

(2 + 1)维BLMP方程Lump波与孤波的相互作用解

肖星奇

上海理工大学理学院, 上海

收稿日期: 2025年2月19日; 录用日期: 2025年3月20日; 发布日期: 2025年4月9日

摘要

本文应用Hirota双线性方法探讨了(2 + 1)维Boiti-Leon-Manna-Pempinelli (BLMP)方程的解及其相互作用。该方法的一个特点是使用对数变换将方程转化为双线性形式, 且我们在对数变换中引入了非零常数。本文分析了1-lump波分别与1-kink孤波和2-kink孤波之间的相互作用, 揭示了它们的弹性和共振碰撞行为。为了进一步说明这些解的特征, 我们利用Mathematica软件提供了详细的三维图示结果。

关键词

(2 + 1)维BLMP方程, Lump解, 共振相互作用, Hirota双线性法, 长波极限法

Interactional Solutions of One Lump and Solitons for the (2 + 1)-Dimensional BLMP Equation

Xingqi Xiao

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Feb. 19th, 2025; accepted: Mar. 20th, 2025; published: Apr. 9th, 2025

Abstract

In this study, we investigate the (2 + 1)-dimensional Boiti-Leon-Manna-Pempinelli equations using the Hirota bilinear method. A feature of our approach is the use of a logarithmic transformation to convert the equation into bilinear form with the introduction of a nonzero constant in the transformation. We analyze the interaction dynamics of lump solutions with one and two kink solitons, revealing their elastic and resonant collision behaviors. To further illustrate the characteristics of

these solutions, we provide detailed 3D plots using the Mathematica software.

Keywords

(2 + 1)-BLMP Equation, Lump Solution, Resonant Interaction, Hirota Bilinear Method, Long-Wave Limit Method

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

非线性演化方程(NLEEs)在建模和分析各类复杂现象方面发挥着基础性作用,广泛应用于物理学、空气动力学、流体动力学、大气与海洋物理学、爆炸动力学、化学、生理学、生物学和生态学等多个科学领域[1]-[5]。这些方程为理解非线性波动动力学、模式形成以及孤立子相互作用提供了重要的理论框架,适用于许多物理和生物系统。

随着数学物理和现代理论方法的发展,非线性科学取得了显著进展。在这些发展中,孤立子理论作为一个关键领域,提供了对非线性波动结构行为的深刻洞察。这一进展催生了许多高维非线性方程的出现,扩展了经典模型,使其能够适应更加复杂和现实的情境。著名的例子包括扩展的(3 + 1)维 BKP-Bousinesq 方程[6]、(2 + 1)维 Sawada-Kotera 方程[7]、KdV-Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff (KdV-CBS)方程[8]以及扩展的(3 + 1)维 Jimbo-Miwa 方程[9]等。尽管非线性方程的发展已取得广泛进展,但其中最基础且具有挑战性的问题之一仍然是精确解的确定。寻找精确解对于理解这些方程的内在性质至关重要,它能够揭示孤立子相互作用、稳定性条件及其他关键的动力学特性。因此,许多分析方法应运而生,进一步丰富了非线性波动理论领域,包括 Bäcklund 变换[10] [11]、Darboux 变换[12] [13]、逆散射变换[14]、扩展的 tanh 函数法[15]、Hirota 双线性法[16] [17]和试验函数法[18]。这些方法作为有效的分析工具,帮助研究非线性系统复杂解的结构。(2 + 1)维 Boiti-Leon-Manna-Pempinelli(BLMP)方程最初是通过弱 Lax 对关系研究 KdV 方程时推导出来[19]。该方程一开始用于描述不可压缩流体中的非线性波动和冲击波传播。除了流体力学外,BLMP 方程还广泛应用于光纤通信、等离子体物理和固体力学中的波动分析。

本文主要研究以下的 (2 + 1) 维 Boiti-Leon-Manna-Pempinelli (BLMP) 方程:

$$u_{xxxy} + u_{yt} - 3u_{xx}u_y - 3u_xu_{xy} = 0, \quad (1.1)$$

其中 $u = u(x, y, t)$ 表示一个具有空间坐标 (x, y) 和时间坐标 t 的解析函数,下标表示偏导数。

在双线性方法中,选取合适的对数变换是解非线性偏微分方程的一种有效方法,特别是在构造解的过程中。选取合适的对数变换通常是假设解的形式为指数函数来进行。这种变换有助于将非线性的乘法关系转化为加法形式,从而简化方程的结构并实现双线性化。为了便于精确解的构造,我们引入了以下变换

$$u = -2[\ln F]_x + u_0 y.$$

此时方程(1.1)有相应的双线性形式:

$$(D_y D_t + D_y D_x^3 - 3u_0 D_x^2) F \cdot F = 0.$$

其中 Hirota 双线性微分算子定义如下:

$$D_x^{m_1} D_y^{m_2} D_t^{m_3} F \cdot G = (\partial_x - \partial_{x'})^{m_1} (\partial_y - \partial_{y'})^{m_2} (\partial_t - \partial_{t'})^{m_3} F(x, y, t) G(x', y', t') \Big|_{x'=x, y'=y, t'=t}.$$

在本节中, 我们应用双线性方法和两类不同的测试函数推导出方程(1.1)的 3-孤波解和 4-孤波解:

$$u = -2[\ln F_N]_x + u_0 y, \quad N = 3, 4,$$

$$F_3 = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_3} + A_{12}e^{\eta_1+\eta_2} + A_{13}e^{\eta_1+\eta_3} + A_{23}e^{\eta_2+\eta_3} + A_{12}A_{13}A_{23}e^{\eta_1+\eta_2+\eta_3},$$

$$F_4 = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_3} + e^{\eta_4} + \sum_{1 \leq i < j \leq 4} A_{ij}e^{\eta_i+\eta_j} + A_{12}A_{13}A_{23}e^{\eta_1+\eta_2+\eta_3} + A_{12}A_{14}A_{24}e^{\eta_1+\eta_2+\eta_4} \\ + A_{13}A_{14}A_{34}e^{\eta_1+\eta_3+\eta_4} + A_{23}A_{24}A_{34}e^{\eta_2+\eta_3+\eta_4} + A_{12}A_{13}A_{14}A_{23}A_{24}A_{34}e^{\eta_1+\eta_2+\eta_3+\eta_4},$$

其中

$$\eta_j = K_j x + L_j y - \Omega_j t, \quad \Omega_j = K_j^3 - \frac{3u_0 K_j^2}{L_j}, \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad (1.2)$$

$$A_{mn} = \frac{u_0 (K_m L_n - K_n L_m)^2 + K_m K_n L_m L_n (K_m - K_n)(L_m - L_n)}{u_0 (K_m L_n - K_n L_m)^2 + K_m K_n L_m L_n (K_m + K_n)(L_m + L_n)}, \quad 1 \leq m < n \leq 4. \quad (1.3)$$

本文主要讨论了 lump 波与 kink-孤波的相互作用解。Lump 波是一类局部化波动解, 其特征是具有有理函数结构, 并沿特定方向传播, 在所有空间方向上都表现出完全局域化以及在无穷远处呈代数衰减。J. Satsuma 和 M. J. Ablowitz [20] [21] 最早通过 Hirota 双线性方法求解了 KPI 方程的孤波解, 并通过取长波极限的方式得到了该类解的形式。观察上述 A_{mn} 的具体表达式, 当非零常数 u_0 不存在时, 分析可知此时无法利用长波极限法求解方程(1.1)的 lump 波解, 因此引入非零常数 u_0 对于本文的研究内容十分必要。另一方面, lump 波可以与其他类型的波动如孤波或呼吸波等发生相互作用, 包括弹性或共振作用现象。本文接下来研究了 1-lump 波与 1-kink 孤波、1-lump 波与 2-kink 孤波之间的相互作用, 并利用 Mathematica 软件作出对应图示。

2. 1-Lump 波与 1-Kink 孤波的相互作用

在本节中, 为了得到没有奇性的相互作用解, 从 F_3 出发我们令 $K_1 = K_2^*$, $L_1 = L_2^*$ 即 $\eta_1 = \eta_2^*$, 应用长波极限法我们可以得到 1-lump 波和 1-kink 孤波的相互作用解:

$$u = u_{111s} = -2[\ln F]_x + u_0 y, \quad F = (|B_{13} + \theta_1|^2 + B_{12})e^{\eta_3} + |\theta_1|^2 + B_{12}, \quad (2.1)$$

其中

$$B_{13} = -\frac{2K_1 K_3 L_1 L_3 (K_3 L_1 + K_1 L_3)}{K_1 K_3 L_1 L_3 (K_3 L_3 - 2u_0) + u_0 K_3^2 L_1^2 + u_0 K_1^2 L_3^2}, \\ B_{12} = -\frac{2K_1 K_2 L_1 L_2 (K_2 L_1 + K_1 L_2)}{u_0 (K_2 L_1 - K_1 L_2)^2}, \quad (2.2)$$

$$\eta_3 = K_3 x + L_3 y - \left(K_3^3 - \frac{3u_0 K_3^2}{L_3} \right) t, \quad (2.3)$$

$$\theta_1 = K_1 x + L_1 y - \frac{3u_0 K_1^2}{L_1} t. \quad (2.4)$$

对 B_{12} 的表达式分析可知, 当 $u_0 = 0$ 时 B_{12} 将消失。这强调了在对数变换中引入非零参数 u_0 的重要性。因为在长波极限法下, 只有当 u_0 取某个非零常数时, 方程(1.1)才能存在 lump 解。此外, 在本节中以及下一节中, 不妨我们取 $u_0 = 1$ 以便于计算。取参数

$$K_1 = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3}i, K_2 = -\frac{1}{2} - \frac{2}{3}i, K_3 = 2, L_1 = \frac{1}{3}, L_2 = \frac{1}{3}, L_3 = 1.$$

如图 1 所示, 我们给出了 1-lump 波与 1-kink 孤波之间的弹性相互作用。具体表现为局域化波(lump 波)与具有稳定形态的行波(1-kink 孤波)之间的弹性碰撞。碰撞发生后, 1-lump 波和 1-kink 孤波均保持其原始形态和传播方向, 仅在相互作用过程中产生相应的相位偏移和位置调整, 而不发生能量交换或形状畸变, 这种特性充分体现了它们之间相互作用的弹性本质。

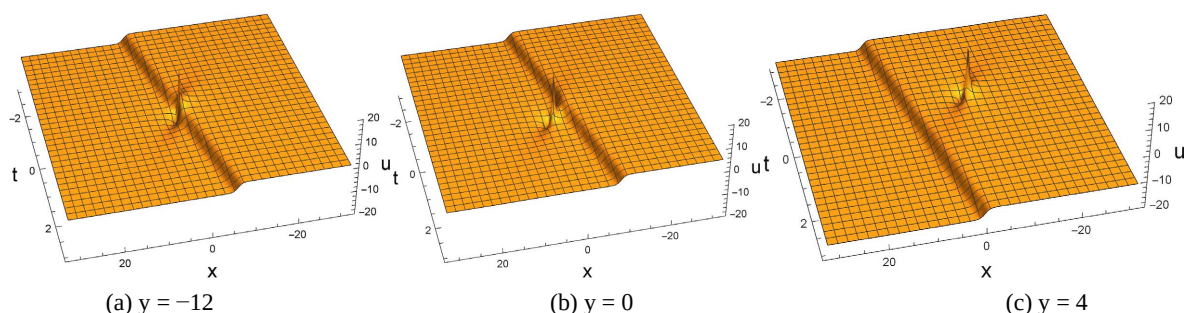


Figure 1. Elastic interaction between 1-lump and 1-kink soliton

图 1. 1-lump 波与 1-kink 孤波的弹性相互作用

共振碰撞的条件可以在弹性碰撞的理论框架下推导得到。为了深入理解这一机制, 我们对方程的解(2.1)进行渐近分析, 以揭示在不同参数条件下解的演化特性, 并探讨导致共振碰撞发生的关键条件。这一分析不仅有助于理解孤立子之间的长时间相互作用, 还为研究更复杂的非线性波动行为提供理论支持。

当碰撞发生前 ($\eta_3 \rightarrow -\infty$), lump 波的形式可以表达为

$$u_{3l}^- = -2 \left[\ln \left(|\theta_1|^2 + B_{12} \right) \right]_x + y,$$

当碰撞发生后 ($\eta_3 \rightarrow +\infty$), lump 波具有形式

$$u_{3l}^+ = -2 \left[\ln \left(|\theta_1 + B_{13}|^2 + B_{12} \right) \right]_x + y.$$

由对 lump 波的渐近分析可知, 碰撞前后 lump 中心位置相位移为 B_{13} 。当相移 $B_{13} \rightarrow \infty$ 时, 即 B_{13} 的分母趋于零, 此时共振碰撞发生。此条件表明, 当满足特定参数时, 系统中的波解会发生共振相互作用, 导致非线性相互作用的显著变化。该条件为理解共振碰撞现象提供了关键的数学描述, 并揭示了在特定相互作用条件下波动模式的耦合和能量交换机制。为了构造共振碰撞, 我们考虑 B_{13} 的分母为零:

$$K_1 K_3 L_1 L_3 (K_3 L_3 - 2u_0) + u_0 K_3^2 L_1^2 + u_0 K_1^2 L_3^2 = 0,$$

即

$$K_1 = \frac{2K_3 L_1 L_3 - K_3^2 L_1 L_3^2 - K_3^{3/2} L_1 L_3^{3/2} \sqrt{-4 + K_3 L_3}}{2L_3^2}.$$

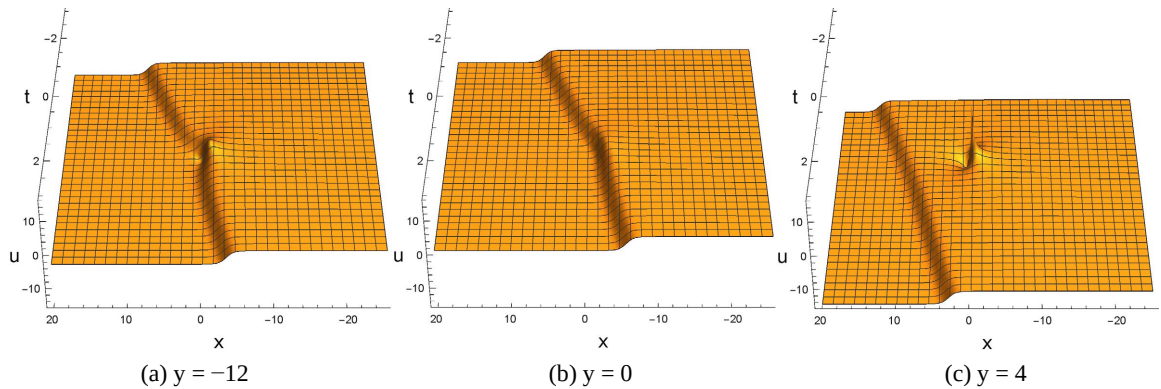


Figure 2. Resonant interaction between 1-lump and 1-kink soliton

图 2. 1-lump 波与 1-kink 孤波的共振相互作用

满足上述条件后，我们可得到 1-lump 波与 1-kink 孤波的共振相互作用解如下：

$$u = u_{R-1/1s} = -2[\ln F]_x + y, \quad F = e^{\eta_3} + |\theta_1|^2 + B_{12},$$

其中 θ_1, B_{12}, η_3 的表达式参考(2.2), (2.3)和(2.4)。取参数

$$K_1 = -\frac{2}{3}i, \quad K_2 = \frac{2}{3}i, \quad K_3 = 2, \quad L_1 = -\frac{1}{3}, \quad L_2 = -\frac{1}{3}, \quad L_3 = 1.$$

我们在图 2 中展示了 1-lump 波与 1-kink 孤波之间的共振碰撞。图 2 显示，当 lump 波逐渐接近孤波时，波形会发生明显的变化，lump 波的形态和传播速度出现调整，lump 波逐渐被孤波吸收，这一过程展示了能量在波动间的转移，并改变了波的形态。与不同的是，在弹性碰撞中，lump 波会完全穿过孤立子波，二者仅发生相位和位置上的偏差。这是共振碰撞与弹性碰撞间的显著区别，体现了两种不同类型相互作用的行为特征。

3. 1-Lump 波与 2-Kink 孤波的相互作用

同上一节类似，为了保证 lump 解不存在奇性，我们从 F_4 出发令 $K_1 = K_2^*, L_1 = L_2^*$ 即 $\eta_1 = \eta_2^*$ ，可以得到 1-lump 波和 2-kink 孤波的相互作用解形式如下：

$$u = u_{1/1s} = -2[\ln F]_x + u_0 y, \quad (3.1)$$

$$F = A_{34}e^{\eta_3+\eta_4} \left(|B_{13} + B_{14} + \theta_1|^2 + B_{12} \right) + e^{\eta_3} \left(|B_{13} + \theta_1|^2 + B_{12} \right) + e^{\eta_4} \left(|B_{14} + \theta_1|^2 + B_{12} \right) + |\theta_1|^2 + B_{12},$$

其中 $\eta_3, \eta_4, A_{34}, B_{12}, \theta_1$ 由(1.2), (1.3), (2.2)和(2.4)所定义，且

$$B_{1j} = -\frac{2K_1K_jL_1L_j(K_jL_1 + K_1L_j)}{K_1K_jL_1L_j(K_jL_j - 2) + K_j^2L_1^2 + K_1^2L_j^2}, \quad j = 3, 4.$$

取参数

$$K_1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i, \quad K_2 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}i, \quad K_3 = 2, \quad K_4 = 1, \quad L_1 = -\frac{1}{3}, \quad L_2 = -\frac{1}{3}, \quad L_3 = 1, \quad L_4 = \frac{3}{2}.$$

我们给出了 1-lump 波与 2-kink 孤波的弹性交叉碰撞，如图 3 所示。图示结果表明，lump 波在碰撞过程中穿过两条相交的 kink 孤波。而碰撞发生前后，这三个波的振幅均保持不变，未发生能量交换或形态畸变。这一现象进一步验证了它们之间相互作用的弹性特性，并揭示了多孤波系统中稳定传播的规律。

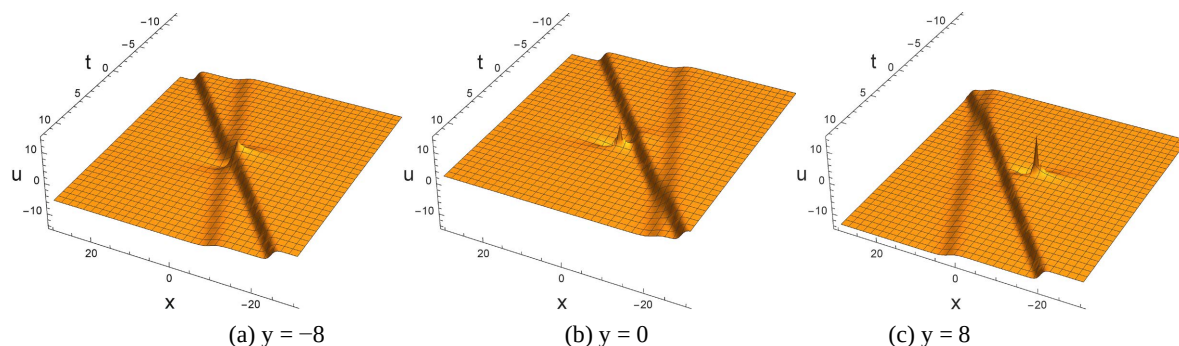


Figure 3. Elastic intersectional interaction between 1-lump and 2-kink soliton

图 3. 1-lump 波与 2-kink 孤波的相交型弹性相互作用

特别地，如果取参数

$$K_1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i, K_2 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}i, K_3 = 2, K_4 = 1, L_1 = -\frac{1}{3}, L_2 = -\frac{1}{3}, L_3 = \frac{4}{3}, L_4 = 2.$$

我们可以得到图 4 中 1-lump 波和 2-kink 孤波之间平行类型的弹性相互作用，此时满足条件 $\frac{K_3}{\Omega_3} = \frac{K_4}{\Omega_4}$.

观察图像可知，两个 kink 孤波在相互作用前后几乎保持平行，轨迹没有明显偏移。此外，lump 波在相互作用过程中稳定地穿过两个 kink 孤波，不被 kink 波所吸收。在 lump 波与 2-kink 孤波的相交型和并行型弹性相互作用中，波形的能量传递均表现为波形的不变性，即在碰撞前后波的形态保持不变，能量不发生永久性交换，波形在碰撞前后呈现一致性。

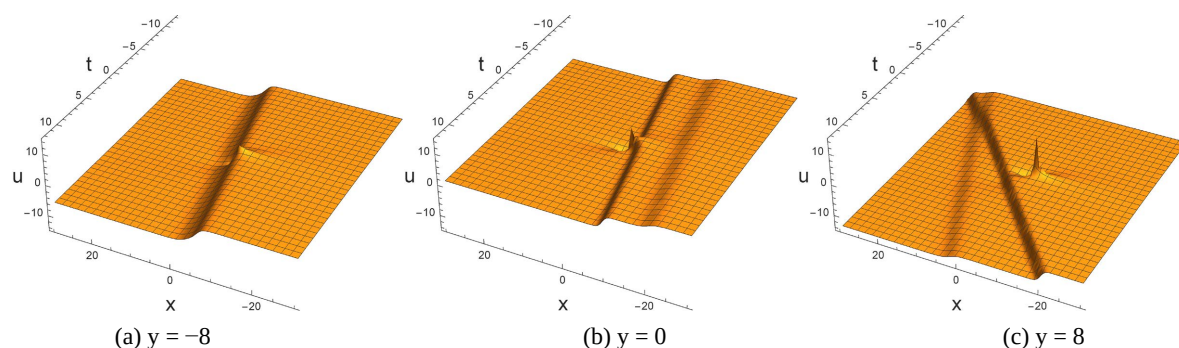


Figure 4. Elastic parallel interaction between 1-lump and 2-kink soliton

图 4. 1-lump 波与 2-kink 孤波的平行型弹性相互作用

类似地，我们对解(3.1)进行渐近分析，并以此获得共振碰撞的条件。

当碰撞发生前 ($\eta_3 \rightarrow -\infty, \eta_4 \rightarrow -\infty$), lump 波的形式可以表达为

$$u_{4l}^- = -2 \left[\ln \left(|\theta_1|^2 + B_{12} \right) \right]_x + y,$$

当碰撞发生后 ($\eta_3 \rightarrow +\infty, \eta_4 \rightarrow +\infty$), lump 波具有形式

$$u_{4l}^+ = -2 \left[\ln \left(|\theta_1 + B_{13} + B_{14}|^2 + B_{12} \right) \right]_x + y.$$

对 lump 波碰撞前后的中心位置进行分析后发现，其相位偏移等于 $B_{13} + B_{14}$. 因此，共振碰撞的条件为 $B_{13} + B_{14} \rightarrow +\infty$. 为了满足此约束条件，我们考虑同时令 B_{13} 和 B_{14} 的分母同时为零，此时可以得到约束关

系 $K_4 = -K_3$ 和 $L_4 = -L_3$ 。

满足上述条件后, 1-lump 波与 2-kink 孤波的共振作用解可以记为:

$$u = u_{R-1/2s} = -2[\ln F]_x + y, \quad F = B_{34}e^{\eta_3 + \eta_4} + e^{\eta_3} + e^{\eta_4} + |\theta_1|^2 + B_{12},$$

其中 $\eta_3, \eta_4, A_{34}, B_{12}, \theta_1$ 由(1.2), (1.3), (2.1)和(2.3)定义, 且

$$B_{34} = -\frac{4L_3^2}{L_1L_2(-4 + K_3L_3)}.$$

取参数

$$K_1 = -2i, \quad K_2 = 2i, \quad K_3 = -1, \quad K_4 = 1, \quad L_1 = -4, \quad L_2 = -4, \quad L_3 = 2, \quad L_4 = -2.$$

如图 5 所示, 一个 lump 波从一个 kink 孤波分离出来, 并逐渐向另一个 kink 孤波移动。在这个过程中, lump 波的形态和速度可能会发生一定的变化。随着 lump 与另一个 kink 孤波的距离越来越近, 共振效应开始显现, 使得 lump 波的形态和能量受到一定的影响。随着两者的距离越来越小, lump 波逐渐被另一个 kink 孤波所吞没, 最终完全并入其中, 展现出一种非弹性的相互作用特征。这种相互作用模式明显区别于图 4 所展示弹性相互作用的情况。图 4 强调孤波间的相互作用不会导致能量的永久交换或波形的合并, 而是保持波形的独立性。这表明, 在特定的参数条件下, lump 波和 kink 孤波的相互作用可以呈现出不同的动力学行为。

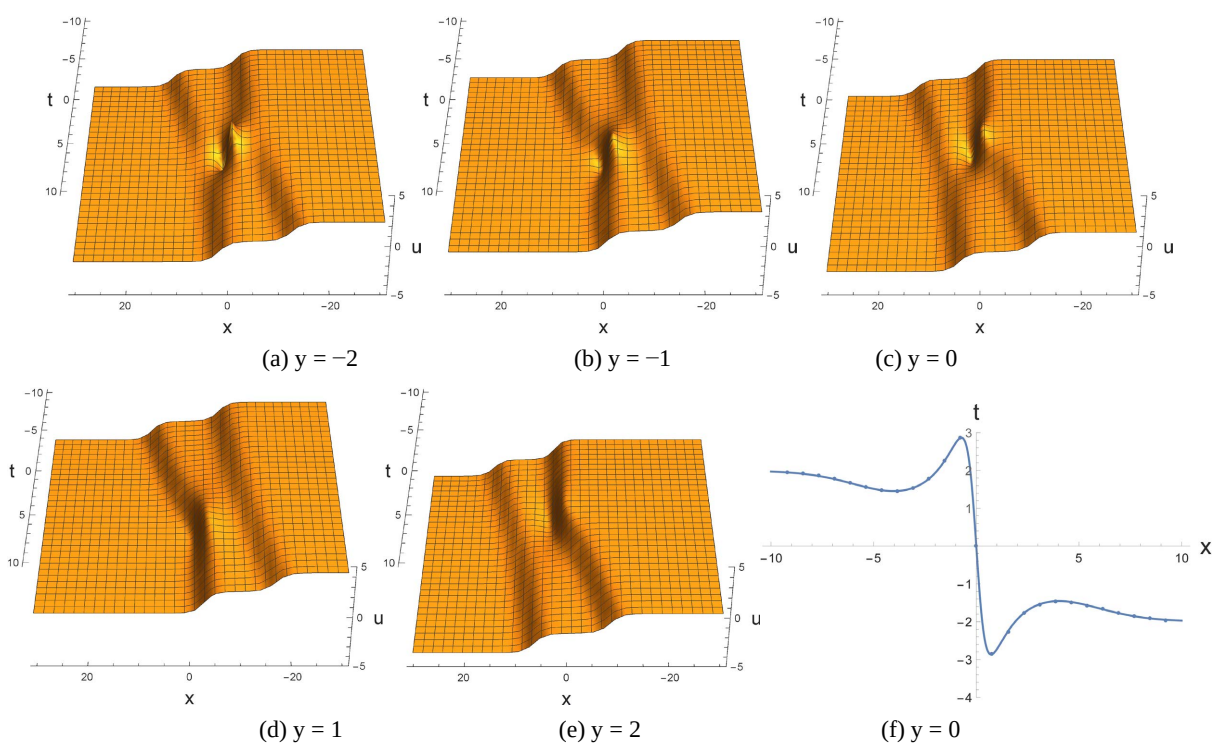


Figure 5. Resonant interaction between 1-lump and 2-kink soliton

图 5. 1-lump 波与 2-kink 孤波的共振相互作用

4. 结语

在本文中, 我们利用 Hirota 双线性法研究了 BLMP 方程的若干解及其性质, 主要探讨了 lump 波

与 kink 孤波之间的弹性与共振碰撞。共振碰撞的条件通常通过分析波动的渐近行为来构造。比如在 1-lump 波与 1-kink 孤波的弹性碰撞中, 碰撞前后 lump 波的中心位置发生相位偏移, 当我们控制相移趋向于无穷时, 出现波动的共振相互作用。对方程进行对数变换, 转化为双线性形式时, 我们引入了一个小的扰动项 u_0 , 表示为 $u = -2[\ln F]_x + u_0 y$ 。这一引入不仅扩展了 BLMP 方程解的多样性, 更为重要的是, 它促使了我们可以应用长波极限法求得 (2+1) 维 BLMP 方程的 lump 解。通过结合双线性导数方程与长波极限法, 并选择合适的参数, 我们给出了相互作用解的图像, 并对其性质进行了简要分析。本研究采用的渐近分析方法同样可以应用于其他孤立子方程。

参考文献

- [1] Coleman, C.J. (1990) A Boundary Element Approach to Some Nonlinear Equations from Fluid Mechanics. *Computational Mechanics*, **6**, 197-202. <https://doi.org/10.1007/bf00350236>
- [2] Younas, U. and Ren, J. (2023) Diversity of Wave Structures to the Conformable Fractional Dynamical Model. *Journal of Ocean Engineering and Science*, **8**, 559-572. <https://doi.org/10.1016/j.joes.2022.04.014>
- [3] Wazwaz, A. (2017) Exact Soliton and Kink Solutions for New (3 + 1)-Dimensional Nonlinear Modified Equations of Wave Propagation. *Open Engineering*, **7**, 169-174. <https://doi.org/10.1515/eng-2017-0023>
- [4] Shqair, M. (2019) Solution of Different Geometries Reflected Reactors Neutron Diffusion Equation Using the Homotopy Perturbation Method. *Results in Physics*, **12**, 61-66. <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2018.11.025>
- [5] Morris, J.F. (2020) Toward a Fluid Mechanics of Suspensions. *Physical Review Fluids*, **5**, Article ID: 110519. <https://doi.org/10.1103/physrevfluids.5.110519>
- [6] Li, L., Yan, Y. and Xie, Y. (2022) Rational Solutions with Non-Zero Offset Parameters for an Extended (3 + 1)-Dimensional BKP-Boussinesq Equation. *Chaos, Solitons & Fractals*, **160**, Article ID: 112250. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2022.112250>
- [7] Yin, Z. and Tian, S. (2021) Nonlinear Wave Transitions and Their Mechanisms of (2 + 1)-Dimensional Sawada-Kotera Equation. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **427**, Article ID: 133002. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2021.133002>
- [8] Wazwaz, A. (2021) Two New Painlevé Integrable KDV-Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff (KdV-CBS) Equation and New Negative-Order KdV-CBS Equation. *Nonlinear Dynamics*, **104**, 4311-4315. <https://doi.org/10.1007/s11071-021-06537-6>
- [9] Guo, H., Xia, T. and Hu, B. (2020) High-Order Lumps, High-Order Breathers and Hybrid Solutions for an Extended (3 + 1)-Dimensional Jimbo-Miwa Equation in Fluid Dynamics. *Nonlinear Dynamics*, **100**, 601-614. <https://doi.org/10.1007/s11071-020-05514-9>
- [10] Tan, F. and Wu, L. (2023) On the Bäcklund Transformation of a Generalized Harry Dym Type Equation. *Wave Motion*, **120**, Article ID: 103162. <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2023.103162>
- [11] He, Y. and Tam, H. (2009) Bilinear Bäcklund Transformation and Lax Pair for a Coupled Ramani Equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **357**, 132-136. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2009.04.006>
- [12] Lü, X. (2013) Soliton Behavior for a Generalized Mixed Nonlinear Schrödinger Model with n -Fold Darboux Transformation. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **23**, Article ID: 033137. <https://doi.org/10.1063/1.4821132>
- [13] Chen, H. and Zheng, S. (2023) Darboux Transformation for Nonlinear Schrödinger Type Hierarchies. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **454**, Article ID: 133863. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2023.133863>
- [14] Ablowitz, M.J., Kaup, D.J., Newell, A.C. and Segur, H. (1974) The Inverse Scattering Transform-Fourier Analysis for Nonlinear Problems. *Studies in Applied Mathematics*, **53**, 249-315. <https://doi.org/10.1002/sapm1974534249>
- [15] Fan, E. (2000) Extended Tanh-Function Method and Its Applications to Nonlinear Equations. *Physics Letters A*, **277**, 212-218. [https://doi.org/10.1016/s0375-9601\(00\)00725-8](https://doi.org/10.1016/s0375-9601(00)00725-8)
- [16] Hirota, R. (1971) Exact Solution of the Korteweg-De Vries Equation for Multiple Collisions of Solitons. *Physical Review Letters*, **27**, 1192-1194. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.27.1192>
- [17] Ma, W. (2022) Soliton Solutions by Means of Hirota Bilinear Forms. *Partial Differential Equations in Applied Mathematics*, **5**, Article ID: 100220. <https://doi.org/10.1016/j.padiff.2021.100220>
- [18] Gurefe, Y., Misirli, E., Sonmezoglu, A. and Ekici, M. (2013) Extended Trial Equation Method to Generalized Nonlinear Partial Differential Equations. *Applied Mathematics and Computation*, **219**, 5253-5260. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2012.11.046>

- [19] Boiti, M., Leon, J.J., Manna, M. and Pempinelli, F. (1986) On the Spectral Transform of a Korteweg-De Vries Equation in Two Spatial Dimensions. *Inverse Problems*, **2**, 271-279. <https://doi.org/10.1088/0266-5611/2/3/005>
- [20] Ablowitz, M.J. and Satsuma, J. (1978) Solitons and Rational Solutions of Nonlinear Evolution Equations. *Journal of Mathematical Physics*, **19**, 2180-2186. <https://doi.org/10.1063/1.523550>
- [21] Satsuma, J. and Ablowitz, M.J. (1979) Two-Dimensional Lumps in Nonlinear Dispersive Systems. *Journal of Mathematical Physics*, **20**, 1496-1503. <https://doi.org/10.1063/1.524208>