Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(4), 272-280
Published Online April 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.154130

双调和方程基态解的存在性

董 蕊

云南师范大学数学学院，云南 昆明

收稿日期：2025年3月14日；录用日期：2025年4月10日；发布日期：2025年4月22日

摘 要

文章主要研究了如下双调和方程 $\Delta^2 u-\alpha\Delta u+u=Q(x)|u|^{p-2}u,\ \ x\in\mathbb{R}^N$，其中 $N\geq 5, 2<2^{**}=\dfrac{2N}{N-4}, \alpha\in(-2,+\infty)$ 是一个常数，位势函数 $Q(x):\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ 是一个正连续函数。在位势函数 Q 满足合适的假设下，通过应用集中紧性引理和比较讨论的方法得到上述方程基态解的存在性。

关键词

基态解，双调和算子，变分方法

Existence of Ground-Sate Solutions for Biharmonic Equations

Rui Dong

School of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming Yunnan

Received: Mar. 14th, 2025; accepted: Apr. 10th, 2025; published: Apr. 22nd, 2025

Abstract

In this paper, consider the following biharmonic equations $\Delta^2 u-\alpha\Delta u+u=Q(x)|u|^{p-2}u,\ \ x\in\mathbb{R}^N$, where $N\geq 5, 2<2^{**}=\dfrac{2N}{N-4}, \alpha\in(-2,+\infty)$ is a constant and the potential function $Q(x):\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ is a positive continuous function. Under the appropriate assumption of the potential function Q, by applying the concentration compactness lemma and comparative discussion methods to obtain the existence of the ground-state solutions for the above equation.

文章引用: 董蕊. 双调和方程基态解的存在性[J]. 理论数学, 2025, 15(4): 272-280.
DOI: 10.12677/pm.2025.154130

Keywords

Ground-State Solution, Biharmonic Operator, Variational Method

1. 引言

文章研究了形式为

$$\Delta^2 u-\alpha\Delta u+u=Q(x)|u|^{p-2}u,\quad x\in\mathbb{R}^N \tag{1.1}$$

的双调和方程基态解的存在性，其中 $N\geq 5,\ 2<p<2^{**}=\dfrac{2N}{N-4}$，$\alpha\in(-2,+\infty)$ 是一个常数，Q 是满足某些条件的正连续函数。本文研究的双调和方程又称为四阶椭圆型偏微分方程，其是椭圆型偏微分方程中的一个典型例子。该类方程被广泛应用于生物物理学中 Hilfrich 问题、稳态的曲面扩散流模型、微分几何中的 Willmore 曲面、材料加工过程中的 Cahn-Hilliard 扩散问题、量子力学中求解粒子运动的薛定谔方程以及 Paneitz-Branaon 方程中各种丰富现象的描述[1]，它们还出现在连续介质力学的各个领域，包括弹性力学和粘性流体的缓慢流动[2]，多用于对外力弹性反应的薄结构的建模[3] [4]。

众所周知，变分方法是研究椭圆型偏微分方程的强有力的工具，这是一门 17 世纪末发展起来的数学分支，它可应用于证明方程解的存在性、多重性或求方程的近似解等问题。变分法将自然界中的大量问题归结为求某个泛函在一定条件下的极值问题或临界点问题，其主要思想是将欧拉－拉格朗日方程解的问题转化为对应泛函的极值问题或临界点问题，通过找到泛函的极值或临界点来找到原方程的解。

1973 年，著名数学家 Rabinowitz 和 Ambrosetti [5]合作证明了著名的山路定理，它是极大极小方法的典范。形象地说，一只蚂蚁从盆地中爬出来，在最佳道路上至少有一点，它是该道路上的最高点，又是周围山峰的最低点。对于本文研究的高阶椭圆型偏微分方程，所对应的 Euler 泛函在工作空间既无上界又无下界，用经典极大极小方法求解比较困难。为此应用 Nehari 流形方法，其本质思想是在全空间上无下界的 Euler 泛函可能在某个子空间有下界，且 Euler 泛函在空间上的极小值点就是所求方程的解。这个特性使得 Nehari 流形方法成为研究高阶椭圆型偏微分方程解的存在性的有力工具，这也使研究方程的基态解受到了国内外学者的广泛关注。

关于双调和方程数学方面的研究，许多学者考虑如下方程

$$\begin{cases}\Delta^2 u+c\Delta u=f(x,u), & \text{在 } \Omega \text{ 中},\\ u=\Delta u=0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}\end{cases} \tag{1.2}$$

解的存在性，其中 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的有界光滑区域。最初 Lazer 对悬索桥的非线性振动问题进行了研究[6]，自此关于双调和方程非平凡解的存在性问题逐渐引起了人们的关注。例如，Micheletti [7]应用变分方法研究了方程(1.2)非平凡解的存在性。Zhang [8]根据 Morse 理论及局部环绕定理，得到了方程(1.2)多解的存在性。Zhou 和 Wu [9]应用变号临界定理求解方程(1.2)的弱解。

除此之外，由变分法研究全空间 $\mathbb{R}^N$ 上双调和方程解的存在性问题也引起了数学工作者的广泛关注，在全空间 $\mathbb{R}^N$ 上求弱解主要的困难之一是缺乏 Sobolev 嵌入的紧性。作者[10]选择了具有紧嵌入性质的径向和非径向对称的函数空间，证明了方程

$$\Delta^2 u-\beta\Delta u=g(u),\quad x\in\mathbb{R}^N$$

无穷多径向和非径向解的存在性。此外，还可以通过集中紧性原理以及位势函数的相关性质来恢复紧性。作者[11]研究了以下非线性双调和方程

$$\Delta^2 u-\Delta u+V(x)u=|u|^{p-1}u,\quad x\in\mathbb{R}^N, \tag{1.3}$$

其中 $2<p<2^{**}=\dfrac{2N}{N-4}$。当位势函数 V 满足强制条件时，作者通过结合 Pohožaev 型恒等式和 Nehari 流形得到了限制在流形上的极小化子，再由集中紧性原理证明了 (PS) 序列的紧性，最后利用变分方法证明了方程(1.3)基态解的存在性。

为了得到我们的结果，我们对位势函数 $Q(x)$ 做出以下假设：

$$(Q)\ Q\in C\left(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}\right) \text{满足 } 0<Q_0=\lim_{|x|\to\infty}Q(x)=\inf_{x\in\mathbb{R}^N}Q(x)\text{。}$$

解 u 称方程(1.1)的一个基态解指的是，$u\neq 0$ 且其在所有非平凡解中具有最小临界值。

我们的主要结果如下：

定理 1.1 如果条件 (Q) 成立，那么方程(1.1)存在一个基态解。

2. 主要结果的证明

令

$$H^2\left(\mathbb{R}^N\right):=\left\{u\in L^2\left(\mathbb{R}^N\right): D^\beta u\in L^2\left(\mathbb{R}^N\right),\ \forall\beta\in\mathbb{Z}_+^N,\ |\beta|\le 2\right\}$$

由于 $\alpha\in(-2,+\infty)$，

$$\|u\|=\left(\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\Delta u|^2+\alpha|\nabla u|^2+u^2\right)dx\right)^{\frac{1}{2}},\quad \forall u\in H^2\left(\mathbb{R}^N\right),$$

是 $H^2\left(\mathbb{R}^N\right)$ 上的一个范数[12]，并且该范数与通常的范数

$$\|u\|_{H^2\left(\mathbb{R}^N\right)}=\langle u,\ u\rangle_{H^2}^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{|\beta|\le 2}\left\|D^\beta u\right\|^2_{L^2\left(\mathbb{R}^N\right)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

等价，其中 $\langle u,\ u\rangle_{H^2}$ 为 *Hilbert* 空间 $H^2\left(\mathbb{R}^N\right)$ 上的内积。

在 $H^2\left(\mathbb{R}^N\right)$ 上定义方程(1.1)对应的能量泛函为

$$\varphi(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\Delta u|^2+\alpha|\nabla u|^2+u^2\right)dx-\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}Q(x)|u|^p\,dx\text{。}$$

很容易验证 $\varphi(u)\in C^1\left(H^2\left(\mathbb{R}^N\right),\mathbb{R}\right)$。此外对任意的 $u,\vartheta\in H^2\left(\mathbb{R}^N\right)$，我们有

$$\langle\varphi'(u),\vartheta\rangle=\int_{\mathbb{R}^N}\left(\Delta u\Delta\vartheta+\alpha\nabla u\nabla\vartheta+u\vartheta\right)dx-\int_{\mathbb{R}^N}Q(x)|u|^{p-2}u\vartheta dx\text{。}$$

于是，泛函 φ 的临界点对应方程(1.1)的弱解。

接下来我们将证明泛函 φ 具有山路几何结构。设

$$B(\rho)=\left\{u\in H^2\left(\mathbb{R}^N\right):\ \|u\|\le\rho\right\} \text{和 } S(\rho)=\partial B(\rho)=\left\{u\in H^2\left(\mathbb{R}^N\right):\ \|u\|=\rho\right\}\text{。}$$

引理 2.1 假设 (Q) 成立，则

(1) 存在常数 $\rho,\ \beta>0$，使得对任意的 $u\in S(\rho)$，有 $\varphi(u)\ge\beta$；

(2) 存在 $e\in H^2\left(\mathbb{R}^N\right)$，使得当 $\|e\|>\rho$ 时，有 $\varphi(e)<0$。

证 (1) 对任意的$u\in S(\rho)$，由 Sobolev 不等式，我们有

$$\varphi(u)=\frac{1}{2}\|u\|^2-\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}Q(x)|u|^p\,dx\geq\frac{1}{2}\|u\|^2-\frac{C}{p}\|u\|^p=\frac{1}{2}\rho^2-\frac{C}{p}\rho^p.$$

选择$\rho>0$，使得$\frac{1}{2}\rho^2-\frac{C}{p}\rho^p=\frac{1}{4}\rho^2:=\beta>0$。则对任意的$u\in S(\rho)$，有$\varphi(u)\geq\beta$。

(2) 设$u\in H^2(\mathbb{R}^N)$且$u>0$，对任意的$t\geq0$，当$t\to+\infty$时，有

$$\varphi(tu)=\frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\Delta u|^2+\alpha|\nabla u|^2+u^2\right)dx-\frac{t^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N}Q(x)|u|^p\,dx\to-\infty。$$

因此存在一个足够大的$t_0>0$，令$e=t_0u$，使得当$\|e\|>\rho$时，有$\varphi(e)<0$。■

为了证明方程基态解的存在性，我们定义泛函$\varphi(u)$对应的 Nehari 流形

$$\mathcal{N}:=\left\{u\in H^2(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}:\langle\varphi'(u),u\rangle=0\right\}。$$

引理 2.2 对任意的$u\in H^2(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}$，存在唯一的$t(u)>0$，使得$t(u)u\in\mathcal{N}$。

证 设$u\in H^2(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}$，定义函数$g(t)=\varphi(tu)$，其中$t\in[0,\infty)$，有

$$g(t)=\varphi(tu)=\frac{t^2}{2}\|u\|^2-\frac{t^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N}Q(x)|u|^p\,dx。$$

显然，我们有$g'(t)=0\Leftrightarrow tu\in\mathcal{N}\Leftrightarrow\|u\|^2=t^{p-2}\int_{\mathbb{R}^N}Q(x)|u|^p\,dx$。易证$g(0)=0$且当$t>0$充分大时，$g(t)<0$；当$t>0$充分小时，$g(t)>0$。因此，存在唯一的$t_0=t(u)>0$，使得$\max\limits_{t\in[0,\infty)}g(t)=g(t_0)$。故$g'(t_0)=0$且$t_0u=t(u)u\in\mathcal{N}$。■

为了得到我们的结果，定义极大极小值

$$c:=\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]}\varphi(\gamma(t)),\ c_1:=\inf_{u\in H^2(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}}\max_{t\geq0}\varphi(tu)\ \text{和}\ c_2:=\inf_{u\in\mathcal{N}}\varphi(u),\tag{2.1}$$

其中$\Gamma:=\left\{\gamma\in C\left([0,1],H^2(\mathbb{R}^N)\right):\gamma(0)=0,\ \varphi(\gamma(1))<0\right\}$。

接下来，我们给出极大极小值的一些性质。

引理 2.3 $c=c_1=c_2>0$。

证 对任意的$u\in H^2(\mathbb{R}^N)$，我们有

$$\varphi(u)-\frac{1}{2}\langle\varphi'(u),u\rangle=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^N}Q(x)|u|^p\,dx\geq0。$$

对任意的$\gamma\in\Gamma$，我们定义$h(t):=\langle\varphi'(\gamma(t)),\gamma(t)\rangle$。应用 Sobolev 不等式，容易验证存在一个常数$\rho>0$，使得$\inf\limits_{\|u\|=\rho}\langle\varphi'(u),u\rangle>0$及$\|\gamma(1)\|>\rho$。这表明存在$t_1\in(0,1)$，使得$h(t_1)>0$。此外，根据$\Gamma$的定义，对任意的$\gamma\in\Gamma$，有$h(1)\leq2\varphi(\gamma(1))<0$。故存在$t_0^\gamma\in(t_1,1)$，使得$h(t_0^\gamma)=0$，即$\gamma(t_0^\gamma)\in\mathcal{N}$。因此

$$\max_{t\in[0,1]}\varphi(\gamma(t))\geq\varphi\left(\gamma(t_0^\gamma)\right)\geq\inf_{u\in\mathcal{N}}\varphi(u)=c_2,$$

因此，$c\geq c_2$。

另一方面，对任意的$\{u\}\subset H^2(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}$，我们有$\varphi(0)=0$且当$t$充分小时，$\varphi(tu)>0$；当$t$充分大时，$\varphi(tu)<0$。因此，存在$t^*>0$，使得对任意的$t\geq t^*$，有$\varphi(t^*u)<0$。令$\gamma_u(t)=tt^*u$，其中$t\in[0,1]$，则$\gamma_u\in\Gamma$，所以

$$c=\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]}\varphi(\gamma(t))\leq\max_{t\in[0,1]}\varphi(\gamma_u(t))=\max_{t\in[0,1]}\varphi(tt^*u)\leq\max_{t\geq0}\varphi(tu),$$

因此，$c \le c_1$。

最后，由引理 2.2 知，对任意的 $u \in H^2(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}$，存在唯一的 $t(u)>0$，使得 $t(u)u \in \mathcal{N}$，有

$$\max_{t\ge 0}\varphi(tu) \ge \varphi(t(u)u) \ge \inf_{v\in\mathcal{N}}\varphi(v) = c_2$$

因此，$c_1 \ge c_2$。

另一方面，

$$c_1 := \inf_{u\in H^2(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}}\max_{t\ge 0}\varphi(tu) \le \inf_{u\in\mathcal{N}}\max_{t\ge 0}\varphi(tu) = \inf_{u\in\mathcal{N}}\varphi(u) = c_2\text{。}$$

因此，$c_1 \le c_2$。

综上所述，$c = c_1 = c_2$。■

当位势函数 $Q(x)$ 满足条件 (Q) 时，我们考虑方程(1.1)的极限问题

$$\Delta^2 u - \alpha\Delta u + u = Q_0|u|^{p-2}u,\quad x\in\mathbb{R}^N,$$

其中 $\alpha\in(-2,\ +\infty),\ N\ge 5,\ 2<p<2^{**}=\dfrac{2N}{N-4},\ Q_0>0$ 为条件 (Q) 中定义的常数。

定义泛函 φ 的极限泛函 $\varphi_\infty : H^2(\mathbb{R}^N)\to\mathbb{R}$ 为

$$\varphi_\infty(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\Delta u|^2 + \alpha|\nabla u|^2 + u^2\right)dx - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}Q_0|u|^p\,dx,$$

易证 $\varphi_\infty \in C^1\left(H^2(\mathbb{R}^N),\mathbb{R}\right)$。类似地，我们定义极限泛函 φ_∞ 的 Nehari 流形和极大极小值为

$$\mathcal{N}_\infty := \left\{u\in H^2(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}:\ \left\langle \varphi_\infty'(u),\ u\right\rangle = 0\right\}$$

和

$$c_\infty := \inf_{\gamma\in\Gamma_\infty}\max_{t\in[0,1]}\varphi_\infty(\gamma(t)),\ c_3 := \inf_{u\in H^2(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}}\max_{t\ge 0}\varphi_\infty(tu)\ \text{ 和 }\ m := \inf_{u\in\mathcal{N}_\infty}\varphi_\infty(u), \tag{2.2}$$

其中 $\Gamma_\infty := \left\{\gamma\in C\left([0,1],H^2(\mathbb{R}^N)\right):\gamma(0)=0,\ \varphi_\infty(\gamma(1))<0\right\}$。

引理 2.4 $c_\infty = c_3 = m > 0$。

证 与引理 2.3 的证明完全一样。■

引理 2.5 $c\le c_\infty$，其中 $c,\ c_\infty$ 分别由(2.1)，(2.2)定义。

证 由条件 (Q) 知，对任意的 $x\in\mathbb{R}^N$，有 $Q(x)\ge Q_0$。则对任意的 $u\in H^2(\mathbb{R}^N)$，有

$$\int_{\mathbb{R}^N}Q(x) \ge \int_{\mathbb{R}^N}Q_0|u|^p\,dx.$$

由此可得 $\varphi(u)\le\varphi_\infty(u)$。根据 Γ 和 Γ_∞ 的定义，我们得到 $\Gamma_\infty\subset\Gamma$。因此

$$\inf_{\gamma\in\Gamma_\infty}\max_{t\in[0,1]}\varphi_\infty(\gamma(t)) \ge \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]}\varphi_\infty(\gamma(t)) \ge \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]}\varphi(\gamma(t)),$$

即 $c\le c_\infty$。■

[定理 1.1 的证明]由引理 2.1，泛函 φ 具有山路几何结构。设 c 为(2.1)中定义的山路水平值。由山路定理，泛函 φ 有 $(PS)_c$ 序列，即存在序列 $\{u_n\}\subset H^2(\mathbb{R}^N)$，使得当 $n\to\infty$ 时，有

$$\varphi(u_n)\to c,\ \varphi'(u_n)\to 0\text{。}$$

因此，对充分大的 n，我们有

$$c+1+\|u_n\| \ge \varphi(u_n) - \frac{1}{p}\left\langle\varphi'(u_n),u_n\right\rangle = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\|u_n\|^2\text{。}$$

由于 $p>2$，上式表明 $\{u_n\}$ 在 $H^2\left(\mathbb{R}^N\right)$ 中是有界的。

我们不妨在子列的意义下假设

$$u_n \rightharpoonup u,\ \text{在 } H^2(\mathbb{R}^N)\ \text{中},$$

$$u_n \to u,\ \text{在 } L^s_{loc}(\mathbb{R}^N)\ \text{中},\ 2\le s<2^{**}.$$

因此，对任意的 $\omega\in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ 有 $\langle\varphi'(u_n),\omega\rangle\to\langle\varphi'(u),\omega\rangle=0$。即 u 是方程(1.1)的弱解。接下来我们证明 $u\neq 0$。我们不妨假设 $u=0$，下面分两种情况考虑。

情况一：$Q(x)\not\equiv Q_0$

我们断言，在这种情况下有 $u\neq 0$。若不然，假设 $u=0$。下证当 $u=0$ 时，序列 $\{u_n\}$ 也是泛函 φ_∞ 的 $(PS)_c$ 序列。

因为 $\lim\limits_{|x|\to\infty}Q(x)=Q_0$，所以对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\rho>0$，使得当 $|x|>\rho$ 时，有

$$|Q(x)-Q_0|<\varepsilon。$$

于是，当 $n\to\infty$ 时，我们有

$$|\varphi(u_n)-\varphi_\infty(u_n)|\le\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|Q(x)-Q_0||u_n|^p\,dx=\frac{1}{p}\int_{B_\rho(0)}|Q(x)-Q_0||u_n|^p\,dx+\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\rho(0)}|Q(x)-Q_0||u_n|^p\,dx\le C\varepsilon+o_n(1).$$

由于 $\varphi(u_n)\to c$，故有 $\varphi_\infty(u_n)\to c$。另一方面，对任意的 $v\in H^2\left(\mathbb{R}^N\right)$, $\|v\|\le 1$，由 *Hölder* 不等式，我们有

$$\begin{aligned}\left|\left\langle\varphi'(u_n)-\varphi_\infty{}'(u_n),v\right\rangle\right|&\le\int_{\mathbb{R}^N}|Q(x)-Q_0||u_n|^{p-1}|v|\,dx\\&=\int_{B_\rho(0)}|Q(x)-Q_0||u_n|^{p-1}|v|\,dx+\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\rho(0)}|Q(x)-Q_0||u_n|^{p-1}|v|\,dx\\&\le C\varepsilon+o_n(1).\end{aligned}$$

注意到 $\{u_n\}$ 在 $L^p_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)$ 中收敛到 0。由 $\{u_n\}$ 的有界性和 *Sobolev* 不等式，

$$\varphi'(u_n)-\varphi_\infty{}'(u_n)\to 0。$$

由于 $\varphi'(u_n)\to 0$，故有 $\varphi'_\infty(u_n)\to 0$。所以 $\{u_n\}$ 也是泛函 φ_∞ 的一个 $(PS)_c$ 序列。

由 $Q(x)\not\equiv Q_0$ 以及条件 (Q)，可知存在常数 $\tilde{R}>0,\ x_0\in\mathbb{R}^N$ 以及 x_0 的一个邻域 $B_{\tilde{R}}(x_0)$，使得对任意的 $x\in B_{\tilde{R}}(x_0)$，有 $\sigma:=Q(x_0)-Q_0>0$ 及 $Q(x)-Q_0>\frac{1}{2}\sigma$。

根据 *Lions* 的紧性引理[13]，我们知道序列 $\{u_n\}$ 可能存在以下两种情形：

(1) 消失：当 $n\to\infty$ 时，有

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^N}\int_{B_R(y_n)}|u_n|^p\,dx\to 0。$$

(2) 非消失: 存在 $\{y_n\}\subset\mathbb{R}^N$ 和常数 $\beta>0$，使得

$$\limsup_{n\to\infty}\int_{B_R(y_n)}|u_n|^p\,dx\ge\beta。$$

若假设(1)发生，$\{u_n\}$ 在 $H^2\left(\mathbb{R}^N\right)$ 中有界。 当 $n\to\infty$ 时，有

$$u_n\to 0,\ \text{在 } L^p\left(\mathbb{R}^N\right)\ \text{中}。$$

于是，我们得到

$$0<2c+o_n(1)=2\ \varphi(u_n)\text{-}\langle\varphi'(u_n),u_n\rangle=\left(1-\frac{2}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^N}Q(x)|u_n|^p\,dx\le C\|u_n\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}\to 0,$$

这是矛盾的，所以消失不可能发生。

从而，(2)成立。不失一般性，假设

$$\int_{B_R(y_n)}|u_n|^p\,dx\ge\beta>0\text{。}\tag{2.3}$$

我们断言 $\{y_n\}$ 在 $\mathbb{R}^N$ 中无界的。事实上，若不然，不妨假设 $\{y_n\}$ 是有界的，则存在 $\rho>0$，使得 $B_R(y_n)\subset B_\rho(0)$。由(2.3)可得

$$\beta\le\int_{B_R(y_n)}|u_n|^p\,dx\le\int_{B_\rho(0)}|u_n|^p\,dx\text{。}$$

由于在 $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ 中有 $u_n\to0$，取极限有

$$\beta\le\lim_{n\to\infty}\int_{B_\rho(0)}|u_n|^p\,dx=0\text{，}$$

这与 $\beta>0$ 矛盾。因此 $\{y_n\}$ 是无界的。在子列的意义下，当 $n\to\infty$ 时，$|y_n|\to\infty$。

我们定义 $v_n(x)=u_n(x+y_n-x_0)$，则 $\{v_n\}$ 在 $H^2(\mathbb{R}^N)$ 中有界。我们不妨在子列的意义下假设

$$v_n\rightharpoonup v,\ \text{在 } H^2(\mathbb{R}^N)\ \text{中},$$

$$v_n\to v,\ \text{在 } L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)\text{中},\ 2\le p<2^{**}.$$

由(2.3)，我们有

$$\int_{B_R(x_0)}|v(x)|^p\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_{B_R(y_n)}|u_n(x)|^p\,dx\ge\beta>0.$$

因此 $v\ne0$ 且

$$\int_{\mathbb{R}^N}(Q(x)-Q_0)|v|^p\,dx\ge\int_{B_R(x_0)}(Q(x)-Q_0)|v|^p\,dx\ge\frac{1}{2}\sigma\beta>0\text{。}$$

此外，由于 $\{u_n\}$ 是 φ_∞ 的 $(PS)_c$ 序列，故 $\{v_n\}$ 也是 φ_∞ 的 $(PS)_c$ 序列。由引理 2.4 和法图引理，我们得到

$$\begin{aligned}
c_\infty=m=\inf_{v\in\mathcal{N}_\infty}\varphi_\infty(v)&\le\varphi_\infty(v)\\
&=\varphi_\infty(v)-\frac{1}{2}\langle\varphi_\infty'(v),v\rangle\\
&\le\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}Q(x+y_n-x_0)|v_n|^p\,dx\\
&=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}Q(x+y_n-x_0)|u_n(x+y_n-x_0)|^p\,dx\\
&=\liminf_{n\to\infty}\left\{\varphi_\infty(u_n)-\frac{1}{2}\langle\varphi_\infty'(u_n),u_n\rangle\right\}\\
&=c,
\end{aligned}$$

于是由引理 2.5，我们有

$$c=\varphi_\infty(v)\text{。}$$

由于 v 是 φ_∞ 的一个临界点，与引理 2.2 类似的证明方法，我们可以证明 $\max_{t\ge0}\varphi_\infty(tv)$ 是由唯一的 $t=t(v)$ 取到的。因此

$$c=\varphi_\infty(v)=\max_{t\ge0}\varphi_\infty(tv)\text{。}$$

此外，对任意的 $v\in H^2(\mathbb{R}^N)$，我们有

$$\varphi_\infty(v)=\varphi(v)+\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}(Q(x)-Q_0)|v|^p\,dx\text{。}$$

注意到 $v\neq 0$，所以由引理 2.2 知，存在 $t_0(v)>0$，使得 $t_0(v)v\in\mathcal{N}$，由引理 2.3，我们有

$$\varphi_\infty(v)\geq\varphi_\infty(t_0(v)v)\geq\inf_{u\in\mathcal{N}}\varphi(u)+\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}(Q(x)-Q_0)|t_0(v)v|^p\,dx=c+\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}(Q(x)-Q_0)|t_0(v)v|^p\,dx>c,$$

这与 $c=\varphi_\infty(v)$ 矛盾。所以 $u\neq 0$，即 u 是方程的非平凡解。

情况二：$Q(x)\equiv Q_0$

对于该情形，显然有 $\varphi=\varphi_\infty$。若 $u\neq 0$，则 u 是方程(1.1)的非平凡解。若 $u=0$，与情况一类似的证明方法，我们可以找到一个序列 $\{y_n\}\subset\mathbb{R}^N$ 使得 $|y_n|\to\infty$ 且

$$\limsup_{n\to\infty}\int_{B_R(y_n)}|u_n|^q\,dx\geq\beta\text{。}$$

设 $v_n(x)=u_n(x+y_n)$，则 $\{v_n\}$ 是 φ 的一个有界的 $(PS)_c$ 序列。假设当 $n\to\infty$ 时，在 $H^2(\mathbb{R}^N)$ 中有 $v_n\rightharpoonup v$。则 $v\neq 0$ 是 φ 的一个临界点。从而 u 是方程的一个非平凡解。

最后，令

$$d=\inf\left\{\varphi(v):v\in H^2(\mathbb{R}^N),\ v\neq 0,\ \varphi'(v)=0\right\}\text{。}$$

根据下确界的定义，存在序列 $\{v_n\}\subset\left\{v\in H^2(\mathbb{R}^N):\varphi'(v)=0,\ v\neq 0\right\}$，使得

$$\varphi(v_n)\to d,\quad \varphi'(v_n)\to 0\text{。}$$

因此 $\{v_n\}$ 是有界的 $(PS)_d$ 序列。在子列的意义下，不妨假设

$$v_n\rightharpoonup v,\ \text{在}H^2(\mathbb{R}^N)\text{中。}$$

当 $Q(x)\not\equiv Q_0$ 时，由上面的证明可知 $v\neq 0$, $\varphi(v)=d$ 且 $\varphi'(v)=0$，即 v 是方程(1.1)的基态解。

当 $Q(x)\equiv Q_0$ 时，上述讨论可知，存在 φ 的另一 $(PS)_d$ 序列 $\{w_n\}$ 使得 $w_n\rightharpoonup w\neq 0$。此外，还有 $\varphi(w)=d$ 且 $\varphi'(w)=0$，即 w 是方程(1.1)的基态解。

参考文献

[1] 翟术英. 高精度紧致差分方法的研究与应用[D]: [博士学位论文]. 乌鲁木齐: 新疆大学, 2014.

[2] Feng, Z. and Su, Y. (2021) Ground State Solution to the Biharmonic Equation. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, **73**, 1-24. https://doi.org/10.1007/s00033-021-01643-2

[3] Kefi, K. and Rădulescu, V.D. (2017) On a p(x)-Biharmonic Problem with Singular Weights. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, **68**, 1-13. https://doi.org/10.1007/s00033-017-0827-3

[4] Guo, Z. and Wei, L. (2018) Radial Symmetry of Entire Solutions of a Biharmonic Equation with Supercritical Exponent. *Advanced Nonlinear Studies*, **19**, 291-316. https://doi.org/10.1515/ans-2018-0010

[5] Ambrosetti, A. and Rabinowitz, P.H. (1973) Dual Variational Methods in Critical Point Theory and Applications. *Journal of Functional Analysis*, **14**, 349-381. https://doi.org/10.1016/0022-1236(73)90051-7

[6] Lazer, A.C. and McKenna, P.J. (1990) Large-Amplitude Periodic Oscillations in Suspension Bridges: Some New Connections with Nonlinear Analysis. *SIAM Review*, **32**, 537-578. https://doi.org/10.1137/1032120

[7] Micheletti, A.M. and Pistoia, A. (1998) Nontrivial Solutions for Some Fourth Order Semilinear Elliptic Problems. *Nonlinear Analysis*, **34**, 509-523. https://doi.org/10.1016/s0362-546x(97)00596-8

[8] Zhang, J. and Li, S. (2005) Multiple Nontrivial Solutions for Some Fourth-Order Semilinear Elliptic Problems. *Nonlinear Analysis*, **60**, 221-230. https://doi.org/10.1016/s0362-546x(04)00313-x

[9] Zhou, J. and Wu, X. (2008) Sign-Changing Solutions for Some Fourth-Order Nonlinear Elliptic Problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **342**, 542-558. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.12.020

[10] d'Avenia, P., Pomponio, A. and Schino, J. (2023) Radial and Non-Radial Multiple Solutions to a General Mixed

Dispersion NLS Equation. *Nonlinearity*, **36**, 1743-1775. https://doi.org/10.1088/1361-6544/acb62d

[11] Xu, L.P. and Chen, H.B. (2018) Existence of Positive Ground Solutions for Biharmonic Equations via Pohožaev-Nehari Manifold. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, **52**, 541-560.

[12] Zhang, J. and Wei, Z. (2011) Infinitely Many Nontrivial Solutions for a Class of Biharmonic Equations via Variant Fountain Theorems. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **74**, 7474-7485. https://doi.org/10.1016/j.na.2011.07.067

[13] Chabrowski, J. and Marcos do Ó, J. (2002) On Some Fourth-Order Semilinear Elliptic Problems in R^N. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **49**, 861-884. https://doi.org/10.1016/s0362-546x(01)00144-4