Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(4), 281-285
Published Online April 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.154131

一种基于刘维尔公式的二阶非齐次线性微分方程的解法

朱永婷，张光威*

国防科技大学外国语学院，江苏 南京

收稿日期：2025年3月12日；录用日期：2025年4月10日；发布日期：2025年4月23日

摘 要

已知二阶齐次线性微分方程一个非零特解的情况下，利用常数变易法，在刘维尔公式的基础上，给出求解二阶非齐次线性微分方程通解的方法和一般公式，并附以两个例题验证该方法在求解此类微分方程的有效性，这对学习和研究高阶线性微分方程具有借鉴和启迪意义。

关键词

刘维尔公式，二阶线性微分方程，常数变易法

A Solution Method for Second-Order Non-Homogeneous Linear Differential Equations Based on Liouville's Formula

Yongting Zhu, Guangwei Zhang*

College of International Studies, National University of Defense Technology, Nanjing Jiangsu

Received: Mar. 12th, 2025; accepted: Apr. 10th, 2025; published: Apr. 23rd, 2025

Abstract

Given a non-zero particular solution of a second-order homogeneous linear differential equation, by using the method of variation of constants and based on Liouville's formula, this paper presents the method and general formula for finding the general solution of second-order non-homogeneous linear differential equations. Two examples are attached to verify the effectiveness of this method in solving such differential equations, which has reference and enlightenment significance for the

*通讯作者。

文章引用: 朱永婷, 张光威. 一种基于刘维尔公式的二阶非齐次线性微分方程的解法[J]. 理论数学, 2025, 15(4): 281-285. DOI: 10.12677/pm.2025.154131

study and research of higher-order linear differential equations.

Keywords

Liouville's Formula, Second-Order Linear Differential Equation, Variation of Constants Method

1. 引言及刘维尔公式

一般情况下，二阶变系数非齐次线性微分方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x) \tag{1}$$

的解不容易求得，但是如果利用某些方法，比如观察法求得方程(1)所对应齐次方程(2)

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \tag{2}$$

的一个非零特解，就可以利用刘维尔公式求出齐次方程的通解，下面给出刘维尔公式的具体形式。

刘维尔公式[1]：若 y_1 是二阶齐次微分方程(2)的一个非零解，则该方程另一个与 y_1 线性无关的解为

$$y_2=y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x,$$

那么方程(2)的通解为

$$y=C_1y_1+C_2y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

其中 C_1,C_2 是任意常数。

刘维尔公式告诉我们，在得到方程(2)的一个非零解后，可以迅速找到另外一个线性无关的解 y_2，进而得到方程(2)的通解，所以刘维尔公式在求解齐次微分方程时确实有着一定的优势，那么是否可以将该公式推广到求解更为一般的二阶微分方程(1)呢？

2. 主要结论及证明

答案是肯定的，下面以定理的形式给出方程(1)的求解方法。

定理：若 y_1 是方程(2)的一个非零特解，那么方程(1)的通解为

$$y=C_1y_1+C_2y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int f(x)y_1e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x$$

其中 C_1,C_2 是任意常数。

证明 因为 y_1 是方程(2)的一个非零特解，由刘维尔公式可得，方程(2)的另一个线性无关的解为

$$y_2=y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \tag{3}$$

故方程(2)的通解为

$$y=C_1y_1+C_2y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \tag{4}$$

利用常数变易法[2]，可令方程(1)的通解为

$$y=C_1(x)y_1+C_2(x)y_1\int\frac{1}{y_1{}^2}e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \tag{5}$$

把(5)带入方程(1)可得

$$\begin{cases}C_1'(x)y_1+C_2'(x)y_1\int\dfrac{1}{y_1{}^2}e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=0\\ C_1'(x)y_1'+C_2'(x)\left[y_1'\int\dfrac{1}{y_1{}^2}e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+\dfrac{1}{y_1}e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\right]=f(x)\end{cases}$$

解方程组可得

$$\begin{cases}C_1'(x)=-f(x)y_1e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int\dfrac{1}{y_1{}^2}e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right)\\ C_2'(x)=f(x)y_1e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}C_1(x)=-\int\left[f(x)y_1e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int\dfrac{1}{y_1{}^2}e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right)\right]\mathrm{d}x+C_1\\ C_2(x)=\int\left(f(x)y_1e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x+C_2\end{cases} \tag{6}$$

将(6)代入(5)可得方程(1)的通解为

$$y=C_1y_1+C_2y_1\int\frac{1}{y_1{}^2}e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x-y_1\int\left[f(x)y_1e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\int\frac{1}{y_1{}^2}e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x+y_1\int\frac{1}{y_1{}^2}e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\int\left(f(x)y_1e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x$$

由分部积分法，化简得方程(1)的通解为

$$y=C_1y_1+C_2y_1\int\frac{1}{y_1{}^2}e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+y_1\int\frac{1}{y_1{}^2}e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int f(x)y_1e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x$$

通过上面结论，还可以得到以下两个推论：

推论 1 若 y_1 是方程(2)的一个非零解，那么方程(1)的一个特解为

$$Y=y_1\int\frac{1}{y_1{}^2}e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int f(x)y_1e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x$$

推论 2 当 $f(x)=0$ 时，上述定理就转化为刘维尔公式

$$y=C_1y_1+C_2y_1\int\frac{1}{y_1{}^2}e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

3. 举例及几点技巧

3.1. 举例

例 1 求解方程 $y''-\dfrac{x+2}{x}y'+\dfrac{x+2}{x^2}y=x^2$ 的通解。

解：观察可得，该方程对应的齐次方程 $y''-\dfrac{x+2}{x}y'+\dfrac{x+2}{x^2}y=0$

的一个特解为 $y_1 = x$，由于 $P(x) = -\frac{x+2}{x}, f(x) = x^2$，根据定理可得通解为

$$y = C_1 x + C_2 x \int \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{x+2}{x} dx} dx + x \int \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{x+2}{x} dx} \left[\int x^3 e^{-\int \frac{x+2}{x} dx} dx \right] dx$$

整理可得

$$y = C_1 x + C_2 x e^x - x^2 - \frac{x^3}{2}$$

例 2 已知方程 $y'' - 4xy' + (4x^2 - 2) y = xe^{x^2} \ln x$ 对应的齐次方程的一个解为 $y_1 = e^{x^2}$，试求解原非齐次微分方程的通解[3]。

解：由题意可知 $P(x) = -4x$，$f(x) = xe^{x^2} \ln x$，而 $y_1 = e^{x^2}$ 是原方程对应齐次方程的一个特解，则根据定理，非齐次微分方程的通解为

$$y = C_1 e^{x^2} + C_2 e^{x^2} \int \frac{1}{\left(e^{x^2}\right)^2} e^{\int 4x dx} dx + e^{x^2} \int \frac{1}{\left(e^{x^2}\right)^2} e^{\int 4x dx} \left[\int x \left(e^{x^2}\right)^2 \ln x e^{-\int 4x dx} dx \right] dx$$

整理可得

$$y = C_1 e^{x^2} + C_2 x e^{x^2} + \frac{1}{6} x^3 e^{x^2} \ln x - \frac{5}{36} x^3 e^{x^2}$$

3.2. 几点技巧[4]

观察方程(2)的一个非零特解的方法很灵活，如何迅速得到，笔者总结了如下几点技巧，仅供参考。

① 若 $P(x) + xQ(x) = 0$，则特解为 $y = x$。

② 若 $P(x) + Q(x) + 1 = 0$，则特解为 $y = e^x$。

③ 若 $P(x) + Q(x) - 1 = 0$，则特解为 $y = e^{-x}$。

④ 若 $H(x) + Q(x) + P(x) = 0$，则方程为 $H(x) y'' + P(x) y' + Q(x) y = 0$ 的特解为 $y = e^x$。

4. 结语

本文给出了一种在知道二阶齐次微分方程的一个非零特解的情况下，求解非齐次通解的方法，该方法的优势在于求得齐次方程的一个非零特解后，根据定理中的公式，便可快捷的求出非齐次方程的通解[5]。但对于不易观察得出特解的齐次方程，该方法便显现出了局限性，本文给出观察齐次线性微分方程特解的四条技巧，由于二阶变系数非齐次线性微分方程并没有普适的解析解，而该方法给出易求一个特解条件下，求二阶非齐次线性微分方程通解的一般公式，所以这在求解二阶线性微分方程中，具有重要的意义。由以上分析可知，该方法基于刘维尔公式，首先得到二阶齐次线性微分方程的通解，再利用常数变易法，得到非齐次线性微分方程的通解，该方法也给出刘维尔公式求解二阶齐次线性微分方程的一个理论依据，这对学习和研究高阶的线性微分方程具有借鉴和启迪意义。

基金项目

国防科技大学第三批校级规划课程。

参考文献

[1] 郑华盛. 二阶变系数线性微分方程的解法探讨[J]. 高等数学研究, 2021, 24(3): 50-53.

[2] 同济大学应用数学系. 高等数学: 上册[M]. 第 7 版. 北京: 高等教育出版社, 2017: 6-227.

[3] 国防科技大学理学院. 高等数学: 上册[M]. 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2021.

[4] 张清芳, 库在强. 用观察法求某些二阶变系数齐次方程的通解[J]. 高等数学研究, 2005, 8(3): 47-48.

[5] 胡劲松, 李先富, 郑克龙. 一种二阶变系数线性微分方程的求解方法[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版), 2005, 22(3): 220-222.