

带有正则单模的Nakayama代数的计数

纪文昶

上海理工大学理学院, 上海

收稿日期: 2025年2月28日; 录用日期: 2025年4月10日; 发布日期: 2025年4月22日

摘要

有限生成投射模范畴的正合结构的分类与2正则单模有关。基于Nakayama代数上的正则单模的代数性质与Dyck路的组合结构的对应, 计算了带有 k 个1正则单模(或 k 个2正则单模)的 $(n+1)$ -LNakayama代数和拟遗传 n -CNakayama代数的个数。

关键词

Nakayama代数, Dyck路, 正则单模

Counting Nakayama Algebras with Regular Simple Modules

Wenchang Ji

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Feb. 28th, 2025; accepted: Apr. 10th, 2025; published: Apr. 22nd, 2025

Abstract

The classification of exact structures in the category of finitely generated projective modules for finite dimensional algebras were reduced to the classification of 2-regular simple modules. By the result of relations between regular simple modules over Nakayama algebras and certain combinatorial structures of Dyck paths, the number of $(n+1)$ -LNakayama algebras and quasi-hereditary n -CNakayama algebras that have exactly k 1-regular simple modules (respectively k 2-regular simple modules) was calculated.

Keywords

Nakayama Algebras, Dyck Paths, Regular Simple Modules



1. 研究背景

正合结构的概念源于 Quillen 在 1973 年对高维代数 K 理论的奠基性工作, 他将正合范畴定义为一种广义的 Abel 范畴, 允许在同调代数中处理更灵活的结构。此后, Bühler 系统化地发展了正合范畴的公理体系, 明确了正合结构需满足的闭包性质, 这一框架为研究非 Abel 范畴的同调性质提供了统一视角。正合结构能够刻画模范畴的导出范畴性质, 同时与 Serre 子范畴、Ext 函子的性质密切相关。Enomoto 在文[1]证明了有限生成投射模范畴的正合结构的分类与 2 正则单模有关, 即若代数 A 恰有 m 个 2 正则单模, 则 A 上的有限生成投射模范畴的正合结构有 2^m 个, 因此研究一个代数上的 2 正则单模有很重要的意义。文[2]将 Nakayama 代数中的正则单模的代数性质对应到 Dyck 路的组合结构, 并计算了没有 1 正则单模(或 2 正则单模)的 $(n+1)$ -LNakayama 代数和拟遗传 n -CNakayama 代数的个数。本文利用[2]给出的对应, 通过对生成函数的推导, 对文[2]的结果进行了推广, 计算了带有 k 个 1 正则单模(或 k 个 2 正则单模)的 $(n+1)$ -LNakayama 代数和拟遗传 n -CNakayama 代数的个数, 后者即满足其上有限生成投射模范畴的正合结构有 2^k 个的 $(n+1)$ -LNakayama 代数和拟遗传 n -CNakayama 代数的个数。

代数 A 上, 如果一个 A 模的所有子模的集在包含关系下是线性有序的, 则称它是单列模。如果每一个不可分解投射右(左) A 模是单列模, 则称代数 A 是右(左)序列的。如果有限维代数 A 既是左序列的又是右序列的, 则称代数 A 为 Nakayama 代数(也叫做广义单列代数), 在表示论中是最基本的有限维代数。带有 n 个单模 S_i , $0 \leq i < n$ 的 Nakayama 代数记为 n -Nakayama 代数, 它的箭图表示只有顶点数为 n 的有向路和顶点数为 n 的有向圈两种情况[3], 箭图的第 i 个点对应单模 S_i , 两种箭图对应的代数分别称为 n -LNakayama 代数和 n -CNakayama 代数。

设 e_i 是对应 n -Nakayama 代数 A 的箭图第 i 个点的本原幂等元, 则 A 的 Kupisch 序列定义为 $[c_0, c_1, \dots, c_{n-1}]$, 其中 $c_i \geq 1$ 是不可分解投射模 $e_i A$ 作向量空间时的维数, 它有如下性质[4]。

(1) 若 A 是 n -LNakayama 代数, 则 $c_{i+1} + 1 \geq c_i$, $0 \leq i < n$ 且 $c_i \geq 2$, $0 \leq i < n-1$, $c_{n-1} = 1$ 。Kupisch 序列在同构意义下唯一决定了 n -LNakayama 代数。

(2) 若 A 是 n -CNakayama 代数, 则 $c_{i+1} + 1 \geq c_i$, $0 \leq i < n$, $c_n = c_0$ 且 $c_i \geq 2$, $0 \leq i < n$ 。两个 n -CNakayama 代数同构当且仅当它们的 Kupisch 序列在轮换意义下相同。为了方便, 记 $[c_0, c_1, \dots, c_{n-1}]$ 在轮换意义下的等价类为 $[c_0, c_1, \dots, c_{n-1}]_{\circ}$ 。

每个 $(n+1)$ -LNakayama 代数以如下方式和一个 n -Dyck 路一一对应, 设其 Kupisch 序列为 $[c_0, c_1, \dots, c_n]$, 在平面网格上沿着网格做一条在直线 $y = x$ 上方的从 $(0, 0)$ 到 (n, n) 折线, 使得折线与 $y = x$ 包围的点集 Ω 中, 纵坐标为 i 的点恰有 c_i 个, 这样的折线就是一条 n -Dyck 路。同样每个 n -CNakayama 代数和周期为 n 的 Dyck 路一一对应, 此时若它的 Kupisch 序列 $[c_0, c_1, \dots, c_n]$ 最小数为 $c+2$, 则它与 $y = x+c$ 有交点。

命题 1.1 每个 $(n+1)$ -LNakayama 代数和周期为 n 的 Dyck 路一一对应。每个 Kupisch 序列最小数为 $c+2$ 的 n -CNakayama 代数和周期为 n 且在 $y = x+c$ 上的 Dyck 路一一对应。

定义 1.2 设 A 是一个有限维代数, S 是单的 A 模。对 $k \in \mathbb{N}$, S 是 k 正则的当且仅当

- (1) $\text{pd}(S) = k$;
- (2) $\text{Ext}_A^i(S, A) = 0$, $0 \leq i < k$;

(3) $\dim \text{Ext}_A^k(S, A) = 1$ 。

定义 1.3 [2] 在 Dyck 路中,

(1) 点 (i, j) 是 1-rise 当且仅当 $j = i + c_i - 1$ 且 $c_i = c_{i-1}$, $i > 0$ 或者 $c_0 = 2$ 。如图 1 红色所示。

(2) 第 s 位置的 k -hill 定义为经过 (s, s) , $(s, s+k)$, $(s+k, s+k)$ 的折线。一个 s 位置的 2-hill 如图 1 蓝色所示。

(3) 只与 $y = x$ 有两个交点的 Dyck 路称为是本原的。

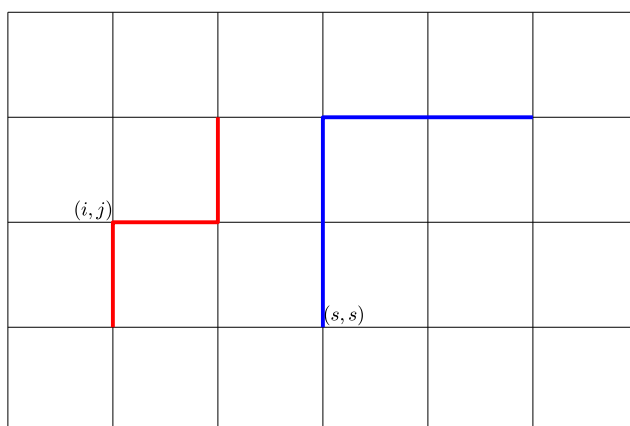


Figure 1. A rise at (i, j) and a 2-hill at position s

图 1. 在 (i, j) 位置的 1-rise 和在 s 位置的 2-hill

例子 1.4 图 2 是一个带有 Kupisch 序列 $[3, 2, 2, 2, 1]$ 的 5-LNakayama 代数, 对应一个从 $(0, 0)$ 经过 $(0, 2)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 3)$, $(3, 4)$, $(4, 4)$ 的 4-Dyck 路。其中 $(2, 3)$ 和 $(3, 4)$ 是 1-rise, 第 0 位置有 2-hill, 第 2 和 3 位置有 1-hill, 它不是本原的。

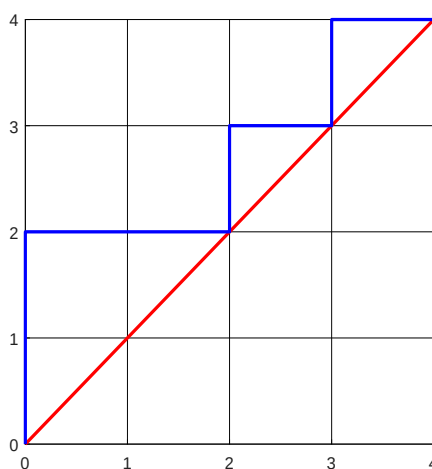


Figure 2. A 5-LNakayama algebra with Kupisch series $[3, 2, 2, 2, 1]$

图 2. Kupisch 序列为 $[3, 2, 2, 2, 1]$ 的 5-LNakayama 代数

2. LNakayama 代数情形的计数

定理 2.1 [2] 每个带有 $n+1$ 个单模 S_i , $0 \leq i < n+1$ 的 $(n+1)$ -Nakayama 代数 A , 若其 Kupisch 序列为

$[c_0, c_1, \dots, c_n]$, 令 $d_i = \min\{k \mid k \geq c_{i-k}\}$, 则

- (1) $\text{pd}(S_i) = 1$ 当且仅当 $c_{i+1} + 1 = c_i$,
- (2) $\text{pd}(S_i) = 2$ 当且仅当 $c_{i+1} + 1 = c_{i+c_i} + c_i$,
- (3) S_i 是 1 正则当且仅当 $c_i - c_{i+1} = d_i - d_{i+1} = 1$,
- (4) S_i 是 2 正则当且仅当 $c_i = d_{i+2} = 2$ 且 $c_{i+1} - c_{i+2} = d_{i+1} - d_i = 1$ 。

文[2]用代数方法证明了定理 2.1, 因为每个 Kupisch 序列对应一个 Dyck 路, 这样就可以通过 Dyck 路的结构刻画单模 S_i 。为了让这些结构更易于计算, [2]接着采用了 LaLanne-Kreweras 对合等将 Dyck 路映射到 Dyck 路的技术, 简化了定理 2.1 的组合性质, 得到定理 2.2 和定理 3.2。

定理 2.2 [2] 存在一个 $(n+1)$ -LNakayama 代数到 n -Dyck 路的一一映射 ω , 使得对每个带有 $n+1$ 个单模 S_i , $0 \leq i < n+1$ 的 $(n+1)$ -LNakayama 代数 A ,

- (1) S_i 是 1 正则当且仅当 $\omega(A)$ 在 $x=i$ 位置有 1-rise;
- (2) S_i 是 2 正则当且仅当 $\omega(A)$ 在 i 位置有 2-hill。

定理 2.3 $(n+1)$ -LNakayama 代数的个数是 $\frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$ 。

证明 设 $(n+1)$ -LNakayama 代数的个数为 d_n , 由命题 1.1 $(n+1)$ -LNakayama 代数和 n -Dyck 路一一对应, 故 $D(x) = \sum_{n \geq 0} d_n x^n$ 是 n -Dyck 路的生成函数。每个 Dyck 路由一个本原 Dyck 路和一个更短的 Dyck 路组成, 所以 $D(x) = 1 + xD(x)^2$, 展开得到

$$D(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{2}{1 + \sqrt{1-4x}} = \sum_{n \geq 0} \frac{\binom{2n}{n}}{n+1} x^n。$$

定理 2.4 设带有 k 个 1 正则单模和 l 个 2 正则单模的 $(n+1)$ -LNakayama 代数的个数为 $d_{n,k,l}$, 则它的生成函数

$$\begin{aligned} D(x, q, t) &= \sum_{n,k,l} d_{n,k,l} x^n q^k t^l \\ &= 1 + qx + (q^2 + t)x^2 + (q^3 + 2qt + q + 1)x^3 + \dots \end{aligned}$$

满足

$$\begin{aligned} &(x^4(t-1)^2 + x^3(t-1)(q-1) - x^2(t-1+q-1) + x)D(x, q, t)^2 \\ &+ (2x^2(t-1) + x(q-1) - 1)D(x, q, t) + 1 = 0. \end{aligned}$$

证明 根据定理 2.2, $D(x, q, t)$ 是带有 k 个 1-rise 和 l 个 2-hill 的 n -Dyck 路的生成函数, $D(x, q, 0)$ 则是带有 k 个 1-rise 和没有 2-hill 的 n -Dyck 路的生成函数, $D(x, q, 1)$ 是带有 k 个 1-rise 的 n -Dyck 路的生成函数。每个 Dyck 路或者是没有 2-hill 的, 或者由一个没有 2-hill 的 Dyck 路, 一个 2-hill 和一个更短的 Dyck 路组成, 故

$$D(x, q, t) = D(x, q, 0) + D(x, q, 0)x^2tD(x, q, t)。$$

每个没有 2-hill 的 Dyck 路或者是空集, 或者开始于一个 1-hill (它贡献一个 1-rise), 或者开始于一个经过 $(0, 0)$, $(0, 2)$ 的本原 Dyck 路, 这样的带 k 个 1-rise 的本原 Dyck 路的生成函数记为 $D(x, q)$, 则

$$D(x, q, 0) = 1 + xqD(x, q, 0) + D(x, q)D(x, q, t)。$$

每个带 k 个 1-rise 经过 $(0,0)$, $(0,2)$ 的本原 $(n+1)$ -Dyck 路, 可以看作是 $y=x+1$ 上方从 $(0,1)$ 到 $(n-1,n)$ 的带 k 个 1-rise 的 n -Dyck 路, 但位于 $y=x+1$ 上从 $(0,1)$ 到 $(0,2)$, $(1,2)$, $(n-1,n)$ 的带 k 个 1-rise 的 n -Dyck 路, 对原来的本原 $(n+1)$ -Dyck 路只贡献了 $k-1$ 个 1-rise, 因此

$$D(x, q) = x(D(x, q, 1) - 1 - qx) + (x^2 - qx^2)(D(x, q, 1) - 1).$$

由以上关系得到

$$\begin{aligned} & (x^4(t-1)^2 + x^3(t-1)(q-1) - x^2(t-1+q-1) + x)D(x, q, t)^2 \\ & + (2x^2(t-1) + x(q-1) - 1)D(x, q, t) + 1 = 0. \end{aligned}$$

定理 2.5 带有 k 个 1 正则单模的 $(n+1)$ -LNakayama 代数的个数为

$$\sum_{m=0}^{n-k} \frac{(-1)^{k+n-m}}{m+1} \binom{2m}{m} \binom{n}{m} \binom{n-m}{k}.$$

证明 由定理 2.2, 带有 k 个 1-rise 的 n -Dyck 路的生成函数 $D(x, q, 1)$ 也是带有 k 个 1 正则单模的 $(n+1)$ -LNakayama 代数的生成函数。记 $[x^n]D(x, q, 1)$ 为 $D(x, q, 1)$ 展开式中 x^n 的系数, 在定理 2.4 中, 令 $t=1$ 得

$$\begin{aligned} [x^n q^k]D(x, q, 1) &= [x^n q^k] \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4x}{1 - x(q-1)}}}{2x} \\ &= [x^n q^k] D\left(\frac{x}{1 - x(q-1)}\right) \frac{1}{1 - x(q-1)} \\ &= [x^n q^k] \sum_{m \geq 0} \frac{\binom{2m}{m}}{m+1} x^m \left(\frac{1}{1 - x(q-1)}\right)^{m+1} \\ &= [x^n q^k] \sum_{m \geq 0} \frac{\binom{2m}{m}}{m+1} x^m \sum_{j \geq 0} \binom{m+j}{j} x^j (q-1)^j \\ &= [x^n q^k] \sum_{m \geq 0} \frac{\binom{2m}{m}}{m+1} x^m \sum_{j \geq 0} \binom{m+j}{j} x^j \sum_{s=0}^j \binom{j}{s} (-1)^{j+s} q^s \\ &= \sum_{m=0}^{n-k} \frac{(-1)^{k+n-m}}{m+1} \binom{2m}{m} \binom{n}{m} \binom{n-m}{k}, \end{aligned}$$

其中 $D(x)$ 是定理 2.3 中的生成函数。

推论 2.6 没有 1 正则单模的 $(n+1)$ -LNakayama 代数的个数为

$$\sum_{m=0}^n \frac{(-1)^{n-m}}{m+1} \binom{2m}{m} \binom{n}{m}.$$

定理 2.7 [5] 设 H 和 F 是两个形式幂级数, 且存在逆函数 F^{-1} , 则

$$[x^n]H(F(x)) = \frac{1}{n} [x^{n-1}]H'(x) \left(\frac{x}{F^{-1}(x)} \right)^n.$$

定理 2.8 带有 k 个 2 正则单模的 $(n+1)$ -LNakayama 代数的个数为

$$\sum_{m=k}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^{m+k} \frac{m+1}{n-m+1} \binom{m}{k} \binom{2n-3m}{n-m}.$$

证明 类似定理 2.5 的证明, 只需计算 $[x^n t^k] D(x, 1, t)$ 。因 $D(x) = 1 + xD(x)^2$, $D(x) - 1$ 的逆为 $\frac{x}{(1+x)^2}$,

利用定理 2.7 得到 $[x^j] D(x)^m = \frac{m}{j} [x^{j-1}] (1+x)^{m-1} (1+x)^{2j} = \frac{m}{2j+m} \binom{2j+m}{j}$, 即

$D(x)^m = \sum_{j \geq 0} \frac{m}{2j+m} \binom{2j+m}{j} x^j$ 。由定理 2.4 得

$$\begin{aligned} [x^n t^k] D(x, 1, t) &= [x^n t^k] \frac{2}{1 + \sqrt{1-4x-2x^2}(t-1)} \\ &= [x^n t^k] \frac{D(x)}{1-x^2(t-1)D(x)} \\ &= [x^n t^k] \sum_{m \geq 0} x^{2m} (t-1)^m D(x)^{m+1} \\ &= [x^n t^k] \sum_{m \geq 0} x^{2m} \sum_{j \geq 0} \frac{m+1}{2j+m+1} \binom{2j+m+1}{j} x^j \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} (-1)^{m+s} t^s \\ &= \sum_{m=k}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^{m+k} \frac{m+1}{n-m+1} \binom{m}{k} \binom{2n-3m}{n-m} \end{aligned}$$

推论 2.9 没有 2 正则单模的 $(n+1)$ -LNakayama 代数的个数为

$$\sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^m \frac{m+1}{n-m+1} \binom{2n-3m}{n-m}.$$

文[2]在 Corollary 3.23 中计算 $D(x, q, t)$ 时出现了错误。注意到 $\sum_{m=0}^n \frac{(-1)^{n-m}}{m+1} \binom{2m}{m} \binom{n}{m}$ 是一个 Riordan 数[6], 因此我们的推论 2.6 和推论 2.9 和文[2]的 Corollary 3.21 和 Corollary 3.22 是一致的。

3. 拟遗传 CNakayama 代数情形的计数

n -CNakayama 代数的 Kupisch 序列 $[c_0, c_1, \dots, c_{n-1}]_{\odot}$ 满足 $c_{i+1} + 1 \geq c_i$, $0 \leq i < n$, $c_n = c_0$ 且 $c_i \geq 2$, $0 \leq i < n$ 。CNakayama 代数是拟遗传代数当且仅当它有投射维数是 2 的单模[7]。

定理 3.1 [2] (1) 对任意非负整数 c , 存在一个一一映射, 使得每个拟遗传 n -CNakayama 代数映射到一个带有非常值且最小数为 $c+2$ 的 Kupisch 序列的 n -CNakayama 代数。

(2) 拟遗传 n -CNakayama 代数个数为 $\frac{1}{2n} \sum_{k|n} \phi(n/k) \binom{2k}{k} - 1$, 这里及下文的 ϕ 是欧拉函数。

引理 3.2 [8] (Burnside 引理) 群 G 在集合 Ω 上作用得到的轨道个数为 $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} N(g)$, 这里 $N(g)$ 表示

在 g 作用下 Ω 中不变的元素的个数。

定理 3.1 (2) 的证明 设由 n 阶循环置换 $\pi = (012 \dots n-1)$ 生成的群为 G , 在不考虑轮换下设最小数 $c+2$ 的 Kupisch 序列 $[c_0, c_1, \dots, c_{n-1}]$ 构成集合 Ω_n , 其中 $[c_0, c_1, \dots, c_{n-1}]$ 在 π^m 作用下映射到

$[c_{\pi^m 0}, c_{\pi^m 1}, \dots, c_{\pi^m (n-1)}]$ 。由引理 3.2, 最小值 $c+2$ 的 $[c_0, c_1, \dots, c_{n-1}]_{\odot}$ 的个数为 G 在集合 Ω_n 上作用得到的轨道个数, 常值只有 $[c+2, c+2, \dots, c+2]_{\odot}$ 。

注意到 π^m 是 k 个不同循环的乘积, 0 到 $k-1$ 在不同的循环里, 每个循环的长度为 n/k , 其中 $k = \gcd(n, m)$ 。所以 $N(\pi^m)$ 的个数为满足 $c_{i+1} + 1 \geq c_i$, $0 \leq i < k$, $c_n = c_0$ 且 $c_i \geq c+2$, $0 \leq i < k-1$ 的最小值 $c+2$ 的数组 $[c_0, c_1, \dots, c_{k-1}]$ 的个数, 即为 $|\Omega_k|$ 。仿照命题 1.1 将 $[c_0, c_1, \dots, c_{k-1}]$ 与 Dyck 路对应的方法, 平面网格上每个 $(0, 0)$ 到 $(1, 0)$ 再到 $(k-1, k-1)$ 的路径, 都恰有一个数 s , 使得路径向上平移 s 格后, 与 $y=x$ 之间的点中, 横坐标为 i 的点的个数恰为 c_i , 且 c_i 中最小值为 $c+2$, 这就建立了 Ω_k 与 $(0, 0)$ 到 $(1, 0)$

再到 $(k-1, k-1)$ 的路径的一一对应, 这样的路径有 $\frac{1}{2} \binom{2k}{k}$ 个, 而满足 $k = \gcd(n, m)$ 的 m 有 $\phi(n/k)$ 个, 于是

由引理 3.2, 所求代数的个数为群 G 在集合 Ω_n 上作用得到的轨道个数

$$\frac{1}{|G|} \sum_{0 \leq m < n} N(\pi^m) = \frac{1}{2n} \sum_{k|n} \phi(n/k) \binom{2k}{k}。$$

定理 3.3 [2] 存在一个拟遗传 n -CNakayama 代数到非常值的周期为 n 的 Dyck 路的一一映射 ω , 使得对每个带有 n 个单模 S_i , $0 \leq i < n$ 的 n -CNakayama 代数 A ,

- (1) $\omega(A)$ 与 $y=x$ 有交点;
- (2) S_i 是 1 正则当且仅当 $\omega(A)$ 在 $x=i$ 位置有 1-rise;
- (3) 是 2 正则当且仅当 $\omega(A)$ 在 i 位置有 2-hill。

定理 3.4 [9] 一族互不相交的非空有限集 $(R_{n,l})_{n,l \in \mathbb{N}}$, 令 $R(x, q) = \sum_{n,l} |R_{n,l}| x^n q^l$ 为它的生成函数。对 $n, l \in \mathbb{N}$, 定义集合 $C_{n,l} = \{[r_0, r_1, \dots, r_k]_{\odot} \mid r_i \in A_{n_i, l_i}, \sum_i n_i = n, \sum_i l_i = l\}$ 。则

$$|C_{n,l}| = \sum_{k|\gcd(l,n)} \frac{\phi(k)}{k} [x^{n/k} q^{l/k}] \ln \frac{1}{1-R(x, q)}。$$

定理 3.5 带有 l 个 1 正则单模的拟遗传 n -CNakayama 代数的个数为

$$\sum_{k|\gcd(l,n)} \frac{\phi(k)}{2n} \left[\sum_{m=0}^{n/k-l/k} (-1)^{n/k-l/k-m} \binom{2m}{m} \binom{n/k}{m} \binom{n/k-m}{l/k} + (-1)^{n/k-l/k} \binom{n/k}{l/k} \right]。$$

证明 为了方便, 以后记 n/k 和 l/k 为 $\tilde{n}$ 和 $\tilde{l}$ 。由定理 3.3, 我们只需计算与 $y=x$ 有交点且有 l 个 1-rise 的周期为 n 的 Dyck 路的个数, 每个这样的 Dyck 路由若干本原 Dyck 路组成。设 $R_{n,l}$ 为带有 l 个 1-rise 的本原 n -Dyck 路的集合, 其生成函数为 $R(x, q) = \sum_{n,l} |R_{n,l}| x^n q^l$, 根据定理 3.4,

$\sum_{k|\gcd(l,n)} \frac{\phi(k)}{k} [x^{\tilde{n}} q^{\tilde{l}}] \ln \frac{1}{1-R(x, q)}$ 即为所求结果。利用定理 2.4 的 $D(x, q, t)$, 每个 Dyck 路由一个本原 Dyck

路和更短的 Dyck 路组成, 故

$$D(x, q, 1) = 1 + R(x, q) D(x, q, 1)$$

且

$$D(x, q, 1) = D\left(\frac{x}{1-x(q-1)}\right) \frac{1}{1-x(q-1)},$$

这里 $D(x) = 1 + xD(x)^2$ 。 $D(x)-1$ 的逆为 $\frac{x}{(1+x)^2}$, 根据定理 2.7,

$$[x^n] \ln D(x) = [x^n] \ln(D(x)-1+1) = \frac{1}{n} [x^{n-1}] (1+x)^{2n-1} = \frac{1}{2n} \binom{2n}{n}。$$

此时

$$\begin{aligned}
 [x^{\tilde{n}}q^{\tilde{l}}]\ln\frac{1}{1-R(x,q)} &= [x^{\tilde{n}}q^{\tilde{l}}]\ln D(x,q,1) = [x^{\tilde{n}}q^{\tilde{l}}]\ln\left[D\left(\frac{x}{1-x(q-1)}\right)\frac{1}{1-x(q-1)}\right] \\
 &= [x^{\tilde{n}}q^{\tilde{l}}]\sum_{m\geq 1}\frac{1}{2m}\binom{2m}{m}\left(\frac{x}{1-x(q-1)}\right)^m + [x^{\tilde{n}}q^{\tilde{l}}]\sum_m\frac{1}{m}x^m(q-1)^m \\
 &= [x^{\tilde{n}}q^{\tilde{l}}]\sum_{m\geq 1}\frac{1}{2m}\binom{2m}{m}x^m\sum_{j\geq 0}\binom{m+j-1}{m-1}x^j(q-1)^j + \frac{(-1)^{\tilde{n}-\tilde{l}}}{\tilde{n}}\binom{\tilde{n}}{\tilde{l}} \\
 &= \sum_{m=0}^{\tilde{n}-\tilde{l}}\frac{(-1)^{\tilde{n}-\tilde{l}-m}}{2\tilde{n}}\binom{2m}{m}\binom{\tilde{n}}{\tilde{l}}\binom{\tilde{n}-m}{\tilde{l}} + \frac{(-1)^{\tilde{n}-\tilde{l}}}{2\tilde{n}}\binom{\tilde{n}}{\tilde{l}}
 \end{aligned}$$

推论 3.6 没有 1 正则单模的拟遗传 n -CNakayama 代数的个数为

$$\sum_{k|n}\frac{\phi(k)}{2n}\left[\sum_{m=0}^{n/k}(-1)^{n/k-m}\binom{2m}{m}\binom{n/k}{m}+(-1)^{n/k}\right].$$

定理 3.7 带有 l 个 2 正则单模的拟遗传 n -CNakayama 代数的个数为

$$\sum_{k|\gcd(l,n)}\frac{\phi(k)}{k}\sum_{m=l/k}^{\lfloor\frac{n}{2k}\rfloor}\frac{(-1)^{m-l/k}}{2n/k-3m}\binom{m}{l/k}\binom{2n/k-3m}{n/k-m}.$$

证明 由定理 3.3, 我们只需计算与 $y=x$ 有交点且有 l 个 2-hill 的周期为 n 的 Dyck 路的个数。设 $R_{n,l}$ 为带有 l 个 2-hill 的本原 n -Dyck 路的集合, 其生成函数为 $R(x,q)=xD(x)-x^2+x^2q$, 这里 $D(x)=1+xD(x)^2$ 。根据定理 3.4, 我们只要计算 $\sum_{k|\gcd(l,n)}\frac{\phi(k)}{k}[x^{\tilde{n}}q^{\tilde{l}}]\ln\frac{1}{1-R(x,q)}$ 。注意到 $xD(x)$ 的逆为 $x-x^2$, 利用定理 2.7, 得到 $[x^n]\frac{1}{m}(xD(x))^m=\frac{1}{n}\binom{2n-m-1}{n-m}$ 。

此时

$$\begin{aligned}
 [x^{\tilde{n}}q^{\tilde{l}}]\ln\frac{1}{1-R(x,q)} &= [x^{\tilde{n}}q^{\tilde{l}}]\ln\frac{1}{1-xD(x)-x^2(q-1)} \\
 &= [x^{\tilde{n}}q^{\tilde{l}}]\ln\frac{D(x)}{1-x^2(q-1)D(x)} \\
 &= [x^{\tilde{n}}q^{\tilde{l}}]\sum_{m\geq 1}\frac{x^m}{m}(xD(x))^m(q-1)^m \\
 &= [x^{\tilde{n}}q^{\tilde{l}}]\sum_{m\geq 1}\sum_{s\geq 1}\frac{1}{s}\binom{2s-m-1}{s-m}x^{m+s}\sum_{j=0}^m(-1)^{m-j}\binom{m}{j}q^j \\
 &= \sum_{m=\tilde{l}}^{\lfloor\frac{\tilde{n}}{2}\rfloor}\frac{(-1)^{m-\tilde{l}}}{2\tilde{n}-3m}\binom{m}{\tilde{l}}\binom{2\tilde{n}-3m}{\tilde{n}-m}
 \end{aligned}$$

推论 3.8 没有 2 正则单模的拟遗传 n -CNakayama 代数的个数为

$$\sum_{k|n}\frac{\phi(k)}{k}\sum_{m=0}^{\lfloor\frac{n}{2k}\rfloor}\frac{(-1)^m}{2n/k-3m}\binom{2n/k-3m}{n/k-m}-1.$$

周期为 n 的常值 Dyck 路 $[2, 2, \dots, 2]_{\circ}$ 与 $y = x$ 有交点, 它有 n 个 1-rise 但没有 2-hill, 因此在推论 3.8 的计算中要排除. 推论 3.8 和 [2] 中 Corollary 3.39 是一致的, 该文在 Corollary 3.38 的结果出现了笔误, 正确结果为 $\sum_{k|n} \frac{\phi(k)}{n} \sum_{m=1}^{n/k-1} \binom{m-1}{n/k-m-1} \binom{n/k}{m}$, 这与推论 3.6 也是一致的, 因为定理 3.6 中的生成函数 $R(x, 0)$ 是 Corollary 3.38 中要求的生成函数 $R(x)$ 。

4. 结论

本文利用 Dyck 路计算了带有 k 个 1 正则单模(或 k 个 2 正则单模)的 $(n+1)$ -LNakayama 代数和拟遗传 n -CNakayama 代数的个数。但在处理 3 正则单模的时候遇到了困难, 因为投射维数为 3 的单模的组合性质无法像定理 2.1 和定理 2.2 一样很好用 Dyck 路的刻画, 也许会用到 Dyck 路的变式, 比如 Bessel 路的离散形式。

除了计算 Nakayama 代数的正则单模, 利用 Kupisch 序列和 Dyck 路也可以计算满足某些条件的 Nakayama 代数, 比如 [2] 在最后还计算了整体维数 2 的限制 Gorenstein 条件下 n -LNakayama 代数和 n -CNakayama 代数, 还可以考虑 finitistic 维数限制下 Nakayama 代数的个数。此外, ADe 型代数的基本倾斜模和拟遗传代数的标准模的层结构等代数结构也与 Dyck 路有关, 可以参考本文思路研究他们的计数问题。

参考文献

- [1] Enomoto, H. (2018) Classifications of Exact Structures and Cohen-Macaulay-Finite Algebras. *Advances in Mathematics*, **335**, 838-877. <https://doi.org/10.1016/j.aim.2018.07.022>
- [2] Marczinzik, R., Rubey, M. and Stump, C. (2021) A Combinatorial Classification of 2-Regular Simple Modules for Nakayama Algebras. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **225**, Article 106520. <https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2020.106520>
- [3] Assem, I., Skowronski, A. and Simson, D. (2006) Elements of the Representation Theory of Associative Algebras. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/cbo9780511614309>
- [4] Fuller, K.R. (1968) Generalized Uniserial Rings and Their Kupisch Series. *Mathematische Zeitschrift*, **106**, 248-260. <https://doi.org/10.1007/bf01110273>
- [5] Gessel, I.M. (2016) Lagrange Inversion. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **144**, 212-249. <https://doi.org/10.1016/j.jcta.2016.06.018>
- [6] Bernhart, F.R. (1999) Catalan, Motzkin, and Riordan Numbers. *Discrete Mathematics*, **204**, 73-112. [https://doi.org/10.1016/s0012-365x\(99\)00054-0](https://doi.org/10.1016/s0012-365x(99)00054-0)
- [7] Uematsu, M. and Yamagata, K. (1990) On Serial Quasi-Hereditary Rings. *Hokkaido Mathematical Journal*, **19**, 165-174. <https://doi.org/10.14492/hokmj/1381517167>
- [8] Klass, M.J. (1976) A Generalization of Burnside's Combinatorial Lemma. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **20**, 273-278. [https://doi.org/10.1016/0097-3165\(76\)90021-2](https://doi.org/10.1016/0097-3165(76)90021-2)
- [9] Bergeron, F., Labelle, G. and Leroux, P. (1997) Combinatorial Species and Tree-Like Structures. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/cbo9781107325913>