

图的积和多项式与匹配多项式的关系

张文伟

青海民族大学数学与统计学院, 青海 西宁

收稿日期: 2025年3月3日; 录用日期: 2025年4月16日; 发布日期: 2025年4月29日

摘 要

令 G 是一个简单图, $A(G)$ 为图 G 的邻接矩阵. 那么矩阵 $A(G)$ 的永久和记为 $PS(A(G))$, 矩阵 $A(G)$ 的积和多项式记为 $\text{per}(xI - A(G))$. 在本文中, 我们利用匹配多项式及其补图之间的相互关系, 证明了图的积和多项式与其补图匹配多项式之间的关系; 并且通过这个我们推导出了几乎完全图的永久和与其补图匹配数之间的具体关系.

关键词

补图, 积和多项式, 匹配多项式

The Relationship between the Permanental Polynomial and the Matching Polynomial of Graphs

Wenwei Zhang

School of Mathematics and Statistics, Qinghai Minzu University, Xining Qinghai

Received: Mar. 3rd, 2025; accepted: Apr. 16th, 2025; published: Apr. 29th, 2025

Abstract

Let G be a simple graph, and $A(G)$ be the adjacency matrix of graph G . The permanent sum of matrix $A(G)$ is denoted as $PS(A(G))$, and the permanental polynomial of matrix $A(G)$ is denoted as $\text{per}(xI - A(G))$. In this paper, we utilize the interrelation between the matching polynomial and its complement graph to demonstrate the relationship between the permanental polynomial of a graph and the matching polynomial of its complement graph. Furthermore, through this approach, we deduce the specific relationship between the permanent sum of already complete graphs and the matching number of their complement graphs.

Keywords

Complement Graph, Permanental Polynomial, Matching Polynomial

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

令 G 是顶点集为 $V(G)$ 且边集为 $E(G)$ 的 n 个顶点 m 条边的简单图. 图 G 的顶点数目为其阶数, 记为 $|G|$. 对于图 G 的点导出子图 H , 令 $G - E(H)$ 是子图 G 删除图 H 的边后得到的子图, 令 $G - V(H)$ 是图 G 删除子图 H 的点以及点相关的边后得到的子图.

那么图 G 的邻接矩阵 $A(G) = (a_{ij})_{n \times n}$ 定义为:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in E; \\ 0, & \text{否则.} \end{cases}$$

将图 G 的补图记为 $\overline{G} = (\overline{V}, \overline{E})$, 且满足:

$$\overline{V} = V, \quad \overline{E} = E(K_n) \setminus E = \{(v_i, v_j) \in V \times V \mid v_i \neq v_j \text{ 且 } (v_i, v_j) \notin E\}$$

其中 K_n 表示以 V 为顶点集的完全图, 满足 $|E(K_n)| = \binom{n}{2}$. 称图 G 为 (n, k) -几乎完全图(简称几乎完全图), 当且仅当其满足以下条件:

$$\begin{aligned} |V| &= n \\ |E| &= \binom{n}{2} - k \quad (0 \leq k \leq \binom{n}{2}) \\ \exists S \subseteq E(K_n), |S| &= k, \text{ 使得 } E = E(K_n) \setminus S \end{aligned}$$

此时参数 k 称为该图的边亏缺度, 且其补图 $\bar{G}$ 满足 $|E(\bar{G})| = k$. 图 G 的一个 k -匹配是指 k 条无公共顶点的边的集合, 且图 G 中 k -匹配的个数记为 $\Phi_k(G)$.

对于图 G 的一个 k -匹配 M , 如果图 G 没有 $v(G)$ -匹配满足 $v(G) > k$, 则 M 被称为图 G 的一个最大匹配. 最大匹配 M 中边的数目 $\nu(G)$ 称为图 G 的最大匹配数. 我们定义图 G 的匹配多项式为

$$\alpha(G, x) = \sum_{k=0}^{\nu(G)} (-1)^k \Phi_k(G) x^{n-2k},$$

其中 Φ_k 表示 G 中 k 条不相交边构成的匹配数量. 通过移除符号因子 $(-1)^k$, 我们称

$$m(G, x) = \sum_{k=0}^{\nu(G)} \Phi_k(G) x^{n-2k},$$

为无符号匹配多项式.

设 $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ 为 n 阶复矩阵, 其积和式(permanent)定义为:

$$\text{per}(B) := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^n b_{i, \sigma(i)}$$

其中:

- $\mathfrak{S}_n$ 表示 n 元对称群, 即所有从 $\{1, \dots, n\}$ 到自身的双射映射 (置换) 构成的群
- 求和遍历 $\mathfrak{S}_n$ 的 $n!$ 个元素, 每个置换 σ 对应乘积项 $\prod_{i=1}^n b_{i, \sigma(i)}$
- 与行列式不同, 积和式不包含置换的符号函数 $\text{sgn}(\sigma)$, 即 $\text{per}(B) = \det(B) \big|_{\text{sgn}(\sigma) \equiv 1}$

积和式的定义类似于行列式. 但是又与行列式有着很大的区别. Valiant [1] 已经指出对于 $(0, 1)$ 矩阵, 计算其积和式是 #P 完全的. $(0, 1)$ -矩阵的积和式在完美匹配的计数、非定点排列的个数、Gyires 模型中的概率估计、Monomer-Dimer 常数的计算等问题中有着重要的应用. 例如, 在 [2] 中, 积和式可以用于计算二部图完美匹配的数目以及有向图的线性子图数目. 对于更多的积和式研究, 见 [3].

令 $A(G)$ 是图 G 的 n 阶邻接矩阵, 并且 I 为单位矩阵. 则 G 的积和多项式定义为

$$\pi(G, x) = \text{per}(xI - A(G)) = \sum_{i=0}^n b_i(G) x^{n-i},$$

其中 $b_0(G) = 1$ 。通过将邻接矩阵的符号反转, 我们称

$$\varphi(G, x) = \text{per}(xI + A(G)) = \sum_{i=0}^n c_i(G)x^{n-i},$$

为无符号积和多项式。

积和多项式作为积和式的衍生物, 是图论研究的一个自然工具, 在数学和化学中由Merris等 [4]和Kasum等 [5]分别提出。由于积和式的计算是#P-完全问题, 致使积和多项式的计算非常困难。自然想到借助特征多项式的性质来研究积和多项式。Merris等 [4]和Kasum等 [5]借助特征多项式的Sachs定理给出了计算积和多项式系数的Sachs-型公式。Borowiecki 和Józwiak [6] 给出了积和多项式的递推公式。图的积和多项式在数学 [4]受到关注, 与此同时它在化学 [5]中也有着应用。而对于积和多项式的研究还是比较少的。这可能一部分原因归结为计算积和多项式是比较困难的。在近几年, 对积和多项式的研究取得了一些进展, 见 [7] [8]等。

尽管匹配多项式在图的谱理论及化学图论中已有较为成熟的研究体系, 其与积和多项式之间的代数关联性在现有文献中尚未得到系统性探讨。特别是在结构图论框架下, 两类多项式在互补图操作下的对偶性质、系数渐近行为以及组合不变量之间的对应关系, 仍缺乏普适性的理论刻画。值得注意的是, 现有成果多集中于单一多项式在特定图类上的性质分析, 而忽略了两类生成函数在算子作用下的协同演化规律。本文聚焦于这一交叉领域的理论空缺, 通过构建图的积和多项式与其补图匹配多项式的关系, 为复杂网络的不变量分析提供新的代数工具。

本文剩下章节安排如下。在第二部分, 我们首先给出了一些必要的定义以及引理。在第三部分, 我们证明了图的积和多项式与其补图匹配多项式之间的关系。在第四部分, 推导出了几乎完全图的永久和与其补图匹配之间的具体关系。最后, 我们对本篇文章进行了一个简要的总结。

2. 预备知识

定义2.1 若 ζ_i 是图 G 一个 i 个顶点的Sachs子图, 那么 ζ_i 的每一个分支为孤立边或者不交圈。

定义2.2 令 G 是 n 个顶点的简单图。那么图 G 的永久和

$$PS(G) = \sum_{k=0}^n |b_k(G)| = 1 + \sum_{k=1}^n \sum_{H \in \zeta(G)} 2^{c(H)}.$$

其中 $\zeta(G)$ 表示图 G 所有Sachs子图, $c(H)$ 表示 H 中圈的数目。

引理2.3 [9] 令 G 是 n 个顶点的简单图。 $\varphi(G, x)$ 和 $m(G, x)$ 的定义如上, 那么

$$\varphi(G, x) = m(G, x) + \sum_{H \in \zeta} 2^{c(H)} m(G - H, x).$$

其中 ζ 是最少包含一个圈的sachs子图的集合。

引理2.4 [10] 令 G 是 n 个顶点的简单图, 那么它与它的补图 $\bar{G}$ 的匹配数相互联系:

$$\Phi_r(G) = \sum_{v=0}^r (-1)^v \Phi_v(\bar{G}) \binom{n-2v}{2r-2v} (2r-2v-1)!! \quad ((-1)!! = 1).$$

引理2.5 [11] 对任何简单图 G , 有

$$\alpha(G, x) = \sum_{k=0}^n \Phi_{\frac{n-k}{2}}(\bar{G}) \alpha(K_k, x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \Phi_k(\bar{G}) \alpha(K_{n-2k}, x).$$

3. 图的积和多项式与其补图匹配多项式的关系

定理3.1 令 G 是 n 个顶点的简单图. $\pi(G, x)$ 和 $\alpha(G, x)$ 分别是图 G 的积和多项式与匹配多项式, 那么

$$\pi(G, x) = \alpha(G, x) + \sum_{H \in \zeta} (-1)^{|H|} 2^{c(H)} \alpha(G - H, x).$$

其中 ζ 是最少包含一个圈的sachs子图的集合, $|H|$ 表示子图 H 的顶点数, $c(H)$ 表示 H 中不交圈的数目.

证明: 由 [4], 我们知道积和多项式的系数 $b_i(G) = (-1)^i \sum_{\zeta_i \subset G} 2^{c(\zeta_i)}$. 令 ζ_i^m 表示 i 个顶点只含孤立边的sachs子图, ζ_i 表示 i 个顶点最少包含一个圈的sachs子图的集合. 那么由积和多项式系数的定义, 以及定义2.1,

$$\begin{aligned} b_i(G) &= (-1)^i \sum_{\zeta_i \subset G} 2^{c(\zeta_i)} \\ &= (-1)^i \sum_{\zeta_i^m \subset G} 2^{c(\zeta_i^m)} + (-1)^i \sum_{\zeta_i \subset G} 2^{c(\zeta_i)}. \end{aligned}$$

值得注意的是, 由于 ζ_i^m 内只含孤立边, 那么顶点数目只能为偶数, 所以当 i 为奇数时, ζ_i^m 为空图. 则积和多项式

$$\begin{aligned} \pi(G, x) &= (-1)^i \sum_{\zeta_i \subset G} 2^{c(\zeta_i)} x^{n-i} \\ &= (-1)^i \sum_{\zeta_i^m \subset G} 2^{c(\zeta_i^m)} x^{n-i} + (-1)^i \sum_{\zeta_i \subset G} 2^{c(\zeta_i)} x^{n-i} \\ &= (-1)^i \sum_{\zeta_i^m \subset G} 2^0 x^{n-i} + (-1)^i \sum_{\zeta_i \subset G} 2^{c(\zeta_i)} x^{n-i} \\ &= \alpha(G, x) + \sum_{H \in \zeta} (-1)^{|H|} 2^{c(H)} \alpha(G - H, x). \end{aligned}$$

证毕.

基于定理3.1建立的积和多项式 $\pi(G, x)$ 与匹配多项式 $\alpha(G, x)$ 的显式关系。通过引理2.5, 我们进一步分析图 G 的匹配多项式在补图 $\bar{G}$ 中的表现特性, 并且引入完全图 K_n 的匹配多项式作为基准函数, 可推导出以下定理。

定理3.2 令 G 是 n 个顶点的简单图, 那么它的积和多项式 $\pi(G, x)$ 与其补图匹配数 $\Phi_r(\bar{G})$ 和完全图匹配多项式 $\alpha(K_{n-2r}, x)$ 的关系如下:

$$\pi(G, x) = \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \Phi_r(\bar{G}) \alpha(K_{n-2r}, x) + \sum_{H \in \zeta} \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n-h}{2} \rfloor} (-1)^{|H|} 2^{c(H)} \Phi_r(\overline{G-H}) \alpha(K_{n-|H|-2r}, x).$$

证明: 由定理3.1可知,

$$\pi(G, x) = \alpha(G, x) + \sum_{H \in \zeta} (-1)^{|H|} 2^{c(H)} \alpha(G-H, x).$$

再利用引理2.5, 带入图 G 的匹配多项式与其补图匹配数和完全图匹配多项式之间的关系, 那么

$$\begin{aligned} \pi(G, x) &= \alpha(G, x) + \sum_{H \in \zeta} (-1)^{|H|} 2^{c(H)} \alpha(G-H, x) \\ &= \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \Phi_r(\bar{G}) \alpha(K_{n-2r}, x) + \sum_{H \in \zeta} (-1)^{|H|} 2^{c(H)} \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n-h}{2} \rfloor} \Phi_r(\overline{G-H}) \alpha(K_{n-|H|-2r}, x). \\ &= \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \Phi_r(\bar{G}) \alpha(K_{n-2r}, x) + \sum_{H \in \zeta} \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n-h}{2} \rfloor} (-1)^{|H|} 2^{c(H)} \Phi_r(\overline{G-H}) \alpha(K_{n-|H|-2r}, x). \end{aligned}$$

证毕.

由图 G 的匹配多项式以及无符号匹配多项式的定义, 不难发现, 图 G 的匹配多项式以及无符号匹配多项式只差一个符号因子 $(-1)^r$, 那么由定理3.2 可得出以下结果。

推论3.3 G 是一个 n 阶简单图, 那么它的无符号积和多项式 $\varphi(G, x)$ 与其补图匹配数 $\Phi_r(\bar{G})$ 和完全图无符号匹配多项式 $m(K_{n-2r}, x)$ 的关系如下:

$$\begin{aligned} \varphi(G, x) &= \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^r \Phi_r(\bar{G}) m(K_{n-2r}, x) + \sum_{H \in \zeta} \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n-h}{2} \rfloor} (-1)^{r+|H|} 2^{c(H)} \Phi_r(\overline{G-H}) m(K_{n-|H|-2r}, x). \end{aligned}$$

定理3.4 G 是一个 n 阶简单图, 那么它的无符号积和多项式系数与其补图无符号匹配多项式的系数关系如下:

$$c_i(G) = \sum_{v=0}^r (-1)^v \Phi_v(\bar{G}) \binom{n-2v}{2r-2v} (2r-2v-1)!!$$

$$+ \sum_{H_{i-2j} \in \zeta_{i-2j}} \sum_{j=0}^k \sum_{v=0}^j (-1)^v 2^{c(H_{i-2j})} \Phi_v(\overline{G - H_{i-2j}}) \binom{n-i+2j-2v}{2j-2v} (2j-2v-1)!!.$$

其中 $r = \lfloor \frac{i}{2} \rfloor$, $k = \lfloor \frac{i-3}{2} \rfloor$.

证明: 令 ζ_i^m 表示 i 个顶点只含孤立边的sachs子图, ζ_i 表示 i 个顶点最少包含一个圈的sachs子图的集合. 由无符号积和多项式的定义, 它的系数

$$\begin{aligned} c_i(G) &= \sum_{\zeta_i \subset G} 2^{c(\zeta_i)} \\ &= \sum_{\zeta_i^m \subset G} 2^{c(\zeta_i^m)} + \sum_{\zeta_i \subset G} 2^{c(\zeta_i)}. \\ &= c'_i + c''_i \end{aligned}$$

其中 $c'_i = \sum_{\zeta_i^m \subset G} 2^{c(\zeta_i^m)}$, $c''_i = \sum_{\zeta_i \subset G} 2^{c(\zeta_i)}$. 由引理2.4, 很容易推出 $c'_i = \sum_{v=0}^r (-1)^v \Phi_v(\bar{G}) \binom{n-2v}{2r-2v} (2r-2v-1)!!$. 现考虑 c''_i , 根据引理2.3, 带入展开可得,

$$\begin{aligned} c''_i &= \sum_{H_i \in \zeta_i} 2^{c(H_i)} \Phi_0(G - H_i) - \sum_{H_{i-2} \in \zeta_{i-2}} 2^{c(H_{i-2})} \Phi_1(G - H_{i-2}) \\ &+ \sum_{H_{i-4} \in \zeta_{i-4}} 2^{c(H_{i-4})} \Phi_2(G - H_{i-4}) + \dots + \sum_{H_{i-2j} \in \zeta_{i-2j}} (-1)^j 2^{c(H_{i-2j})} \Phi_j(G - H_{i-2j}) \\ &= \sum_{H_{i-2j} \in \zeta_{i-2j}} \sum_{j=0}^k (-1)^j 2^{c(H_{i-2j})} \Phi_j(G - H_{i-2j}) \\ &= \sum_{H_{i-2j} \in \zeta_{i-2j}} \sum_{j=0}^k \sum_{v=0}^j (-1)^v 2^{c(H_{i-2j})} \Phi_v(\overline{G - H_{i-2j}}) \binom{n-i+2j-2v}{2j-2v} (2j-2v-1)!! \end{aligned}$$

因为 ζ 至少含有一个圈, 所以 k 取到 $k = \lfloor \frac{i-3}{2} \rfloor$.

4. 几乎完全图的永久和与其补图匹配数的关系

令 ξ_n^m 和 H_n^m 分别表示阶数为 n 且边数为 m 的图与其补图的集合, 满足条件 $n \geq 2m$. 在图 1 中, 我们罗列了当 $n \geq 6$ 时, ξ_n^1 和 ξ_n^2 所有不同构的图. 而吴廷增等 [12] 已经比较这三个图的补图的永久和大小: $PS(H_{10}) > PS(H_{21}) > PS(H_{20})$; 我们将几乎完全正则图的永久和转换成其补图匹配数, 同样能说明以上结论, 在说明几乎完全图的永久和与其补图匹配数的关系之前, 我们先给出以下定理:

下面我们通过对定理3.4的应用, 推出以下定理来说明有关 ξ_n^1 和 ξ_n^2 的几乎完全图的永久和与其补图匹配数的关系.

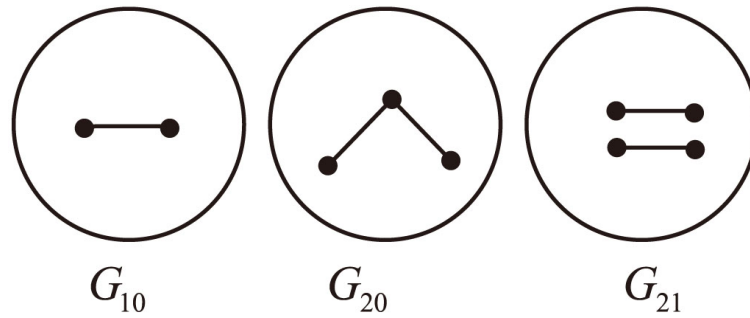


Figure 1. ***

图 1. K_n 删除1~2条边的所有子图

定理4.1 H_n^1 是 ξ_n^1 的补图，那么它的永久和与其补图匹配数关系如下：

$$\begin{aligned}
 PS(H_n^1) &= \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2r} (2r-1)!! - \binom{n-2}{2r-2} (2r-3)!! \\
 &+ \sum_{j=0}^k \sum_{H_{i-2j} \in \zeta_{i-2j}} 2^{c(H_{i-2j})} \binom{n-i+2j}{2j} (2r-1)!! - 2^{c(H_{i-2j-2})} \binom{n-i+2j-2}{2j-2} (2r-3)!!
 \end{aligned}$$

其中 H_{i-2j} 表示图 K_{n-2} 中 $i-2j$ 个顶点的圈， $c(H_{i-2j})$ 表示图 K_{n-2} 中 $i-2j$ 个顶点的圈个数。

证明： ξ_n^1 只有1-匹配(0-匹配约定为1)，所以前半部分由定理3.4易得.现考虑后半部分：

由于匹配 $\overline{G - H_{i-2j}}$ 是 G 先减一个圈 H_{i-2j} ，再由它的补计算匹配，那么，我们只需考虑 $\overline{G - H_{i-2j}}$ 存在匹配的情况，注意到当圈 H_{i-2j} 取到 ξ_n^1 中那条孤立边的任一点或者两个端点都取的时候， $\overline{G - H_{i-2j}}$ 全是孤立点，则后半部分等于0；所以我们只需考虑当圈 H_{i-2j} 取不到 ξ_n^1 中那条孤立边的任一点时的情况，即只能在 K_{n-2} 中；应用定理3.4将 $v=0, 1$ 带入，那么定理得证。

类似地，我们可以证明推论4.2.

推论4.2 H_n^2 是 ξ_n^2 的补图，那么它的永久和与其补图匹配数关系如下：

$$PS(H_n^2) = \begin{cases} \text{当 } \xi_n^2 = G_{20} \text{ 时 :} \\ \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2r} (2r-1)!! - 2 \binom{n-2}{2r-2} (2r-3)!! \\ + \sum_{j=0}^k \sum_{H_{i-2j} \in \zeta_{i-2j}} 3 * 2^{c(H_{i-2j})} \binom{n-i+2j}{2j} (2r-1)!! - 4 * 2^{c(H_{i-2j-2})} \binom{n-i+2j-2}{2j-2} (2r-3)!! \\ \text{当 } \xi_n^2 = G_{21} \text{ 时 :} \\ \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2r} (2r-1)!! - 2 \binom{n-2}{2r-2} (2r-3)!! + \binom{n-4}{2r-4} (2r-5)!! \\ + \sum_{j=0}^k \sum_{H_{i-2j} \in \zeta_{i-2j}} 7 * 2^{c(H_{i-2j})} \binom{n-i+2j}{2j} (2r-1)!! - 8 * 2^{c(H_{i-2j-2})} \binom{n-i+2j-2}{2j-2} (2r-3)!! \\ + 2^{c(H_{i-2j-4})} \binom{n-i+2j-4}{2j-4} (2j-5)!! \end{cases}$$

证明： ξ_n^2 只有1-匹配与2-匹配(0-匹配约定为1)，所以前半部分由定理3.4易得.现考虑后半部分：

由于匹配 $\overline{G - H_{i-2j}}$ 是 G 先减一个圈 H_{i-2j} ，再由它的补计算匹配，当 $\xi_n^2 = G_{20}$ 时，那么，我们

只需考虑 $\overline{G - H_{i-2j}}$ 存在匹配的情况, 注意到当圈 H_{i-2j} 取到 G_{20} 的中间点或者三个端点都取的时候, $\overline{G - H_{i-2j}}$ 全是孤立点, 则后半部分等于0; 所以我们只需考虑当圈 H_{i-2j} 取不到 G_{20} 的中间点或者三个端点都取的情况: 当取不到 G_{20} 的中间点时, $\overline{G - H_{i-2j}}$ 只能含有一条孤立边(有两种一样的情况), 那么此时后半部分等于 $\sum_{j=0}^k \sum_{H_{i-2j} \in \zeta_{i-2j}} 2 * 2^{c(H_{i-2j})} \binom{n-i+2j}{2j} (2r-1)!! - 2 * 2^{c(H_{i-2j-2})} \binom{n-i+2j}{2j-2} (2r-3)!!$; 当都取不到 G_{20} 的三个点时, $\overline{G - H_{i-2j}}$ 只能含有 G_{20} 本身, 此时后半部分等于 $\sum_{j=0}^k \sum_{H_{i-2j} \in \zeta_{i-2j}} 2^{c(H_{i-2j})} \binom{n-i+2j}{2j} (2r-1)!! - 2 * 2^{c(H_{i-2j-2})} \binom{n-i+2j}{2j-2} (2r-3)!!$; 应用定理3.4将 $v = 0, 1$ 带入, 当 $\xi_n^2 = G_{20}$ 时, 定理得证。

当 $\xi_n^2 = G_{21}$ 时, 同理可得.

5. 小结

本文主要研究图的积和多项式与匹配多项式之间的内在联系。我们发现, 通过分析原图及其补图的匹配多项式特性, 能够推导出积和多项式的具体表达式。特别对于接近完全图的特殊图类, 这种关系呈现出简洁的数学规律。虽然理论上建立了这两类多项式的转换公式, 但其在实际问题中的直接应用仍存在局限。例如, 在复杂网络分析或组合优化问题中, 如何利用这种多项式关系提升计算效率或简化证明过程, 还需要更多探索。这项研究为图多项式理论提供了新的工具, 但其潜在价值有待后续研究进一步发掘。

基金项目

青海民族大学创新项目《图的拉普拉斯矩阵immanant若干问题研究》。项目编号: 07M2024003.

参考文献

- [1] Valiant, L.G. (1979) The Complexity of Computing the Permanent. *Theoretical Computer Science*, **8**, 189-201. [https://doi.org/10.1016/0304-3975\(79\)90044-6](https://doi.org/10.1016/0304-3975(79)90044-6)
- [2] Harary, F. (1969) Determinants, Permanents and Bipartite Graphs. *Mathematics Magazine*, **42**, 146-148. <https://doi.org/10.1080/0025570x.1969.11975950>
- [3] Minc, H. (1978) Permanents. Addison-Wesley.
- [4] Merris, R., Rebman, K.R. and Watkins, W. (1981) Permanental Polynomials of Graphs. *Linear Algebra and its Applications*, **38**, 273-288. [https://doi.org/10.1016/0024-3795\(81\)90026-4](https://doi.org/10.1016/0024-3795(81)90026-4)
- [5] Kasum, D., Trinajsti, N. and Gutman, I. (1981) Chemical Graph Theory. III. On the Permanental Polynomial. *Croatica Chemica Acta*, **54**, 321-328.
- [6] Borowiecki, M. and Jóźwiak, T. (1982) Computing the Permanental Polynomial of a Multigraph. *Discussiones Mathematicae*, **5**, 9-16.
- [7] Wu, T. and Zhang, H. (2015) Some Analytical Properties of the Permanental Polynomial of a Graph. *Ars Combinatoria*, **CXIII**, 261-267.

- [8] Chou, Q., Liang, H. and Bai, F. (2015) Computing the Permanental Polynomial of the High Level Fullerene C_{70} with High Precision. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, **73**, 327-336.
- [9] Li, W. (2021) On the Matching and Permanental Polynomials of Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **302**, 16-23. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2021.05.030>
- [10] Lovász, L. (2007) Combinatorial Problems and Exercises. Vol. 361, American Mathematical Society. <https://doi.org/10.1090/chel/361>
- [11] 马海成. 图的匹配多项式及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2019: 12.
- [12] Wu, T. and So, W. (2021) Permanental Sums of Graphs of Extreme Sizes. *Discrete Mathematics*, **344**, 112353. Article <https://doi.org/10.1016/j.disc.2021.112353>