Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(4), 266-271
Published Online April 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.154129

Hans汉斯

涉及拉东测度的*p-Laplacian*退化椭圆方程的不存在性结果

严佳瑶

上海理工大学理学院，上海

收稿日期：2025年3月9日；录用日期：2025年4月10日；发布日期：2025年4月22日

摘 要

在本文中，我们研究了一类非线性*p-Laplacian*退化椭圆方程解的不存在性：

$$\begin{cases} -div\left(\dfrac{a(x,\nabla u)}{(1+u)^{\gamma(p-1)}}\right)+u=\mu & x\in\Omega, \\ u=0 & x\in\partial\Omega. \end{cases}$$

其中$1<p<2$，$\gamma>1$，且μ是一个非负拉东测度，集中于调和容量为零的集合E上。本文首先利用截断技巧构造逼近方程，并借助Lions的结果和估计，获得逼近解的存在性及估计，这些估计保证了通过逼近问题的解取极限，可以得到原问题的解。最后，借助控制收敛定理、弱下半连续性及其他相关方法，证明了在源项为集中于调和容量为零的集合的拉东测度时，原问题的解趋于零。

关键词

非线性椭圆方程，拉东测度，*p*拉普拉斯

Non-Existent Results of the *p-Laplacian* Degenerate Elliptic Equation Involving the Ladon Measure

Jiayao Yan

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Mar. 9th, 2025; accepted: Apr. 10th, 2025; published: Apr. 22nd, 2025

Abstract

In this paper we study the existence and regularity of solutions for a class of nonlinear degenerate

文章引用：严佳瑶. 涉及拉东测度的 *p-Laplacian* 退化椭圆方程的不存在性结果[J]. 理论数学, 2025, 15(4): 266-271.
DOI: 10.12677/pm.2025.154129

elliptic equations $\begin{cases} -div\left(\frac{a(x,\nabla u)}{(1+u)^{\gamma(p-1)}}\right)+u=\mu & x\in\Omega, \\ u=0 & x\in\partial\Omega. \end{cases}$ where $1<p<2$, $\gamma>1$, and μ is a nonnegative Radon measure concentrated on a set of zero harmonic capacity. This paper first employs a truncation technique to construct an approximating equation. By utilizing Lions' results and estimates, the existence and a priori bounds of the approximate solution are obtained. These estimates ensure that the solution to the original problem can be derived by taking the limit of the solutions to the approximating problems. Finally, using the controlled convergence theorem, weak lower semicontinuity, and other related methods, it is proven that when the source term is a Radon measure concentrated on a set of zero harmonic capacity, the solution to the original problem tends to zero.

Keywords

Nonlinear Degenerate Elliptic Equations, Radon Measure, *p-Laplacian*

1. 引言与主要结果

椭圆型偏微分方程在数学、物理、工程等多个领域具有重要应用，尤其是在非牛顿流体力学、图像处理、材料科学等问题中。p-Laplacian 方程是一类重要的非线性椭圆方程，其标准形式为：

$$-div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)=f(x) \quad x\in\Omega,$$

其中 $p>1$，Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 的一个有界区域。关于该方程解的存在性和正则性，已有大量研究。例如，Serrin 等人[1]研究了二阶拟线性椭圆方程的局部行为，并证明了在适当条件下解的正则性。Lions [2]和 DiBenedetto [3]等人利用变分法、能量估计及对偶方法，证明了 p-Laplacian 方程在某些函数空间中的弱解的存在性。此外，Boccardo 和 Orsina [4]研究了源项为拉东测度时的 p-Laplacian 方程，得到了存在性和正则性的一些重要结果。

然而，与大量关于解存在性的研究相比，关于解的不存在性的研究仍然较少，特别是当源项 μ 是集中于调和容量为零的集合上的拉东测度时，解是否存在仍然是一个重要的开放问题。事实上，在某些退化或奇异条件下，该类方程可能不存在解(参见[5])，Boccardo 对二阶退化椭圆方程的解的不存在性进行了讨论，并得到了在源项为集中于调和容量为零的集合上的非负拉东测度时，解不存在；本文的主要目标是将这一结果推广至 ***p-Laplacian*** 退化椭圆方程，即研究如下形式的退化椭圆方程的解的不存在性：

$$\begin{cases} -div\left(\frac{a(x,\nabla u)}{(1+u)^{\gamma(p-1)}}\right)+u=\mu & x\in\Omega, \\ u=0 & x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

现在我们陈述关于(1.1)中各项的假设：

(1) Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 的一个有界开子集，且 $N>2$；

(2) $a:\Omega\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$ 是一个 Carathéodory 函数(即对于几乎所有 $x\in\Omega$, $a(x,\cdot)$ 在 $\mathbb{R}^N$ 上连续，而对于每

个 $\xi\in\mathbb{R}^N$， $a(\cdot,\xi)$ 在 Ω 上是可测的)，对于几乎所有 $x\in\Omega$ 以及任意 $\xi,\eta\in\mathbb{R}^N$， $\xi\neq\eta$ ，并且满足

$$a(x,\xi)\cdot\xi\geq\alpha|\xi|^p, \tag{1.2}$$

$$|a(x,\xi)|\leq\beta|\xi|^{p-1}, \tag{1.3}$$

$$[a(x,\xi)-a(x,\eta)]\cdot(\xi-\eta)>0, \tag{1.4}$$

其中 α 和 β 是正常数。

(3) ρ 和 γ 是满足以下条件的实数

$$1<p<2, \tag{1.5}$$

$$\gamma>1; \tag{1.6}$$

(4) μ 是一个非负拉东测度，集中于调和容量为零的集合 E 上。

我们的主要结果如下：

定理 1 假设 $\gamma>1$，且 μ 是一个非负拉东测度，集中于调和容量为零的集合 E 上。那么，方程

$$\begin{cases}-div\left(\dfrac{a(x,\nabla u)}{(1+u)^{\gamma(p-1)}}\right)+u=\mu & x\in\Omega,\\ u=0 & x\in\partial\Omega.\end{cases}$$

没有解。

更确切地说，设 f_n 是一列非负的 $L^\infty(\Omega)$ 函数序列，在测度的紧收敛意义下收敛到 δ，设 u_n 是方程(1.2)的解序列，那么 u_n 在 Ω 上几乎处处收敛到零，并且有

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega u_n\varphi=\int_\Omega\varphi\mathrm{d}\mu\quad\forall\varphi\in W_0^{1,\infty}(\Omega).$$

本文的结构安排如下：第二部分给出证明的关键步骤，第三部分总结我们的研究结论，并探讨未来的研究方向。

2. 证明过程

在证明定理 1 之前，我们先考虑如下方程：

$$\begin{cases}-div\left(\dfrac{a(x,\nabla u)}{(1+u)^{\gamma(p-1)}}\right)+u=f & x\in\Omega,\\ u=0 & x\in\partial\Omega.\end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $f(x)\geq0$ 是某个 Lebesgue 空间 $L^m(\Omega)$ 中的函数， $m=\dfrac{\gamma(p-1)+2}{p}$ ，其余条件与(1.1)一致。(2.1)的近似方程如下：

$$\begin{cases}-div\left(\dfrac{a(x,\nabla u_n)}{(1+u_n)^{\gamma(p-1)}}\right)+u_n=f_n & x\in\Omega,\\ u_n=0 & x\in\partial\Omega.\end{cases} \tag{2.2}$$

由[2]和[5]，我们不难得到以下结论：

方程(2.2)存在唯一分布解 $u_n\in W_0^{1,1}(\Omega)\cap L^{\frac{\gamma(p-1)+2}{p}}(\Omega)$，使得对于任意 $\psi\in W_0^{1,\infty}(\Omega)$ 有

$$\int_\Omega \frac{a(x,\nabla u_n)\cdot\nabla u_n}{(1+u_n)^{\Upsilon(p-1)}}+\int_\Omega u_n\psi=\int_\Omega f_n\psi .$$

证明：设 μ 如该命题所述，则(参见[6])，对于每个 $\delta>0$，存在一个函数 ψ_δ 属于 $C_0^\infty(\Omega)$，使得

$$0\le\psi_\delta\le 1,\ \int_\Omega\left|\nabla\psi_\delta\right|^p\le\delta,\ \int_\Omega(1-\psi_\delta)\mathrm{d}\mu\le\delta.$$

注意，由于关于 ψ_δ 在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中的估计，以及 $0\le\psi_\delta\le 1$ 这一事实，当 δ 趋于零时，ψ_δ 在 $L^\infty(\Omega)$ 的弱*拓扑下趋于零。如果 f_n 是一列非负函数，并且在测度的紧收敛意义下收敛到 μ，即如果

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega f_n\varphi=\int_\Omega\varphi\mathrm{d}\mu\quad\forall\varphi\in C^0\left(\bar{\Omega}\right),$$

那么

$$0\le\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega f_n(1-\psi_\delta)=\int_\Omega(1-\psi_\delta)\mathrm{d}\mu\le\delta. \tag{2.3}$$

设 u_n 为逼近问题(2.2)的非负解。如果我们在(2.2)中选择 $1-(1+u_n)^{1-\gamma}$ 作为测试函数，那么由(1.2)，并去掉非负的低阶项，我们有

$$\alpha(\gamma-1)\int_\Omega\frac{\left|\nabla u_n\right|^p}{(1+u_n)^{\gamma p}}\le(\gamma-1)\int_\Omega\frac{a(x,\nabla u_n)\cdot\nabla u_n}{(1+u_n)^{\gamma p}}\le\int_\Omega f_n.$$

回顾(1.3)，因此有

$$\int_\Omega\left|\frac{a(x,\nabla u_n)}{(1+u_n)^{\gamma(p-1)}}\right|^{\frac{p}{p-1}}\le\beta^{\frac{p}{p-1}}\int_\Omega\left|\frac{\left|\nabla u_n\right|^{p-1}}{(1+u_n)^{\gamma(p-1)}}\right|^{\frac{p}{p-1}}\le C\int_\Omega f_n,$$

其中常数 C 依赖于 α,β 和 γ。因此，至多经过选取一个子序列，存在 σ 属于 $\left(L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)\right)^N$ 和 ρ 属于 $L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$，使得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a(x,\nabla u_n)}{(1+u_n)^{\gamma(p-1)}}=\sigma,\ \lim_{n\to+\infty}\frac{\left|\nabla u_n\right|^{p-1}}{(1+u_n)^{\gamma(p-1)}}=\rho, \tag{2.4}$$

分别在 $\left(L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)\right)^N$ 和 $L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ 中弱收敛。

在(2.2)中选择 $\left[1-(1+u_n)^{1-\gamma}\right](1-\psi_\delta)$ 作为测试函数得到

$$\begin{aligned}&(\gamma-1)\int_\Omega\frac{a(x,\nabla u_n)\cdot\nabla u_n}{(1+u_n)^{\gamma p}}(1-\psi_\delta)+\int_\Omega u_n\left[1-(1+u_n)^{1-\gamma}\right](1-\psi_\delta)\\&=\int_\Omega f_n\left[1-(1+u_n)^{1-\gamma}\right](1-\psi_\delta)+\int_\Omega\frac{a(x,\nabla u_n)\cdot\nabla\psi_\delta}{(1+u_n)^{\gamma(p-1)}}\left[1-(1+u_n)^{1-\gamma}\right]\\&\le\int_\Omega f_n(1-\psi_\delta)+\int_\Omega\frac{a(x,\nabla u_n)\cdot\nabla\psi_\delta}{(1+u_n)^{\gamma(p-1)}}\left[1-(1+u_n)^{1-\gamma}\right].\end{aligned} \tag{2.5}$$

我们研究右侧的项。对于第一项，由(2.3)可得

$$\lim_{\delta\to 0^+}\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega f_n\left(1-\psi_\delta\right)=0,$$

而对于第二项，利用(2.4)以及$\left[1-\left(1+u_n\right)^{1-\gamma}\right]$的有界性，我们有

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega \frac{a\left(x,\nabla u_n\right)\cdot\nabla\psi_\delta}{\left(1+u_n\right)^{\gamma(p-1)}}\left[1-\left(1+u_n\right)^{1-\gamma}\right]=\int_\Omega \sigma\cdot\nabla\psi_\delta\left[1-\left(1+u_n\right)^{1-\gamma}\right].$$

回忆到σ属于$\left(L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)\right)^N$，$\psi_\delta$在$W_0^{1,p}(\Omega)$中趋于零，并且利用$\left[1-\left(1+u_n\right)^{1-\gamma}\right]$的有界性，我们有

$$\lim_{\delta\to 0^+}\int_\Omega \sigma\cdot\nabla\psi_\delta\left[1-\left(1+u_n\right)^{1-\gamma}\right]=0.$$

因此，由于(2.5)左侧的两项都是非负的，我们得到

$$\lim_{\delta\to 0^+}\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega \frac{a\left(x,\nabla u_n\right)\cdot\nabla u_n}{\left(1+u_n\right)^{\gamma p}}\left(1-\psi_\delta\right)=0.$$

假设(1.2)随即给出

$$\lim_{\delta\to 0^+}\lim_{n\to+\infty}\alpha\int_\Omega \left|\frac{\left|\nabla u_n\right|^{p-1}}{\left(1+u_n\right)^{\gamma(p-1)}}\right|^{\frac{p}{p-1}}\left(1-\psi_\delta\right)\le\lim_{\delta\to 0^+}\lim_{n\to+\infty}\alpha\int_\Omega \frac{a\left(x,\nabla u_n\right)\cdot\nabla u_n}{\left(1+u_n\right)^{\gamma p}}\left(1-\psi_\delta\right)=0.$$

由于泛函

$$v\in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)\mapsto\int_\Omega |v|^{\frac{p}{p-1}}\left(1-\psi_\delta\right)$$

在$L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$上弱下半连续，所以

$$\int_\Omega |\rho|^{\frac{p}{p-1}}=\lim_{\delta\to 0^+}\int_\Omega |\rho|^{\frac{p}{p-1}}\left(1-\psi_\delta\right)\le\lim_{\delta\to 0^+}\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega \left|\frac{\left|\nabla u_n\right|^{p-1}}{\left(1+u_n\right)^{\gamma(p-1)}}\right|^{\frac{p}{p-1}}\left(1-\psi_\delta\right)=0\,.$$

这意味着$\rho=0$。因此，由于

$$\frac{\left|\nabla u_n\right|^{p-1}}{\left(1+u_n\right)^{\gamma(p-1)}}=\frac{1}{(\gamma-1)^{p-1}}\left|\nabla\left(1-\left(1+u_n\right)^{1-\gamma}\right)\right|^{p-1},$$

由(2.4)的第二个极限可知，序列$1-\left(1+u_n\right)^{1-\gamma}$在$W_0^{1,p}(\Omega)$中弱收敛到零，因此(至多经过选取一个子序列)它在$L^q(\Omega)$中强收敛到零，其中$q=\dfrac{Np}{N-p}$。因此，$u_n$(至多经过选取一个子序列)在$\Omega$中几乎处处趋于零。由于极限不依赖于子序列，整个序列u_n在Ω中几乎处处趋于零。现在，对于$\Phi\in\left(L^p(\Omega)\right)^N$，并结合(1.3)，我们有

$$\left|\int_\Omega \frac{a\left(x,\nabla u_n\right)}{\left(1+u_n\right)^{\gamma(p-1)}}\cdot\Phi\right|\le\int_\Omega \left|\frac{a\left(x,\nabla u_n\right)}{\left(1+u_n\right)^{\gamma(p-1)}}\right||\Phi|\le\beta\int_\Omega \frac{\left|\nabla u_n\right|^{p-1}}{\left(1+u_n\right)^{\gamma(p-1)}}\cdot|\Phi|.$$

因此，由(2.4)，

$$\left|\int_\Omega \sigma\cdot\Phi\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\int_\Omega \frac{a\left(x,\nabla u_n\right)}{\left(1+u_n\right)^{\gamma(p-1)}}\cdot\Phi\right|\le\beta\int_\Omega \rho|\Phi|=0,$$

这意味着 $\sigma = 0$。因此，在(2.2)中取极限，即在

$$\int_\Omega \frac{a(x,\nabla u_n)\cdot\nabla\varphi}{(1+u_n)^{\gamma(p-1)}} + \int_\Omega u_n\varphi = \int_\Omega f_n\varphi, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega),$$

我们得到，由于第一项趋于零，对于每个 $\varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$，

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega u_n\varphi = \int_\Omega \varphi \mathrm{d}\mu,$$

证毕。

3. 结论

在本文中，我们研究了在某种极端情况下，即右端源项是一个非负拉东测度，集中于调和容量为零的集合 E 上方程(2.4)的解的不存在性，推广了 Boccardo 在[5]中的结果。我们的分析表明，对于 $1 < p < 2$，关于二阶退化椭圆方程的解的不存在性理论结果可以推广到 p-Laplacian 退化椭圆方程，从而进一步完善该领域的研究框架。

参考文献

[1] Serrin, J. (1964) Local Behavior of Solutions of Quasi-Linear Equations. *Acta Mathematica*, **111**, 247-302. https://doi.org/10.1007/bf02391014

[2] Lions, J.L. (1969) Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Dunod.

[3] DiBenedetto, E. (1993) Degenerate Parabolic Equations. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0895-2

[4] Boccardo, L. and Orsina, L. (2007) Existence and Regularity Results for Some Elliptic Equations with Singularities and Applications to Schrödinger Equations. *Manuscripta Mathematica*, **122**, 157-172.

[5] Boccardo, L., Croce, G. and Orsina, L. (2011) Nonlinear Degenerate Elliptic Problems with $W_0^{1,1}(\Omega)$ Solutions. Manuscripta Mathematica, 137, 419-439. https://doi.org/10.1007/s00229-011-0473-6

[6] Dal Maso, G., Murat, F., Orsina, L. and Prignet, A. (1999) Renormalized Solutions of Elliptic Equations with General Measure Data. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze*, **28**, 741-808.