

小顶点树的拉普拉斯积和式及比率

王秀红

青海民族大学数学与统计学院, 青海 西宁

收稿日期: 2025年3月4日; 录用日期: 2025年4月16日; 发布日期: 2025年4月29日

摘要

对于一个图 G , 若其连通且无圈, 我们就称 G 是一棵树, 记为 T 。本文计算小顶点树的拉普拉斯矩阵积和式以及拉普拉斯比率, 并且得到一些限定参数的大小的结果。

关键词

拉普拉斯矩阵, 积和式, 拉普拉斯比率

The Laplacian Permanent and Ratio of Small Vertex Trees

Xiuhong Wang

School of Mathematics and Statistics, Qinghai Minzu University, Xining Qinghai

Received: Mar. 4th, 2025; accepted: Apr. 16th, 2025; published: Apr. 29th, 2025

Abstract

For a graph G , if it is connected and acyclic, we call G a tree, denoted as T . In this paper, the permanents of the Laplacian matrices and the Laplacian ratios of small-vertex trees are calculated, and some results on limiting the magnitudes of certain parameters are obtained.

文章引用: 王秀红. 小顶点树的拉普拉斯积和式及比率[J]. 理论数学, 2025, 15(14): 419-429.

DOI: 10.12677/pm.2025.154143

Keywords

Laplacian Matrices, Permanents, Laplacian Ratios

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在本文中我们考虑的图 $G = (V(G), E(G))$ 是一棵树. 令 G 是一个 n 阶图. 图 G 邻接矩阵记为 $A(G) = (a_{ij})_{n \times n}$, 如果在树 T 中顶点 i, j 间存在一条边, 则图 $a_{ij} = 1$; 否则 $a_{ij} = 0$. 树 T 的积和多项式定义为

$$\pi(T, x) = \text{per}(xI - A(T)) = \sum_{i=0}^n b_i(T) x^{n-i},$$

其中 I 是 $n \times n$ 阶单位矩阵, 并且 $\text{per}(B)$ 是矩阵 $B = (b_{ij})_{n \times n}$ 的积和式定义为

$$\text{per}(B) = \sum_{\sigma \in \Lambda_n} \prod_{i=1}^n b_{i\sigma(i)},$$

这里 Λ_n 是 $\{1, 2, \dots, n\}$ 所有置换的集合. Valiant 在 [1] 中证明了即使限定在 $(0,1)$ - 矩阵中, 积和式的计算也是 $\#P$ -完全的. 设 $G = (V(G), E(G))$ 是一个 n 个顶点和 m 条边的简单连通图, d_i 表示 $V(G)$ 中顶点 $v_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的度. 令图 G 的邻接矩阵和度矩阵分别表示为 $A(G)$ 和 $D(G)$. 图 G 的拉普拉斯矩阵记为 $L(G) = D(G) - A(G)$. 图 G 的拉普拉斯矩阵是一个行和与列和都等于 0 的对称矩阵. 令 $G = (V(G), E(G))$ 是顶点 $v_1, v_2, \dots, v_n$ 的度分别为 $d_1, d_2, \dots, d_n$ 的图, 图 G 的拉普拉斯比率定义为

$$\pi(G) = \frac{\text{per} L(G)}{d_1 d_2 \cdots d_n}.$$

拉普拉斯矩阵在研究一个图的复杂性(图的生成树的数目)中起着重要的作用. 对于邻接矩阵不能区分的非同构图, 拉普拉斯矩阵可以很好地区分. Van Dam 和 W. Haemers [2] 表述了围绕图的关联矩阵(广义邻接矩阵). 在研究图的一些性质时, 无符号拉普拉斯矩阵似乎更加方便, [3] [4] 证明了这个观点是正确的. 而且, 用无符号拉普拉斯矩阵的谱研究图的一些性质比用邻接谱更加有效 [5]- [8]. 最后, 无符号拉普拉斯矩阵的集合是一类非负矩阵, 且每个矩阵都具有组合意义. 对于

拉普拉斯矩阵很多学者, 很多学者对于它的谱进行了研究, 他们通过分析拉普拉斯矩阵的特征谱, 研究图的拓扑性质, 比如说图的连通性、社区结构, 图的分割等。

在图的拉普拉斯矩阵的基础上, 许多学者开始研究图的拉普拉斯矩阵积和式. Brualdi 和 Goldwasser [9]给出了树和二部图的拉普拉斯积和式的一些结果: 含有 n 个顶点的树或二部图的拉普拉斯积和式的最小值和最大值. 得到了 $\text{per}L(G)$ 的界. 当 G 是树时, 根据 G 中顶点的度、直径和匹配的大小, 得到了拉普拉斯积和式的最小值. 在此基础上它们提出了三个关于比率的公开问题以待解决:

问题1. ([9]) n 个顶点直径至少为 k 的树拉普拉斯比率的最小值是多少?

问题2. ([9]) n 个顶点具有 k -匹配的树拉普拉斯比率的最小值是多少?

问题3. ([9]) n 个顶点树拉普拉斯比率的极大值是多少? 当直径至多为 k 时? 当匹配至多为 k 时?

同时也提出了关于积和式的三个公开问题:

问题4. ([9]) n 个顶点直径至多为 k 的树拉普拉斯积和式的极大值是多少?

问题5. ([9]) n 个顶点最大匹配为 k 的树拉普拉斯积和式的极大值是多少?

问题6. ([9]) n 个顶点二部划分为 (p, q) 的树拉普拉斯积和式的极大值是多少?

其中, Goldwasser [10] 解决了第二个公开问题, 剩下的问题至今还未被解决, 与拉普拉斯积和式与拉普拉斯比率的最小值相比, 根据图中顶点的度, 直径和匹配的大小求得含有 n 个顶点的树的拉普拉斯积和式的极大值更加困难. 正因为如此, 我们为了解决上述问题, 先用小顶点的树作为例子, 计算其拉普拉斯积和式以及比率, 来预测限定上述参数, 积和式以及比率的极大值可能对应的极图. 本文中的小顶点具体些说就是十个顶点及是十个顶点以下的树, 还包括了十一个顶点的非毛毛虫树。

这篇文章的章节安排如下, 在第二节中我们给出一些定理以及引理, 方便后边引理的计算与证明, 进一步地我们给出10阶及以下的树的拉普拉斯积和式以及比率, 根据结果总结给定参数可能对应的极图的结果, 于此同时验证前人给出的一些结果, 为了尽可能的使上一节预测的结果准确, 我们进一步给出11阶非码农毛毛虫树的积和式结果。

2. 前期准备

在本节中, 我们将介绍一些定义以及需要用到一些引理.

定义2.1. 一个树是 T 星树当且仅当只有一个3度点, 其余的顶点度要么是2 要么是1. 表示为 $T(l_1, l_2, l_3)$. (假设 $l_1 \leq l_2 \leq l_3$). 这里 $l_i (1 \leq i \leq 3)$ 表示3度点连接的路的长.

定义2.2. 一棵树只有一条主链, 其余的点都与主链上的点连接的树称为毛毛虫树。

引理2.3. (拉普拉斯展开定理) 令 $M = (m_{ij}) (i, j = 1, 2, \dots, n)$ 是一个 n 阶方阵. 则

$$\text{per}(M) = m_{k1}\text{per}(M_{k1}) + m_{k2}\text{per}(M_{k2}) + \dots + m_{kn}\text{per}(M_{kn}),$$

其中, $k = 1, 2, \dots, n$, M_{kj} 矩阵 M 的余子式.

引理2.4. ([9])

令 G 是一个图有 n 个顶点. 则

$$\text{per}Q(G) \geq \text{per}L(G)$$

等号成立当且仅当 G 是二部图.

引理2.5. ([9]) 若 T 是一个含有 n 个顶点的树. 则

$$\text{per}L(T) \leq \text{per}L(P_n),$$

等号成立当且仅当 $T = P_n$. 并且有

$$\text{per}L(P_n) = \text{per}Q_{n-1} + \text{per}Q_{n-2}$$

$$\text{per}Q_n = \frac{1}{2}[(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n]$$

这里矩阵 Q_{n-1} 是 $L(P_n)$ 删去悬挂点所在的行与列得到的矩阵.

引理2.6. ([9]) 若 T 是一个含有 n 个顶点的树, 则

$$\text{per}L(T) \geq 2(n-1),$$

等号成立当且仅当 $T = S_n$.

引理2.7. ([11]) 令 G 是一个简单图, v 是图 G 的一个顶点, $C_G(v)$ 是图 G 中包含顶点 v 圈的集合, $N(v)$ 表示 v 的邻集. 则

$$\text{per}L(G) = d(v) \text{per}L_v(G) + \sum_{u \in N(v)} \text{per}L_{vu}(G) + 2 \sum_{C \in C_G(v)} (-1)^{|V(C)|} \text{per}L_{V(C)}(G).$$

令 T 是一个有 n 个顶点的树, 将它的顶点集唯一的分为 V_1 和 V_2 , 使每条边的两个顶点一个在 V_1 中, 一个在 V_2 中. 若 V_1 中有 p 个顶点, V_2 中有 q 个顶点, 我们就说 T 具有 (p, q) -划分。

3. 10及以下阶数树的拉普拉斯积和式及比率的极值结果

在 [12] 中, 作者刻画了 10 阶及以下的非同构树的所有结构并且对这些树进行了编号, 我们按顺序计算每一个图的拉普拉斯积和式以及比率. 以图 2.42 和图 2.79 为例, 图 2.42 的拉普拉斯矩阵为

$$L(G_{2.42}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

计算其拉普拉斯积和式与拉普拉斯比率分别为:

$$\text{per}L(G_{2.42}) = 178$$

$$\pi(G_{2.42}) = 4.944$$

图2.79的拉普拉斯矩阵为

$$L(G_{2.79}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

计算其拉普拉斯积和式与拉普拉斯比率分别为:

$$\text{per}L(G_{2.79}) = 675$$

$$\pi(G_{2.42}) = 4.32$$

用同样的方法我们计算了 [12]中282~292页的所有树的拉普拉斯积和式及比率(见附件1)。我们得到, 给定顶点数给定划分时, 拉普拉斯积和式最大值所对应的是对称的毛毛虫树, 但是出现了特里就是图2.197, 它显然不是毛毛虫树, 但它在划分为(4,6)的树中积和式最大为1460; 在给定顶点数, 给定直径时拉普拉斯积和式最大值对应的是一种特殊的T星树。在给定顶点数, 给定匹配数时, 上述结果还没发现明显的规律, 这就要求我们计算更多顶点数的积和式来确定规律。对于比率, 在计算过程中, 我们发现其奇数顶点偶数顶点的结果不一样, 有待进一步研究。对于拉普拉斯比率的大小, 在计算过程中我们发现, 它与预测的不同, 其大小与树的度序列的乘积大小并无直接的关系, 更多地依赖于图的直径与匹配的大小, 其余性质还需要我们进一步地挖掘。

4. (5,6)非毛毛虫树的拉普拉斯积和式

对上述10个顶点的树上添加一条边和一个一度顶点并且删去所有同构树的方法, 可以得到不同狗构的全部235棵11阶树, 其中, 有137棵是毛毛虫树, 98棵非毛毛虫树, 我们按照下图中98棵树按照从左至右从上到下的方式编号, 图中的标记一次代表图标号, 图的划分, 以及图的拉普拉斯积和式的值(所有结果见附录2)。我们同样给出两个例子, 例如; G_1 , (5,6), 3636分别代表, 这个图的编号是 G_1 , 并且划分是(5,6), 以及它的拉普拉斯积和式是3636。在图中具有(5,6)-划分的非毛毛虫树共有62棵, 其中拉普拉斯积和式最大的是 G_1 。

定理4.1.

$$\text{per}L(G_1) = 3636$$

证明 G_1 的拉普拉斯矩阵如下;

$$L(G_1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

我们将该矩阵输入maple来计算其积和式, 得到的值为3636 代码是

with(LinearAlgebra); Permanent;

在图中具有(4, 7)-划分的非毛毛虫树共有32棵, 其中拉普拉斯积和式最大的是 G_{30}

定理4.2.

$$\text{per}L(G_{30}) = 2156$$

证明 G_1 的拉普拉斯矩阵如下;

$$L(G_1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

我们用上述同样的方式可以得到其值

在图中具有(3, 8)-划分的非毛毛虫树共有4棵, 其中拉普拉斯积和式最大的是 G_{90}

定理4.3.

$$\text{per}L(G_{90}) = 620$$

证明 G_1 的拉普拉斯矩阵如下;

$$L(G_1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

我们用上述同样的方式可以得到其值。对于十一阶非毛毛虫树的拉普拉斯积和式的计算我们结果验证了我们计算完十阶之后的预测，拉普拉斯积和式的大小与树的度序列有着密切联系，其余结果有待进一步发现。

5. 总结

在解决关于树的二部划分拉普拉斯积和式极值的过程中，由于毛毛虫树有相关的规律，所以我们计算了98棵非毛毛虫树的拉普拉斯矩阵积和式的值，但是很显然，就二部划分来说，11阶太小，没有相关结构的一些规律，我们可以通过对其的计算，构造12阶树，计算其拉普拉斯矩阵积和式的值，刻画极图。□

基金项目

青海民族大学创新项目；《图的拉普拉斯积和式的极值问题研究》，项目编号：07M2024005。

参考文献

- [1] Valiant, L.G. (1979) The Complexity of Computing the Permanent. *Theoretical Computer Science*, **8**, 189-201. [https://doi.org/10.1016/0304-3975\(79\)90044-6](https://doi.org/10.1016/0304-3975(79)90044-6)
- [2] van Dam, E.R. and Haemers, W.H. (2003) Which Graphs Are Determined by Their Spectrum? *Linear Algebra and its Applications*, **373**, 241-272. [https://doi.org/10.1016/s0024-3795\(03\)00483-x](https://doi.org/10.1016/s0024-3795(03)00483-x)
- [3] Cvetkovic, D. (2005) Signless Laplacians and Line Graphs. *Bulletin: Classe des Sciences Mathematiques et Naturales*, **131**, 85-92. <https://doi.org/10.2298/bmat0530085c>
- [4] Cvetković, D., Rowlinson, P. and Simić, S.K. (2007) Signless Laplacians of Finite Graphs. *Linear Algebra and Its Applications*, **423**, 155-171. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2007.01.009>

-
- [5] Cvetkovic, D., Rowlinson, P. and Simic, S. (2004) Spectral Generalizations of Line Graphs. On Graphs with Least Eigenvalue-2. Cambridge University Press.
<https://doi.org/10.1017/cbo9780511751752>
- [6] Haemers, W.H. and Spence, E. (2004) Enumeration of Cospectral Graphs. *European Journal of Combinatorics*, **25**, 199-211. [https://doi.org/10.1016/s0195-6698\(03\)00100-8](https://doi.org/10.1016/s0195-6698(03)00100-8)
- [7] Cash, G.G. and Gutman, I. (2004) The Laplacian Permanental Polynomial: Formulas and Algorithms. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, **51**, 129-136.
- [8] Liu, S. (2019) On the (Signless) Laplacian Permanental Polynomials of Graphs. *Graphs and Combinatorics*, **35**, 787-803. <https://doi.org/10.1007/s00373-019-02033-2>
- [9] Brualdi, R.A. and Goldwasser, J.L. (1984) Permanent of the Laplacian Matrix of Trees and Bipartite Graphs. *Discrete Mathematics*, **48**, 1-21.
[https://doi.org/10.1016/0012-365x\(84\)90127-4](https://doi.org/10.1016/0012-365x(84)90127-4)
- [10] Goldwasser, J.L. (1986) Permanent of the Laplacian Matrix of Trees with a Given Matching. *Discrete Mathematics*, **61**, 197-212. [https://doi.org/10.1016/0012-365x\(86\)90091-9](https://doi.org/10.1016/0012-365x(86)90091-9)
- [11] Wu, T. and So, W. (2021) Permanental Sums of Graphs of Extreme Sizes. *Discrete Mathematics*, **344**, Article 112353. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2021.112353>
- [12] Brouwer, A.E. and Haemers, W.H. (2011) Spectra of Graphs. Springer Science Business Media.

附录A1

1	图标号	拉普拉斯积和式	拉普拉斯比率	图标号	拉普拉斯积和式	拉普拉斯比率
2	1	2	2	101	82	3.28
3	2	4	2	102	126	3.5
4	3	6	2	103	146	4.056
5	4	10	2.5	104	158	4.389
6	5	8	2	105	194	4.042
7	6	16	2.667	106	226	4.708
8	7	24	3	107	270	5.625
9	8	10	2	108	142	3.55
10	9	22	2.75	109	174	4.35
11	10	26	2.889	110	178	4.45
12	11	38	3.167	111	194	4.311
13	12	42	3.5	112	210	4.667
14	13	58	3.625	113	254	4.233
15	14	12	2	114	210	4.375
16	15	28	2.8	115	274	4.567
17	16	36	3	116	290	4.833
18	17	52	3.25	117	222	4.625
19	18	60	3.75	118	286	4.767
20	19	60	3.333	119	306	5.1
21	20	68	3.778	120	302	5.033
22	21	92	3.883	121	334	5.567
23	22	100	4.167	122	354	5.9
24	23	108	4.5	123	274	4.281
25	24	140	4.375	124	306	4.781
26	25	14	2	125	386	4.825
27	26	34	2.833	126	322	5.031
28	27	46	3.067	127	434	5.425
29	28	50	3.125	128	446	5.575
30	29	66	3.3	129	366	5.719
31	30	72	3.6	130	370	5.781
32	31	82	3.417	131	468	5.85
33	32	94	3.917	132	594	7.425
34	33	98	4.083	133	350	4.861
35	34	126	3.938	134	354	4.917
36	35	110	4.074	135	366	5.083
37	36	142	4.438	136	386	5.444
38	37	162	5.063	137	398	5.528
39	38	146	4.056	138	414	5.75
40	39	158	4.389	139	418	5.806
41	40	162	4.5	140	430	5.972
42	41	174	4.833	141	482	5.021
43	42	178	4.944	142	514	5.354
44	43	222	4.625	143	526	5.479
45	44	238	4.958	144	330	5.521
46	45	242	5.042	145	558	5.813
47	46	258	5.375	146	558	5.813
48	47	338	5.281	147	450	5.556
49	48	16	2	148	542	5.646
50	49	40	2.857	149	436	5.383
51	50	56	3.111	150	590	5.938

Figure A 1. The Laplacian permanent and ratio of trees with 10 vertices or fewer

图A 1. 10及以下顶点树的拉普拉斯积和式及比率

52	51	80	3.333	151	610	6.354
53	52	96	4	152	562	5.854
54	53	64	3.2	153	606	6.313
55	54	104	3.467	154	606	6.313
56	55	120	4	155	610	6.354
57	56	128	4.267	156	626	6.521
58	57	112	3.5	157	654	6.813
59	58	160	4	158	690	7.188
60	59	136	4.25	159	702	7.313
61	60	184	4.6	160	594	5.5
62	61	216	5.4	161	734	5.734
63	62	152	4.222	162	622	5.759
64	63	160	4.44	163	658	6.093
65	64	200	4.167	164	670	6.204
66	65	216	4.5	165	674	6.241
67	66	224	4.667	166	670	6.204
68	67	224	4.667	167	814	6.359
69	68	240	5	168	686	6.352
70	69	232	4.833	169	830	6.484
71	70	237	4.938	170	734	6.796
72	71	264	5.5	171	738	6.833
73	72	304	4.75	172	754	6.981
74	73	256	4.741	173	910	7.109
75	74	280	5.185	174	930	7.266
76	75	336	5.25	175	1026	8.016
77	76	288	5.333	176	850	5.903
78	77	344	5.375	177	910	6.319
79	78	384	6	178	914	6.347
80	79	432	6.75	179	926	6.431
81	80	352	4.889	180	974	6.764
82	81	376	5.222	181	946	6.569
83	82	384	5.333	182	990	6.875
84	83	392	5.444	183	990	6.875
85	84	408	5.667	184	1010	7.014
86	85	416	5.773	185	994	6.889
87	86	416	5.778	186	1010	7.014
88	87	424	5.889	187	1006	6.986
89	88	456	6.333	188	1026	7.125
90	89	536	5.583	189	1074	7.458
91	90	576	6	190	1086	7.542
92	91	584	6.083	191	1090	7.569
93	92	616	6.417	192	1170	8.125
94	93	624	6.5	193	1294	6.740
95	94	816	6.375	194	1390	7.24
96	95	18	2	195	1394	7.26
97	96	46	2.875	196	1410	7.344
98	97	66	3.143	197	1470	7.656
99	98	96	3.357	198	1490	7.76
100	99	114	4.071	199	1506	7.844
101	100	78	3.25	200	1970	7.695

Figure A 2. The Laplacian permanent and ratio of trees with 10 vertices or fewer

图A 2. 10及以下顶点树的拉普拉斯积和式及比率

附录A2

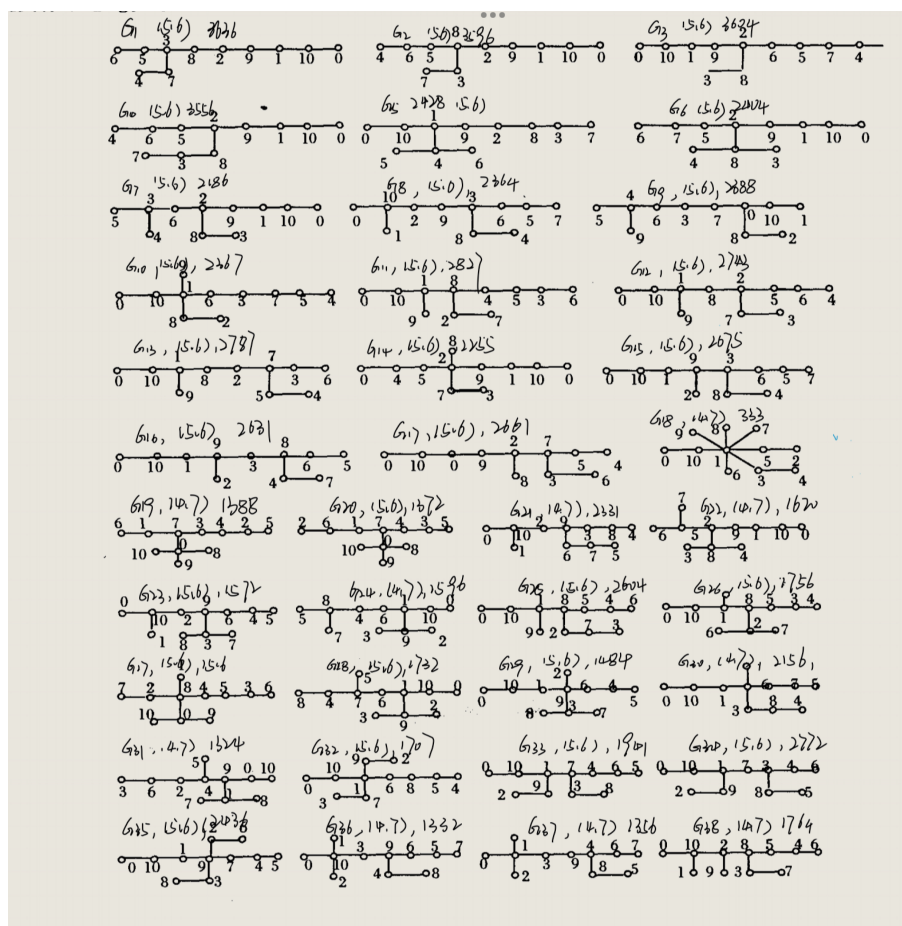


Figure A 3. The Laplacian Permanent of Non - Caterpillar Trees with 11 Vertices

图A 3. 11个顶点非毛毛虫树的拉普拉斯积和式