

基于数轴的实数知识重构

汪小双

新疆师范大学数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐

收稿日期: 2025年2月24日; 录用日期: 2025年4月11日; 发布日期: 2025年4月29日

摘要

本文主要谈论了“实数单位”是什么的问题。通过单位线段OA在OA延长线上的运动, 从几何直观得到“1”是自然数的单位。在对自然数单位“1”的组合与拆分的过程中, 进一步加深了对进位制的理解, 并且通过对“1”的等分得到了分数单位。将整数和分数形式统一, 得到了有理数的概念。使单位线段做反向运动得到表示负有理数的点。通过对小数数位的分析得到, 在OA线段所在的直线上, 每一个无限不循环小数总能找到一条线段与之对应。因此, 无理数的单位也是“1”。最终, 得到实数的单位为“1”。研究实数单位对理解数的概念的一致性和数与式运算的一致性都有着深刻的意义。

关键词

单位“1”, 实数, 初中数学

Reconstruction of Real Number Knowledge Based on the Number Line

Xiaoshuang Wang

School of Mathematics and Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Feb. 24th, 2025; accepted: Apr. 11th, 2025; published: Apr. 29th, 2025

Abstract

This article mainly talks about the question of what a “real unit” is. Through the movement of OA on the extension line of the unit line segment, it is intuitively obtained from the geometry that “1” is the unit of natural numbers. In the process of combining and splitting the natural number unit “1”, the understanding of the carry system is further deepened, and the fractional unit is obtained by dividing the “1”. The whole number and fraction form are unified, and the concept of rational numbers is obtained. Make the unit line segment move in the opposite direction to get a point representing a negative rational number. Through the analysis of decimal places, it is obtained that on the

straight line where the OA line segment is located, each infinite non-cyclic decimal can always find a line segment corresponding to it. Therefore, the unit of an irrational number is also “1”. Eventually, the unit of the real number obtained is “1”. The study of real units is of profound significance for understanding the consistency of the concept of number and the consistency of number and formula operations.

Keywords

Unit “1”, Real Numbers, Junior High School Mathematics

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 问题提出

数学是一个变化莫测的学科，但是万变不离其宗，我们只要找到变化的本源与规律，那么遇到任何问题都可以以不变应万变。在数学知识体系的建构中，单位是用于衡量或表示量的标准，它作为比较其他同类量大小的基准。我们知道对于图形的面积计算公式是基于规定单位面积而得到的，那么在数的运算中，是否也存在数的单位呢？数的单位是什么？研究数的单位有什么意义呢？

2. 认识实数单位

纵向来看，回顾已有的数集扩充过程，可以看到，每一次扩充都与实际需求密切相关。自然数对加法、乘法封闭，在对自然数的减法运算进行研究时，第一次引入了负数的概念，得到了新的集合——整数。整数对加法、减法、乘法封闭，在对其除法进行研究时，得到了分数。将分数和整数放在一起统称为有理数。为了解决正方形对角线的度量，以及 $x^2 - 2 = 0$ 这样的方程在有理数集中无解的问题，人们把有理数集扩充到了实数集。数集扩充后，在实数集中规定的加法运算、乘法运算，与原来在有理数集中规定的加法运算、乘法运算协调一致，并且加法和乘法都满足交换律和结合律，乘法对加法满足分配律[1]。

数学概念有着它的历史发展路径，但是为了数学概念的学习，世人会进一步通过公理等形式来规范其概念。当然，这些公理除了可以自洽以外，还要符合其概念的历史产生过程。从上述数的概念产生和逻辑分析路径来看，不难发现，实数产生的根源是对自然数集进行一步一步扩展得到的。那么研究实数的单位，其实就可以转化为研究自然数的单位。

2.1. 认识自然数单位

数学概念的形成是人类智慧的结晶。数(作为名词)，是人们从生产和生活实践中抽象出来的，如自然数、有理数、实数等[2]。在人类发展历史中认识到“1”没有想象中的简单，“1”是从大量的“一只羊、一头牛”中抽象出来的。经过漫长的历史发展，出于数学的严谨性和规范性的考虑，皮亚诺对自然数进行了公理化的规定。他认为：“每个自然数都有后继数，不同自然数的后继数不同。”按现代数学观点，自然数就是符合“皮亚诺公理的数”[3]。在皮亚诺公理中规定的后继原则是比加法更为基础的运算。通过皮亚诺公理，我们显然得到，“1”是自然数的单位。

数形结合是数学中一种较为合理且形象的思维方法。以平面上任意一点为端点，取任意长度为单位长度，画出一条线段。用这条线段的长度表示数字“1”。如果按照这样的方式，想要在此基础上表示数字“2”，那么只需要“+1”就可得到。选择线段的一个端点，在这条线段的延长线上即可表示出数字“2”。

如果将第一条线段记为 OA ，第二条线段记为 AB 。那我们就可以按照这样的方式，依次表示出线段 BC 、 CD ...那么线段 OB 、线段 OC 、线段 OD 分别表示数字“2”、“3”、“4”...此时我们将端点 O 记为数字“0”，将 OA 的运动方向记为“正方向”，那么点 A 的位置表示数字“1”，点 B 的位置表示数字“2” (如图 1)。因此可以通过线段 OA 从端点 O 开始沿着正方向运动，在线段 OA 的延长线上表示出整个自然数集。线段 OA 以这样的方式可以一直运动下去，更加直观的体现出自然数集合是无限的。

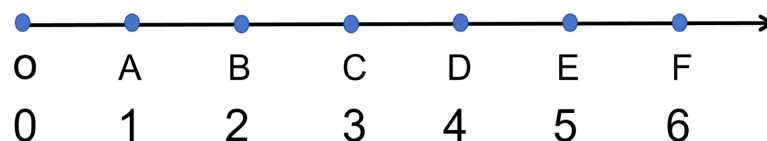


Figure 1. Generation of natural numbers
图 1. 自然数的生成

自然数单位的组合与拆分

加法是一切运算的基础，皮亚诺公理中的后继原则是比加法更为基础的算理。 $3+5=?$ 表示 3 之后第五个后继数是几？在自然数单位“1”的视角下，加法运算为 3 个“1”加上 5 个“1”等于几个“1”？在图 1 中，规定加法表示单位线段做正向运动。从起始点 O 开始，先运动 3 个单位长度，再运动 5 个单位长度所到达的点表示的数字即为其结果。加法的本质是对自然数单位的个数进行累加。

“1”是自然数的单位，也可以看作是自然数的基本单位。那么此时，就可以形成一个以“1”为基础单位的“量纲”。任意组合的“1”都可以作为自然数的新单位。因此，新单位的加法运算就是对相同加数和的简便运算。将新单位的加法运算称为乘法运算。从加法出发定义数的运算，如图所示。因此，只要规定单位“1”、起始点 O 、运动的正方向，任意自然数进行有限次加、乘、乘方运算，其结果都可以用这种方式表示出来(如图 2)。

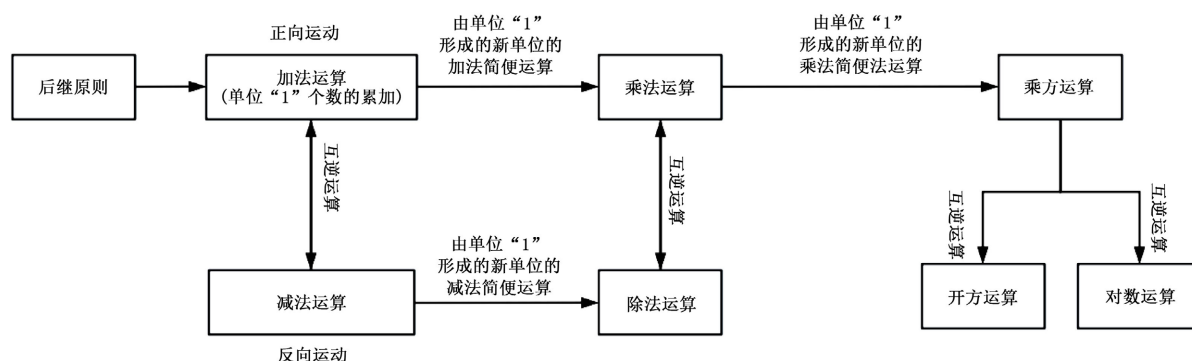


Figure 2. The operation of numbers
图 2. 数的运算

(1) 自然数单位的组合——进位制的认识

通过自然数单位组合形成的新单位，在本质上实现了对信息的压缩与抽象。这种“一组”就是进位。例如，十进制中，将 10 个“1”组成一组“10”形成新的计数单位。在位值制下，满十进一。位值制中的十进制如表 1 所示。以此类推，二进制，也就是 2 个“1”为一组，满二进一。在第一个数位上表示几个“1” ($1=20$)，第二个数位上表示几个“21”，第三个数位表示几个“22”...例如 $1011(2)=1 \times 20 + 1 \times 21 + 0 \times 22 + 1 \times 23 = 11$ 。同理，任意 X 进制的位值制都可以表示出来(如表 2)。

Table 1. Digital units
表 1. 数位单位

...	千万	百万	十万	万	千	百	十	个
...	10 个 “100000”	10 个 “100000”	10 个 “10000”	10 个 “1000”	10 个 “100”	10 个 “10”	10 个 “1”	“1”
...	107	106	105	104	103	102	101	1=100

Table 2. Explore the relationship between various number systems and digits
表 2. 各种进制与数位的关系

	第 n 个数位	第 $(n-1)$ 个数位	...	第三个数位	第二个数位	第一个数位
十进制	10^{n-1}	10^{n-2}	...	10^2	10^1	$10^0 = 1$
二进制	2^{n-1}	2^{n-2}	...	2^2	2^1	$2^0 = 1$
八进制	8^{n-1}	8^{n-2}	...	8^2	8^1	$8^0 = 1$
十六进制	16^{n-1}	16^{n-2}	...	16^2	16^1	$16^0 = 1$
x 进制	X^{n-1}	X^{n-2}	...	X^2	X^1	$X^0 = 1$

(2) 自然数单位的拆分——分数单位的认识

将自然数的基本单位“1”进行拆分，可以将其二等分、三等分、四等分...按照这种方式，我们可以找到所有的分数单位，让它们按照图 1 的方式进行运动，则可以在 OA 的延长线上找到所有表示分数的点(如图 3)。因此分数单位也是“1”(如图 4)。

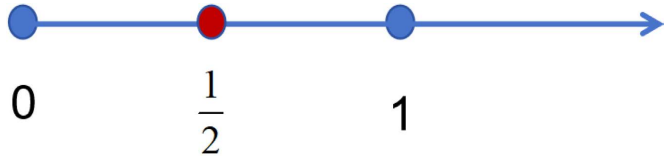


Figure 3. The decomposition of unit “1”
图 3. 单位 “1” 的拆分

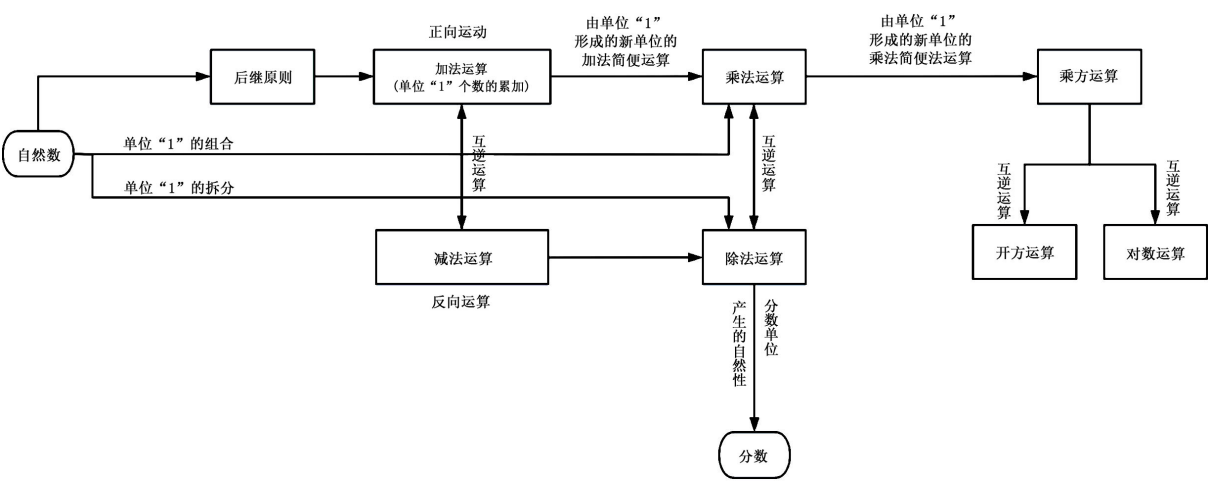


Figure 4. The origin of scores
图 4. 分数的产生

2.2. 认识有理数单位

用 0 作为分界量, 将大于 0 的数称为正数, 在正数前加上符号“-”的数叫作负数。正数和负数是表示一对相反意义的量。引入负数后, 数的范围就变大了[4]。按照图 1 的方式, 单位线段从点 O 开始作反向运动到达的点表示负数。我们可以通过线段运动直观地感受到这种变化。将表示单位“1”的线段 OA, 从端点 O 开始进行反向运动, 则可以依次找到表示-1, -2, -3, …的点(如图 5(左)); 将表示每个分数单位的线段也进行同样的运动, 那可以得到所有表示负分数的点(如图 5(右))。将由单位“1”运动得到点表示的数都称为整数, 将由分数单位运动得到的点都称为分数。注意到: 将单位“1”进行“一等分”时, 可以将“1”写为“ $\frac{1}{1}$ ”的形式。所有的整数 Z, 都可以写成“ $\frac{1}{Z}$ ”的形式。将可以写形式的数称为有理数。因此有理数的单位也是“1”(如图 6)。

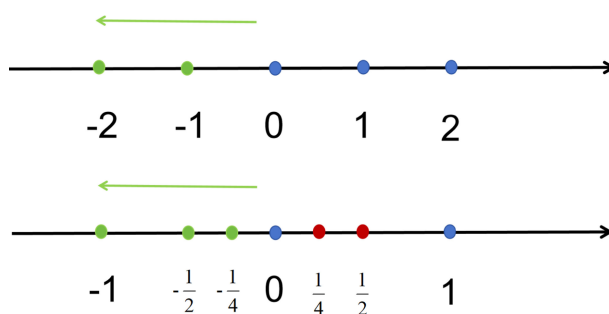


Figure 5. The Movement of Fractional Units

图 5. 分数单位的运动

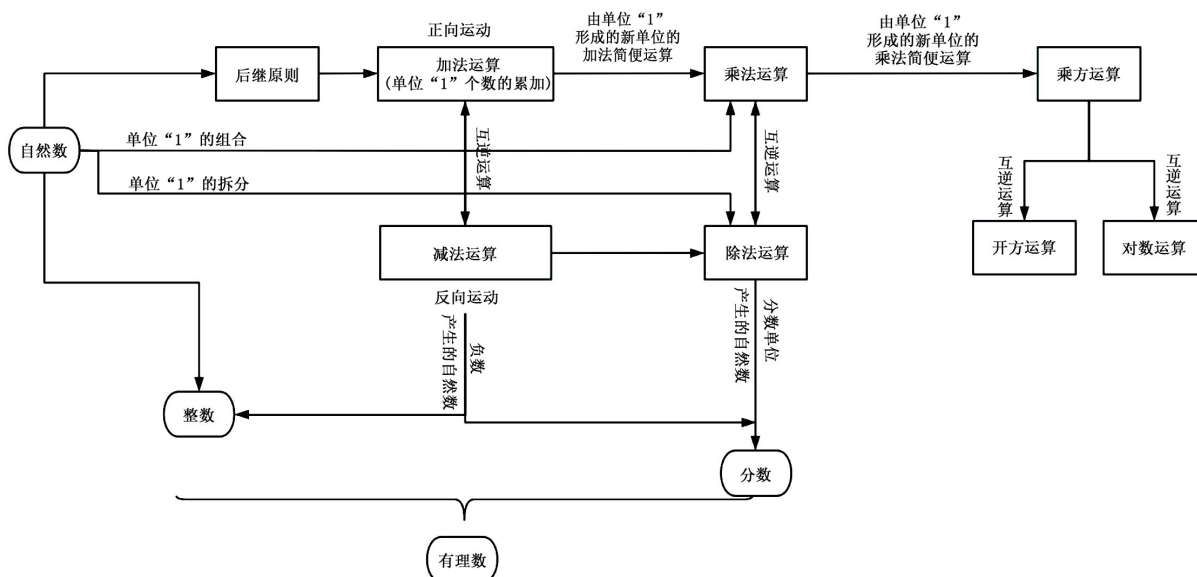


Figure 6. The Origin of Rational Numbers

图 6. 有理数的产生

分数在数系扩张中是基于除法运算的自然性而产生的。分数中的分数线可以看作是除号分子是被除数, 分母是除数。将分数归入十进制中, 那么就可以得到对应的数位。依次类推, 可以得到 X 进制的小数数位(如表 3)。

Table 3. The relationship between any base and digits
表 3. X 进制与数位的关系

	第 n 个 数位	第(n-1)个 数位	...	第三个 数位	第二个 数位	第一个 数位	小 数 点	第一个 数位	第二个 数位	第三个 数位	...	第(n-1)个 数位	第 n 个 数位
十进制	10^{n-1}	10^{n-2}	...	10^2	10^1	$10^0=1$	.	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	...	$10^{-(n-1)}$	10^{-n}
二进制	2^{n-1}	2^{n-2}	...	2^2	2^1	$2^0=1$	.	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	...	$2^{-(n-1)}$	2^{-n}
八进制	8^{n-1}	8^{n-2}	...	8^2	8^1	$8^0=1$	.	8^{-1}	8^{-2}	8^{-3}	...	$8^{-(n-1)}$	8^{-n}
十六进制	16^{n-1}	16^{n-2}	...	16^2	16^1	$16^0=1$	.	16^{-1}	16^{-2}	16^{-3}	...	$16^{-(n-1)}$	16^{-n}
X 进制	X^{n-1}	X^{n-2}	...	X^2	X^1	$X^0=1$	.	X^{-1}	X^{-2}	X^{-3}	...	$X^{-(n-1)}$	X^{-n}

将分数转化为整数的除法运算时，按照除法法则，当除以 q 时，可得到余数 p 。余数只能取 $1, 2, 3, \dots, (p-1)$ ，因此，结果有两种情况：① 有一个余数 r 为 0 ，得到商是整数或有限小数；② 余数 r 均不为 0 ，则相除 p 次后，必定会出现余数相同的情况，余数相同则接下来商的结果必相同，于是就得到了无限循环小数。所以将分数转化为整数除法运算得到的结果——整数、有限小数和无限循环小数也称为有理数。

2.3. 认识无理数单位

在认识到小数数位和无限循环小数之后，很容易构造出无限不循环小数。小数数位是将单位“1”进行拆分得来的。在理想情况下，每一个无限不循环小数总能找到一条线段与之对应。

数学中将无限不循环小数又叫做无理数。常见的无理数有非完全平方数的平方根、 π 等[4]。怎样找到一条长度为 π 的线段？如图 7，直径为 1 个单位长度的圆从原点沿数轴向右滚动一周圆上的一点由原点 O 到达 O' ，则 $OO' = \pi \cdot 1 = \pi$ 。因此，可以理解为无理数 π 的单位为“1”。

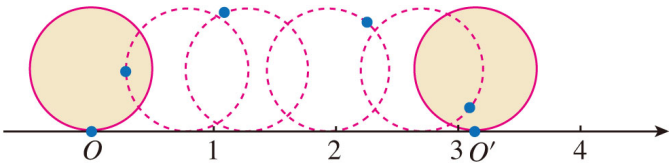


Figure 7. The number π is represented on the number line
图 7. π 在数轴上表示

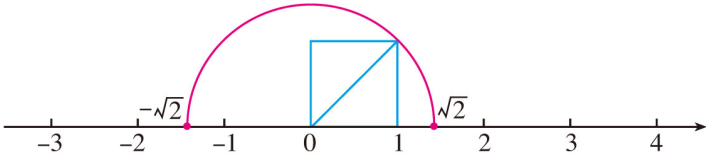


Figure 8. The arithmetic square root is represented on the number line
图 8. 算术平方根在数轴上表示

无理数在数系扩张中是基于开方运算的自然性而产生的。通过数形结合，运用勾股定理，在两条直角边都为 1 的直角三角形中，可以找到长度为 $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ 的线段。同理可以找到 $\sqrt{3} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2}$ ，依次类推可以找到 $\sqrt{n} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{n-1})^2} (n \in N^*)$ （如图 8）。因此，可以理解为无理数非完全平方数的平方根

的单位为“1”。

3. 认识实数单位的意义

3.1. 对数的概念理解的一致性

构建和谐、统一、连续的实数系，是可微和可积的可实现性的理论基础，也是学科理论横向与纵深发展的关键。《义务教育数学课程标准(2022 年版)》指出学生要理解数与数量的关系，经历数与数量关系的探究过程，要从本质上感悟数概念的一致性，发展数感和符号意识[5]。以单位“1”为线索，将数的认识和数系扩张的知识串连在一起(如图9)。通过数轴的动态生成过程，让学生更为直观的感受到的数的概念的一致性。

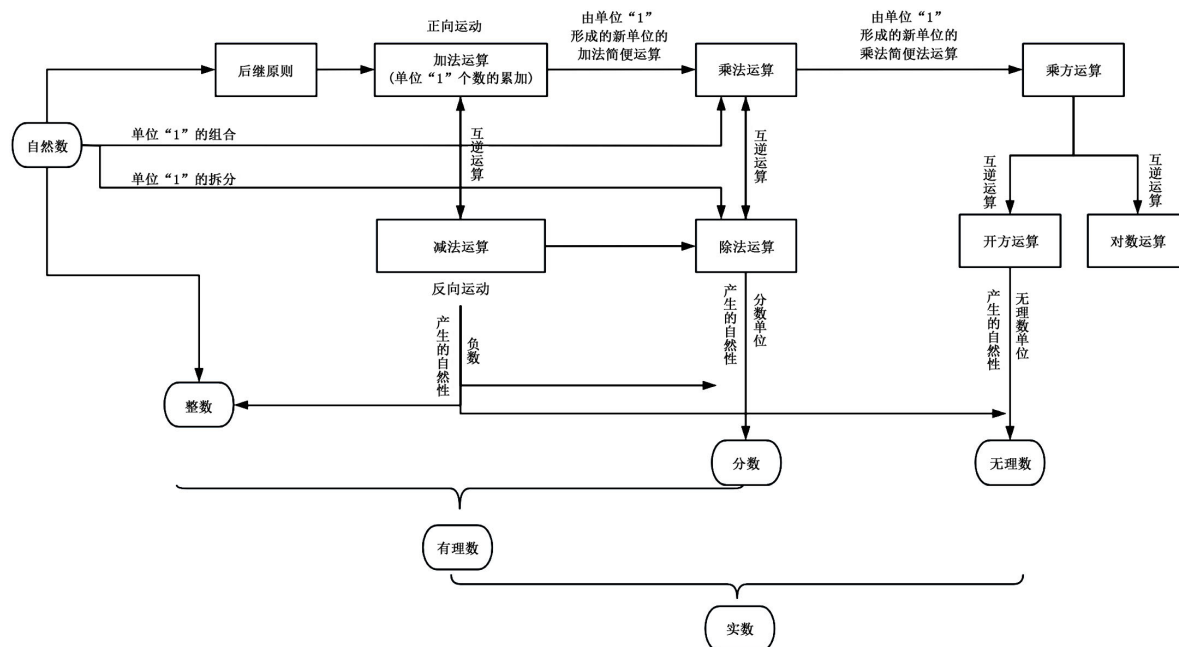


Figure 9. The emergence of real numbers

图9. 实数的产生

在数学的教与学中，如果我们从实数单位“1”的视角切入中小学数学的学习，很多困难的问题都可以迎刃而解。在小学初学数的概念时，将自然数中的后继原则渗透在教学中，可以让学生更好地理解自然数的加法。对于分数问题中单位“1”的理解，一直是小学分数教学的难点。将单位“1”与一段线段的整体相对应，在数轴上感受分数的形成，有助于学生理解整体与部分之间的关系。

数轴是学生将“数”与“形”进行转换的重要工具，通过数轴可以借助“形”来直观理解和解决问题。在初中学习数轴的相关知识时，学生需要学会数轴的三要素。但是直接给学生给出数轴的概念，其教学效果收效甚微。很多同学对于理解单位长度这一概念比较困难，更容易混淆相反数、绝对值等概念[6]。从单位“1”入手，带领学生共同感受有理数的生成，不仅可以让学生直观感受到“引入负数使数进行第一次扩张”，还可以通过线段的运动让学生更加深刻地理解单位长度、绝对值、相反数等概念。

3.2. 对数与式运算理解的一致性

自然数的加减运算是在自然数单位“1”的基础上进行的。分数的加减运算，是对分数单位进行运算。

异分母分数的加减首先要换为同分母(同单位),才能进一步进行计算。在有理数的加减运算中,可以先进行同类型的数的运算,之后再将不同类型的数转为同类型,进行计算。关于无理数的运算,对于 π 和 $\sqrt{2}$ 来说,它们都是无理数中的单位。但是作为无限不循环小数来说,它们不能进一步的合并。无理数运算的结果最终都只能写成 $a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3+\cdots(a\in Q)$,其中 A 是无理数单位。

运算单位是代数中建立各种运算法则的基础[7]。数量到数字是第一层次的抽象,用字母符号表示数实现了第二层次的抽象[5]。因为,不同的字母表示不同的数。所以,不同字母都是由实数单位“1”生成的新单位。

数式的概念是从诸多例证中抽象出本质属性而获得的,是一个抽象与归纳的过程。用字母表示数使得代数式的运算与数的运算具有一致性[7]。在进行代数式的运算时,同样需要找到代数式运算的单位。只有相同的单位才可以进行加减,所以在进行代数运算时,定义了新概念“同类项”——所含字母相同,并且相同字母的指数也相同的项。

故代数式的运算建立在数的运算的基础之上,数的运算是代数式运算的特殊情况,而代数式的运算更加具有一般性。

4. 小结

本文从“实数单位”是什么的问题出发,通过数的概念的历史发展分析得到,应该先研究“自然数的单位是什么”。之后通过单位线段 OA 在 OA 延长线上的运动,一步一步得到表示自然数集合的点。

“1”是自然数的单位,也是自然数的基础单位,则可以产生一个以“1”为基本单位的“量纲”。在对自然数单位“1”的组合与拆分的过程中,进一步加深了对进位制的理解,并且通过对“1”的等分得到了分数单位。通过对整数和分数的形式统一,得到了有理数的概念。以0为分界点,正数与负数是一对具有相反意义的量。因此,可以在 OA 线段的反向延长线上,使单位线段做反向运动可以得到表示负有理数的点。之后,通过小数数位的分析,得到在 OA 线段所在的直线上,每一个无限不循环小数总能找到一条线段与之对应。因此得到,无理数的单位也是“1”。最终,得到实数的单位为“1”。以实数单位“1”这样一个新的视角来串连数的认识与数系扩张,可以加深对数与式运算一致性的理解。

参考文献

- [1] 人民教育出版社,课程教材研究所,中学数学课程教材研究开发中心. 普通高中教科书(A版): 数学(必修第二册) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2019.
- [2] 李慎安. 量和单位规范化使用问答[M]. 北京: 机械工业出版社, 2006, 1.
- [3] 刘瑞祥. 数字趣谈: 道生一, 一生二[J]. 百科知识, 2022(14): 21-23.
- [4] 人民教育出版社,课程教材研究所,中学数学课程教材研究开发中心. 义务教育教科书: 数学(七年级上册) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2024.
- [5] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2022年版) [M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022.
- [6] 祁齐斌. 有理数中几个易混淆的概念[J]. 中学课程辅导(七年级), 2005(8): 25-26.
- [7] 章建跃. 核心素养导向的初中数学教学变革——以“数与式”为例[J]. 中学数学教学参考, 2023(2): 2-5+21.