\left(t,k,\eta\right)}+\nu^{\frac{1}{2}}\left|k,\eta-kt\right|^2\right)f_{\neq}\right\|_{L^2H^s}^2\\&\lesssim\left\|f_0\right\|_{L^{\infty}H^s}\nu^{-\frac{1}{5}}\left(\left\|\sqrt{-\dot{M}M}\left\langle\left|\nabla\right|\right\rangle^s f_{\neq}\right\|_{L^2L^2}+\nu^{\frac{1}{2}}\left\|\Delta_L Af_{\neq}\right\|_{L^2L^2}\right)^2\\&\lesssim\epsilon^3\nu^{-\frac{1}{5}}.\end{aligned}\tag{16}$$

对于项 $\bar{D}=\int_0^T\int A\left(u^2u^1\right)_0 Au_0^1 dydt$，有

$$\begin{aligned}\bar{D}&=\int_0^T\int A\left(u_0^2u_0^1\right)Au_0^1 dydt+\int_0^T\int A\left(u_0^2u_{\neq}^1\right)_0 Au_0^1 dydt\\&\quad+\int_0^T\int A\left(u_{\neq}^2u_0^1\right)_0 Au_0^1 dydt+\int_0^T\int A\left(u_{\neq}^2u_{\neq}^1\right)_0 Au_0^1 dydt\\&=\bar{D}_{00}+\bar{D}_{0\neq}+\bar{D}_{\neq0}+\bar{D}_{\neq\neq}\end{aligned}\tag{17}$$

对于项 $\bar{D}_{00}$、项 $\bar{D}_{0\neq}$，由于被积函数为 0，故为 0。对于项 $\bar{D}_{\neq0}$，有

$$\bar{D}_{\neq0}=\int_0^T\int A\left(u_{\neq}^2u_0^1\right)_0 Au_0^1 dydt=\int_0^T\int A\left(-\partial_z\left(-\Delta_L\right)^{-1}f_{\neq}u_0^1\right)Au_0^1 dzdvdt=0.\tag{18}$$

对于项 $\bar{D}_{\neq\neq}=\int_0^T\int A\left(u_{\neq}^2u_{\neq}^1\right)_0 Au_0^1 dydt$，有

$$\begin{aligned}\left|\bar{D}_{\neq\neq}\right|&=\left|\iiint A\left(-\partial_z\left(-\Delta_L\right)^{-1}f_{\neq}u_{\neq}^1\right)Au_0^1 dydt\right|\\&\le\int_0^T\left\|\partial_z\Delta_L^{-1}f_{\neq}\right\|_{H^s}\left\|u_{\neq}^1\right\|_{H^s}\left\|Au_0^1\right\|_{L^2_{(z,v)}}dt\\&\lesssim\left\|\nabla_L^{\perp}\Delta_L^{-1}f_{\neq}\right\|_{L_t^2H^s}\left\|f_{\neq}\right\|_{L_t^2H^s}\left\|Af_0\right\|_{L_t^{\infty}L^2_{(z,v)}}\end{aligned}$$

结合 M 的性质(13b)和(13c)，易证 $\left\|\nabla_L^{\perp}\Delta_L^{-1}f_{\neq}\right\|_{L_t^2H^s}\lesssim\left\|\sqrt{-\dot{M}M}\left\langle\left|\nabla\right|\right\rangle^s f\right\|_{L^2L^2}$.

$\left\|f\right\|_{L_t^2H^s}^2\approx\sum_{k\neq0}\int_0^T\left(1+k^2+\eta^2\right)^s\left|\hat{f}\right|d\eta dt$，由于 $\left\|f_{\neq}\right\|_{L_t^2H^s}^2$ 是 $\left\|f\right\|_{L_t^2H^s}^2$ 的一项，而

$$\left\|\Delta_L f_{\neq}\right\|_{L^2H^s}^2=\int_0^T\left\|\Delta_L f_{\neq}\right\|_{H^s}^2 dt=\sum_{k\neq0}\int_0^T\left(1+k^2+\eta^2\right)^s\left[k^2+\left(\eta-kt\right)^2\right]^2\left|\hat{f}\right|d\eta dt,$$

因为 $f_{\neq}$ 只包含 $|k|\ge1$，故 $k^2+\left(\eta-kt\right)^2\ge1$，从而有 $\left\|f_{\neq}\right\|_{L^2H^s}^2\lesssim\left\|\Delta_L f_{\neq}\right\|_{L^2H^s}^2$，故

$$\left|\bar{D}_{\neq\neq}\right| \lesssim \left\|\sqrt{-\dot{M}M}\langle|\nabla|\rangle^{s} f\right\|_{L^2L^2} \left\|\Delta_L f_{\neq}\right\|_{L^2H^s}^2 \left\|Af\right\|_{L_t^\infty L_{(z,v)}^2} \lesssim \epsilon^3 \nu^{-\frac{1}{2}} \tag{19}$$

通过(15)(16)(17)(18)和(19)可知(14b)对于常数 4ϵ 也成立。

对于(14a)，与(14b)一样的方法可得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|Af(t)\right\|_{L^2}^2 + \nu\left\|\Delta_L Af(t)\right\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 + \left\|\sqrt{-\dot{M}M}\langle|\nabla|\rangle^{s} f(t)\right\|_{L^2}^2$$
$$= -\int A\left(u(t)\cdot\nabla_L f(t)\right)Af(t)\,dzdv - \int A\left(u^2(t)f(t)\right)Af(t)\,dzdv - \int A\left(u(t)\cdot\nabla^{\perp}u^2(t)\right)Af(t)\,dzdv.$$

对上述等式在区间 $[0,T]$ 上进行时间积分，有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left\|Af(T)\right\|_{L^2}^2 + \nu\left\|\Delta_L Af(t)\right\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 + \left\|\sqrt{-\dot{M}M}\langle|\nabla|\rangle^{s} f(t)\right\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 \\
&= \frac{1}{2}\left\|Af(0)\right\|_{L^2}^2 - \int_0^T\int A\left(u(t)\cdot\nabla_L f(t)\right)Af(t)\,dzdvdt \\
&-\int_0^T\int A\left(u^2(t)f(t)\right)Af(t)\,dzdvdt - \int_0^T\int A\left(u(t)\cdot\nabla^{\perp}u^2(t)\right)Af(t)\,dzdvdt \\
&= \frac{1}{2}\left\|Af(0)\right\|_{L^2}^2 - \mathcal{T} - D - F,
\end{aligned}$$

其中 $\mathcal{T} = \int_0^T\int A\left(u(t)\cdot\nabla_L f(t)\right)Af(t)\,dzdvdt$。按照零频和非零频进行划分，有

$$\mathcal{T} = \int_0^T\int A\left(u_0\cdot\nabla_L f\right)Af\,dzdvdt + \int_0^T\int A\left(u_{\neq}\cdot\nabla_L f\right)Af\,dzdvdt = \mathcal{T}_0 + \mathcal{T}_{\neq}. \tag{20}$$

对于项 $\mathcal{T}_{\neq} = \int_0^T\int A\left(u_{\neq}\cdot\nabla_L f\right)Af\,dzdvdt$，有

$$\mathcal{T}_{\neq} = \int_0^T\int A\left(u_{\neq}\cdot\nabla_L f_0\right)Af\,dzdvdt + \int_0^T\int A\left(u_{\neq}\cdot\nabla_L f_{\neq}\right)Af\,dzdvdt = \mathcal{T}_{\neq 0} + \mathcal{T}_{\neq\neq}.$$

对于项 $\mathcal{T}_{\neq\neq}$，通过 H^s 代数性质和 Hölder 不等式，有

$$\begin{aligned}
\left|\mathcal{T}_{\neq\neq}\right| &\le \int_0^T\left\|A\left(u_{\neq}\cdot\nabla_L f_{\neq}\right)\right\|_{L_{(z,v)}^2}\left\|Af\right\|_{L_{(z,v)}^2}dt \\
&\lesssim \int_0^T\left\|u_{\neq}\cdot\nabla_L f_{\neq}\right\|_{H^s}\left\|Af\right\|_{L_{(z,v)}^2}dt \\
&\lesssim \int_0^T\left\|\nabla_L^{\perp}\Delta_L^{-1}f_{\neq}\right\|_{H^s}\left\|\nabla_L f_{\neq}\right\|_{H^s}\left\|Af\right\|_{L_{(z,v)}^2}dt \\
&\lesssim \left\|\nabla_L^{\perp}\Delta_L^{-1}f_{\neq}\right\|_{L_t^2H^s}\left\|\nabla_L f_{\neq}\right\|_{L_t^2H^s}\left\|Af\right\|_{L_t^\infty L_{(z,v)}^2}.
\end{aligned}$$

由于

$$\left\|\nabla_L f_{\neq}\right\|_{L^2H^s}^2 = \int_0^T\left\|\nabla_L f_{\neq}\right\|_{H^s}^2 dt = \sum_{k\neq 0}\int_0^T\left(1+k^2+\eta^2\right)^s\left[k^2+(\eta-kt)^2\right]\left|\hat{f}\right|d\eta dt,$$

$$\left\|\Delta_L f_{\neq}\right\|_{L^2H^s}^2 = \int_0^T\left\|\Delta_L f_{\neq}\right\|_{H^s}^2 dt = \sum_{k\neq 0}\int_0^T\left(1+k^2+\eta^2\right)^s\left[k^2+(\eta-kt)^2\right]^2\left|\hat{f}\right|d\eta dt,$$

其中 $k^2+(\eta-kt)^2 \ge 1$，故 $k^2+(\eta-kt)^2 \le \left[k^2+(\eta-kt)^2\right]^2$，从而 $\left\|\nabla_L f_{\neq}\right\|_{L^2H^s} \lesssim \left\|\Delta_L Af\right\|_{L^2H^s}$。故

$$\left|\mathcal{T}_{\neq\neq}\right| \lesssim \left\|\sqrt{-\dot{M}M}\langle|\nabla|\rangle^{s} f(t)\right\|_{L^2L^2}\left\|\Delta_L Af\right\|_{L^2L^2}\left\|Af\right\|_{L^\infty L^2} \lesssim \epsilon^3\nu^{-\frac{1}{2}}. \tag{21}$$

对于项 $\mathcal{T}_{\neq 0} = \int_0^T\int A\left(u_{\neq}\cdot\nabla_L f_0\right)Af\,dzdvdt$，有

$$\mathcal{T}_{\neq 0} = \int_0^T\int A\left(u_{\neq}\cdot\nabla_L f_0\right)Af_0\,dzdvdt + \int_0^T\int A\left(u_{\neq}\cdot\nabla_L f_0\right)Af_{\neq}\,dzdvdt = \mathcal{T}_{\neq 00} + \mathcal{T}_{\neq 0\neq}.$$

由于 f_0 与 z 无关，由 plancherel 定理，可得

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\neq 00} &= \int_0^T \int A\left(u_{\neq} \cdot \nabla_L f_0\right) A f_0 dzdvdt \\ &= \int_0^T \int A\left(\partial_z \Delta_L^{-1} f_{\neq} \partial_v f_0\right) A f_0 dzdvdt \\ &= 0.\end{aligned} \tag{22}$$

对于项 $\mathcal{T}_{\neq 0\neq} = \int_0^T \int A\left(u_{\neq} \cdot \nabla_L f_0\right) A f_{\neq} dzdvdt$，有

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\neq 0\neq} &= \int_0^T \int A\left(\partial_z \Delta_L^{-1} f_{\neq} \left(\partial_v f_0\big|_{|\eta|\geq 1} + \partial_v f_0\big|_{|\eta|<1}\right)\right) A f_{\neq} dzdvdt \\ &= \int_0^T \int A\left(\partial_z \Delta_L^{-1} f_{\neq}\, \partial_v f_0\big|_{|\eta|\geq 1}\right) A f_{\neq} dzdvdt + \int_0^T \int A\left(\partial_z \Delta_L^{-1} f_{\neq}\, \partial_v f_0\big|_{|\eta|<1}\right) A f_{\neq} dzdvdt \\ &= \mathcal{T}_{\neq 0\neq H} + \mathcal{T}_{\neq 0\neq L}.\end{aligned} \tag{23}$$

由于

$$\left\|\partial_v f_0\big|_{|\eta|\geq 1}\right\|_{H^s}^2 = \int \left(1+\eta^2\right)^s \eta^2 \left|\hat{f}(0,\eta)\right|^2 d\eta,$$

$$\left\|\Delta_L f\right\|_{L^2 H^s}^2 = \sum \iint \left(1+k^2+\eta^2\right)^s \left[k^2+\left(\eta-kt\right)^2\right]^2 \left|\hat{f}\right| d\eta dt.$$

故 $\left\|\partial_v f_0\big|_{|\eta|\geq 1}\right\|_{H^s}^2$ 是 $\left\|\Delta_L f\right\|_{L^2H^s}^2$ 的其中一项，从而有 $\left\|\partial_v f_0\big|_{|\eta|\geq 1}\right\|_{H^s}^2 \leq \left\|\Delta_L f\right\|_{L^2H^s}^2 \lesssim \left\|\Delta_L A f\right\|_{L^2L^2}^2$.

故

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{T}_{\neq 0\neq H}\right| &= \left|\int_0^T \int A\left(\partial_z \Delta_L^{-1} f_{\neq}\, \partial_v f_0\big|_{|\eta|\geq 1}\right) A f_{\neq} dzdvdt\right| \\ &\leq \int_0^T \left\|A\left(\partial_z \Delta_L^{-1} f_{\neq}\, \partial_v f_0\big|_{|\eta|\geq 1}\right)\right\|_{L^2_{(z,v)}} \left\|A f_{\neq}\right\|_{L^2_{(z,v)}} dt \\ &\lesssim \int_0^T \left\|\partial_z \Delta_L^{-1} f_{\neq}\right\|_{H^s} \left\|\partial_v f_0\big|_{|\eta|\geq 1}\right\|_{H^s} \left\|A f_{\neq}\right\|_{L^2_{(z,v)}} dt \\ &\lesssim \left\|\nabla_L^{\perp} \Delta_L^{-1} f_{\neq}\right\|_{L_t^2 H^s} \left\|\Delta_L A f\right\|_{L_t^2 L^2_{(z,v)}} \left\|A f\right\|_{L_t^\infty L^2_{(z,v)}} \\ &\lesssim \epsilon^3 \nu^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{24}$$

因为 $|\eta|<1$，所以 $\left\|A\partial_v f_0\big|_{|\eta|<1}\right\|_{L^\infty L^2} \lesssim \left\|A f_0\right\|_{L^\infty L^2}$，可以得到

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{T}_{\neq 0\neq L}\right| &= \left|\int_0^T \int A\left(\partial_z \Delta_L^{-1} f_{\neq}\, \partial_v f_0\big|_{|\eta|<1}\right) A f_{\neq} dzdvdt\right| \\ &\leq \int_0^T \left\|A\left(\partial_z \Delta_L^{-1} f_{\neq}\, \partial_v f_0\big|_{|\eta|<1}\right)\right\|_{L^2_{(z,v)}} \left\|A f_{\neq}\right\|_{L^2_{(z,v)}} dt \\ &\lesssim \int_0^T \left\|\partial_z \Delta_L^{-1} f_{\neq}\right\|_{H^s} \left\|A\partial_v f_0\big|_{|\eta|<1}\right\|_{L^2_{(z,v)}} \left\|\Delta_L A f_{\neq}\right\|_{L^2_{(z,v)}} dt \\ &\lesssim \left\|\nabla_L^{\perp} \Delta_L^{-1} f_{\neq}\right\|_{L_t^2 H^s} \left\|A f_0\right\|_{L_t^\infty L^2_{(z,v)}} \left\|\Delta_L A f\right\|_{L_t^2 L^2_{(z,v)}} \\ &\lesssim \epsilon^3 \nu^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{25}$$

估计零频部分，由于 f_0 与 z 无关，则 $\mathcal{T}_0$ 可写为

$$\mathcal{T}_0 = \iint A\left(-\partial_v \partial_v^{-2} f_0 \partial_z f\right) A f dzdvdt = \iint A\left(-\partial_v \partial_v^{-2} f_0 \partial_z f_{\neq}\right) A f dzdvdt. \tag{26}$$

由于 plancherel 定理，可得到

$$\int A\left(-\partial_v\partial_v^{-2} f_0\partial_z f_{\neq}\right)Af_0dvdz = 0,$$

类似 Euler 交换子估计[16]，可得到

$$\int \partial_v\partial_v^{-2} f\,\partial_z Af_{\neq} Af_{\neq} = 0.$$

因此，有

$$\mathcal{T}_0 = \iint\left(A\left(-\partial_v\partial_v^{-2} f_0\partial_z f_{\neq}\right)+\partial_v\partial_v^{-2} f_0\partial_z Af_{\neq}\right)Af_{\neq}dzdvdt. \tag{27}$$

根据 plancherel 定理，可得到

$$-\mathcal{T}_0 = \sum_{k\neq 0}\iiint\left(A(k,\xi)-A(k,\xi-\eta)\right)\frac{\eta}{\eta^2}k\hat{f}(0,\eta)\,\hat{f}(k,\xi-\eta)\,A(k,\xi)\,\overline{\hat{f}}(k,\xi)\,d\eta d\xi dt. \tag{28}$$

将差值 $A(k,\xi)-A(k,\xi-\eta)$ 分为两个交换子，一个和 M 有关，另一个和 $\langle|\nabla|\rangle^s$ 有关，则有

$$\begin{aligned}A(k,\xi)-A(k,\xi-\eta) &= M(k,\xi)\left(\left(1+k^2+\xi^2\right)^{\frac{s}{2}}-\left(1+k^2+(\xi-\eta)^2\right)^{\frac{s}{2}}\right)\\ &\quad+\left(M(k,\xi)-M(k,\xi-\eta)\right)\left(1+k^2+(\xi-\eta)^2\right)^{\frac{s}{2}}\\ &= \mathcal{I}+\mathcal{II}.\end{aligned}$$

对于 $\mathcal{I}$，通过中值定理，可得到对于某些 $\theta\in[0,1]$，使得

$$\begin{aligned}|\mathcal{I}| &= \left|M(k,\xi)\frac{s}{2}\left(1+k^2+(\xi-\theta\eta)^2\right)^{\frac{s}{2}-1}2(\xi-\theta\eta)\eta\right|\\ &\lesssim\left(\left(1+k^2+(\xi-\eta)^2\right)^{\frac{s-1}{2}}+\left(1+k^2+\xi^2\right)^{\frac{s-1}{2}}\right)|\eta|.\end{aligned} \tag{29}$$

对于 $\mathcal{II}$，由于 M 满足(13d)，根据(13d)和中值定理，有

$$|\mathcal{II}|\lesssim\frac{|\eta|}{|k|}\left(1+k^2+(\xi-\eta)^2\right)^{\frac{s}{2}}. \tag{30}$$

将(28)、(29)和(30)结合，有

$$\begin{aligned}|\mathcal{T}_0| &\lesssim \sum_{k\neq 0}\iiint\left(\left(1+k^2+(\xi-\eta)^2\right)^{\frac{s}{2}}+\left(1+k^2+\xi^2\right)^{\frac{s}{2}}\right)\\ &\quad\times\left|\hat{f}(0,\eta)\,\hat{f}(k,\xi-\eta)\right|\left|A(k,\xi)\,\overline{\hat{f}}(k,\xi)\right|d\eta d\xi dt\\ &= \sum_{k\neq 0}\iiint\left(1+k^2+(\xi-\eta)^2\right)^{\frac{s}{2}}\left|\hat{f}(0,\eta)\,\hat{f}(k,\xi-\eta)\right|\left|A(k,\xi)\,\overline{\hat{f}}(k,\xi)\right|d\eta d\xi dt\\ &\quad+\sum_{k\neq 0}\iiint\left(1+k^2+\xi^2\right)^{\frac{s}{2}}\left|\hat{f}(0,\eta)\,\hat{f}(k,\xi-\eta)\right|\left|A(k,\xi)\,\overline{\hat{f}}(k,\xi)\right|d\eta d\xi dt\\ &= \mathcal{P}+\mathcal{Q}.\end{aligned}$$

对于项 $\mathcal{P}$，则有

$$\mathcal{P} \lesssim \int_0^T \left(\sum_{k\neq 0} \iint \left[\left(1+k^2+(\xi-\eta)^2\right)^{\frac{s}{2}} \left| \hat{f}(0,\eta)\,\hat{f}(k,\xi-\eta) \right| \right]^2 d\eta d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k\neq 0} \iint \left| A\bar{\hat{f}}(k,\xi) \right|^2 d\eta d\xi \right)^{\frac{1}{2}} dt$$

$$= \int_0^T \left(\int \|f_{\neq}\|_{H^s}^2 \left| \hat{f}(0,\eta) \right|^2 d\eta \right)^{\frac{1}{2}} \|Af_{\neq}\|_{H^s}\, dt$$

$$= \|f_0\|_{L_t^\infty L_{(z,v)}^2} \|f_{\neq}\|_{L_t^2 H^s} \|Af_{\neq}\|_{L_t^2 H^s}.$$

对于项 $\mathcal{Q}$，有

$$\mathcal{Q} \lesssim \mathcal{P} + \sum_{k\neq 0} \iiint \left(1+k^2+\eta^2\right)^{\frac{s}{2}} \left| \hat{f}(0,\eta)\,\hat{f}(k,\xi-\eta) \right| \left| A\bar{\hat{f}}(k,\xi) \right| d\xi d\eta dt$$
$$= \mathcal{P} + \mathcal{R}.$$

其中

$$\mathcal{R} \lesssim \sum_{k\neq 0} \iiint \left(1+k^2\right)^{\frac{s}{2}} \left| \hat{f}(0,\eta)\,\hat{f}(k,\xi-\eta) \right| \left| A\bar{\hat{f}}(k,\xi) \right| d\xi d\eta dt$$
$$+ \sum_{k\neq 0} \iiint \eta^s \left| \hat{f}(0,\eta)\,\hat{f}(k,\xi-\eta) \right| \left| A\bar{\hat{f}}(k,\xi) \right| d\xi d\eta dt$$
$$\lesssim \int_0^T \left(\sum_{k\neq 0} \int \left| \hat{f}(k,\xi-\eta) \right|^2 \left(1+k^2\right)^s d(\xi-\eta) \int \left| \hat{f}(0,\eta) \right|^2 d\eta \right)^{\frac{1}{2}} \|Af_{\neq}\|_{H^s} dt$$
$$+ \int_0^T \left(\sum_{k\neq 0} \int \left| \hat{f}(k,\xi-\eta) \right|^2 d(\xi-\eta) \int |\eta|^{2s} \left| \hat{f}(0,\eta) \right|^2 d\eta \right)^{\frac{1}{2}} \|Af_{\neq}\|_{H^s}\, dt$$
$$= \int_0^T \|f_{\neq}\|_{H^s} \|f_0\|_{L_t^\infty L_{(z,v)}^2} \|Af_{\neq}\|_{H^s}\, dt + \int_0^T \|f_{\neq}\| \; \|f_0\|_{H^s} \|Af_{\neq}\|_{H^s}\, dt$$
$$\lesssim \left\| \nabla_L^{\perp} \Delta_L^{-1} f_{\neq} \right\|_{L_t^2 H^s} \|Af_0\|_{L_t^\infty L_{(z,v)}^2} \|\Delta_L Af\|_{L_t^2 L_{(z,v)}^2}$$

综上，可得到

$$\left|\mathcal{T}_0\right| \lesssim \|f_0\|_{L^\infty H^s} \|f_{\neq}\|_{L^2 H^s}^2 \lesssim \epsilon^3 \nu^{-\frac{1}{5}}. \tag{31}$$

对于项 $D = \int_0^T \int A\left(u^2(t)\, f(t)\right) Af(t)\, dzdvdt$，有

$$\begin{aligned} D &= \int_0^T \int A\left(u^2(t)\, f(t)\right) Af(t)\, dzdvdt \\ &= \int_0^T \int A\left(u^2 f_0\right) Af_0 dzdvdt + \int_0^T \int A\left(u^2 f_0\right) Af_{\neq} dzdvdt \\ &\quad + \int_0^T \int A\left(u^2 f_{\neq}\right) Af_0 dzdvdt + \int_0^T \int A\left(u^2 f_{\neq}\right) Af_{\neq} dzdvdt \\ &= D_{00} + D_{0\neq} + D_{\neq 0} + D_{\neq\neq} \end{aligned} \tag{32}$$

由于 f_0 与 z 无关，对于项 $D_{00} = \int_0^T \int A\left(u^2 f_0\right) Af_0 dzdvdt$，有

$$D_{00} = \int_0^T \int A\left(-\partial_z \left(-\Delta_L\right)^{-1} f_{\neq} f_0\right) Af_0 dzdvdt = 0 \tag{33}$$

对于项 $D_{0\neq} = \int_0^T \int A\left(u^2 f_0\right) Af_{\neq} dzdvdt$，有

$$\left|D_{0\neq}\right| = \left| \int_0^T \int A\left(-\partial_z \left(-\Delta_L\right)^{-1} f_{\neq} f_0\right) Af_{\neq} dzdvdt \right| \tag{34}$$

$$
\begin{aligned}
&\lesssim \int_0^T \left\|\nabla_L^{\perp}\Delta_L^{-1} f_{\neq}\right\|_{H^s} \left\|f_0\right\|_{H^s} \left\|Af_{\neq}\right\|_{L^2_{(z,v)}} dt \\
&\lesssim \left\|\nabla_L^{\perp}\Delta_L^{-1} f_{\neq}\right\|_{L_t^2H^s} \left\|Af_0\right\|_{L_t^\infty L^2} \left\|\Delta_L Af\right\|_{L_t^2L^2} \\
&\lesssim \epsilon^3 \nu^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

对于项 $D_{\neq 0} = \int_0^T \int A\left(u^2 f_{\neq}\right) Af_0 dzdvdt$，有

$$
\begin{aligned}
\left|D_{\neq 0}\right| &\le \int_0^T \left|\int A\left(-\partial_z \left(-\Delta_L\right)^{-1} f_{\neq} f_{\neq}\right) Af_0 dzdv\right| dt \\
&\lesssim \int_0^T \left\|\nabla_L^{\perp}\Delta_L^{-1} f_{\neq}\right\|_{H^s} \left\|f_{\neq}\right\|_{H^s} \left\|Af_0\right\|_{L^2_{(z,v)}} dt \\
&\lesssim \left\|\nabla_L^{\perp}\Delta_L^{-1} f_{\neq}\right\|_{L_t^2H^s} \left\|f_{\neq}\right\|_{L_t^2H^s} \left\|Af_0\right\|_{L_t^\infty L^2_{(z,v)}} \\
&\lesssim \epsilon^3 \nu^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{35}
$$

对于项 $D_{\neq\neq} = \int_0^T \int A\left(u^2 f_{\neq}\right) Af_{\neq} dzdvdt$，有

$$
\begin{aligned}
\left|D_{\neq\neq}\right| &\le \int_0^T \left|\int A\left(-\partial_z \left(-\Delta_L\right)^{-1} f_{\neq} f_{\neq}\right) Af_{\neq} dzdv\right| dt \\
&\lesssim \int_0^T \left\|\nabla_L^{\perp}\Delta_L^{-1} f_{\neq}\right\|_{H^s} \left\|f_{\neq}\right\|_{H^s} \left\|Af_{\neq}\right\|_{L^2_{(z,v)}} dt \\
&\lesssim \left\|\nabla_L^{\perp}\Delta_L^{-1} f_{\neq}\right\|_{L_t^2H^s} \left\|f_{\neq}\right\|_{L_t^2H^s} \left\|Af_{\neq}\right\|_{L_t^\infty L^2_{(z,v)}} \\
&\lesssim \epsilon^3 \nu^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{36}
$$

对于项 $F = \int_0^T \int A\left(u(t)\cdot\nabla^{\perp}u^2(t)\right) Af(t) dzdvdt$，有

$$
F = \int_0^T \int A\left(u_0\cdot\nabla^{\perp}u^2\right) Afdzdvdt + \int_0^T \int A\left(u_{\neq}\cdot\nabla^{\perp}u^2\right) Afdzdvdt = F_0 + F_{\neq} \tag{37}
$$

由于 f_0 与 z 无关，故

$$
\begin{aligned}
\left|F_{\neq}\right| &\le \int_0^T \left|\int A\left(u_{\neq}\cdot\nabla^{\perp}\left(-\partial_z\left(-\Delta_L\right)^{-1}\right) f_{\neq}\right) Afdzdv\right| dt \\
&\lesssim \int_0^T \left\|u_{\neq}\right\|_{H^s} \left\|\partial_z\nabla^{\perp}\Delta_L^{-1} f_{\neq}\right\|_{H^s} \left\|Af\right\|_{L^2_{(z,v)}} dt \\
&\lesssim \left\|\nabla_L^{\perp}\Delta_L^{-1} f_{\neq}\right\|_{L_t^2H^s} \left\|\partial_z\nabla^{\perp}\Delta_L^{-1} f_{\neq}\right\|_{L_t^2H^s} \left\|Af\right\|_{L_t^\infty L^2_{(z,v)}}
\end{aligned}
$$

其中

$$
\left\|\partial_z\nabla^{\perp}\Delta_L^{-1} f_{\neq}\right\|_{L_t^2H^s}^2 \lesssim \left\|\partial_z\nabla_L^{\perp}\Delta_L^{-1} f_{\neq}\right\|_{L_t^2H^s}^2 = \sum\int_0^T \left(1+k^2+\eta^2\right)\frac{k^2}{k^2+\left(\eta-kt\right)^2}\left|\hat{f}\right| d\eta dt
$$

$$
\left\|\Delta_L f_{\neq}\right\|_{L_t^2H^s}^2 = \int_0^T \left\|\Delta_L f_{\neq}\right\|_{H^s}^2 dt = \sum\int_0^T \left(1+k^2+\eta^2\right)\left[k^2+\left(\eta-kt\right)^2\right]^2 \left|\hat{f}\right| d\eta dt
$$

因为 $f_{\neq}$ 只包含 $|k|\ge 1$，从而有 $\left\|\partial_z\nabla^{\perp}\Delta_L^{-1} f_{\neq}\right\|_{L^2H^s} \lesssim \left\|\Delta_L f_{\neq}\right\|_{L^2H^s}$。故有

$$
\left|F_{\neq}\right| \lesssim \left\|\nabla_L^{\perp}\Delta_L^{-1} f_{\neq}\right\|_{L_t^2H^s} \left\|\Delta_L f_{\neq}\right\|_{L^2H^s} \left\|Af\right\|_{L_t^\infty L^2} \lesssim \epsilon^3 \nu^{-\frac{1}{2}}. \tag{38}
$$

对于项 $F_0 = \int_0^T \int A\left(u_0\cdot\nabla^{\perp}u^2\right) Afdzdvdt$，因为 $f_{\neq}$ 只包含 $|k|\ge 1$，从而有 $\left\|\partial_z\nabla^{\perp}\Delta_L^{-1} f_{\neq}\right\|_{L^2H^s} \lesssim \left\|f_{\neq}\right\|_{L^2H^s}$，根据(14a)

故有

$$
\begin{aligned}
|F_0| &\le \int_0^T \left| \int A\left(u_0 \cdot \nabla^{\perp} u^2\right) Afdzdv \right| dt \\
&\lesssim \int_0^T \|u_0\|_{H^s} \left\|\partial_z \nabla^{\perp} \Delta_L^{-1} f_{\neq}\right\|_{H^s} \|Af_{\neq}\|_{L^2_{(z,v)}} dt \\
&\lesssim \|u_0\|_{L_t^\infty H^s} \left\|\partial_z \nabla^{\perp} \Delta_L^{-1} f_{\neq}\right\|_{L_t^2 H^s} \|Af_{\neq}\|_{L_t^2 L^2_{(z,v)}} \\
&\lesssim \|f_0\|_{L_t^\infty H^s} \|f_{\neq}\|^2_{L_t^2 H^s}
\end{aligned}
\quad 0 \tag{39}
$$

由式(20)~(25)和(31)~(39)，可知(14b)成立。故引理 4.2.1 成立，因此，定理 2.1 成立。

参考文献

[1] Yaglom, A.M. (2012) Hydrodynamic Instability and Transition to Turbulence. Volume 100, Springer.

[2] Schmid, P.J. and Henningson, D.S. (2001) Stability and Transition in Shear Flows. Springer.

[3] Yaglom, A.M. (2012) Hydrodynamic Instability and Transition to Turbulence. Springer Science & Business Media.

[4] Reddy, S.C., Schmid, P.J., Baggett, J.S. and Henningson, D.S. (1998) On Stability of Streamwise Streaks and Transition Thresholds in Plane Channel Flows. *Journal of Fluid Mechanics*, **365**, 269-303. https://doi.org/10.1017/s0022112098001323

[5] Bedrossian, J., Germain, P. and Masmoudi, N. (2015) Dynamics near the Subcritical Transition of the 3D Couette Flow I: Below Threshold.

[6] Bedrossian, J., Germain, P. and Masmoudi, N. (2015) Dynamics near the Subcritical Transition of the 3D Couette Flow II: Above Threshold.

[7] Bedrossian, J., Germain, P. and Masmoudi, N. (2015) On the Stability Threshold for the 3D Couette Flow in Sobolev Regularity.

[8] Bedrossian, J., Masmoudi, N. and Vicol, V. (2015) Enhanced Dissipation and Inviscid Damping in the Inviscid Limit of the Navier-Stokes Equations near the Two Dimensional Couette Flow. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **219**, 1087-1159. https://doi.org/10.1007/s00205-015-0917-3

[9] Bedrossian, J. and Masmoudi, N. (2013) Inviscid Damping and the Asymptotic Stability of Planar Shear Flows in the 2D Euler Equations. Publications Mathematiques de L'ihes, 1-106.

[10] Thomson, W. (1887) XXI. Stability of Fluid Motion (Continued from the May and June Numbers). Rectilineal Motion of Viscous Fluid between Two Parallel Planes. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, **24**, 188-196. https://doi.org/10.1080/14786448708628078

[11] Orr, W. (1907) The Stability or Instability of Steady Motions of a Perfect Liquid and a Viscous Liquid, Part I: A Perfect Liquid. *Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A: Mathematical and Physical Sciences*, **27**, 9-68.

[12] Beck, M. and Wayne, C.E. (2013) Metastability and Rapid Convergence to Quasi-Stationary Bar States for the Two-Dimensional Navier-Stokes Equations. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, **143**, 905-927. https://doi.org/10.1017/s0308210511001478

[13] Lin, Z.W. and Xu, M. (2019) Metastability of Kolmogorov Flows and Inviscid Damping of Shear Flows. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **231**, 1811-1852.

[14] Ibrahim, S., Maekawa, Y. and Masmoudi, N. (2019) On Pseudospectral Bound for Non-Selfadjoint Operators and Its Application to Stability of Kolmogorov Flows. *Annals of PDE*, **5**, Article No. 14

[15] Rayleigh, L. (1879) On the Stability, or Instability, of Certain Fluid Motions. *Proceedings of the London Mathematical Society*, **1**, 57-72. https://doi.org/10.1112/plms/s1-11.1.57

[16] Kato, T. and Ponce, G. (1988) Commutator Estimates and the Euler and Navier-Stokes Equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **41**, 891-907. https://doi.org/10.1002/cpa.3160410704

[17] Luo, X. (2020) The Sobolev Stability Threshold of 2D Hyperviscosity Equations for Shear Flows near Couette Flow. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **43**, 6300-6323. https://doi.org/10.1002/mma.6372