

具时变记忆核的黏弹性弱耗散波动方程解的长时间行为研究

张庆禹, 闫 龙

东北电力大学理学院, 吉林 吉林

收稿日期: 2025 年 3 月 14 日; 录用日期: 2025 年 4 月 15 日; 发布日期: 2025 年 4 月 29 日

摘 要

本文考虑一类具时变记忆核及线性阻尼的黏弹性波动方程的初边值问题。首先, 通过引入记忆函数将问题进行转化, 建立适当的时变记忆空间, 并证明了记忆函数所满足的积分不等式。进一步, 利用 Feado-Galerkin 方法证明了弱解的存在性, 并得到了解的一致有界性。其次, 我们证明了解对初值的连续依赖性, 从而得到解的唯一性。最后, 在外源项为 0 的条件下, 通过构造辅助泛函, 利用积分不等式, 证明了系统能量的指数衰减。相关方法在一般非时变黏弹性波动方程解的长时间行为研究中仍然适用。

关键词

时变记忆核, 波动方程, 存在性, 唯一性, 衰减性

Study on the Longtime Behaviour of the Viscoelastic Wave Equations with Time Dependent Memory Kernels and Damping Terms

Qingyu Zhang, Long Yan

School of Science, Northeast Electric Power University, Jilin Jilin

Received: Mar. 14th, 2025; accepted: Apr. 15th, 2025; published: Apr. 29th, 2025

Abstract

This paper is concerned with the initial boundary value problem of a viscoelastic wave equations with time dependent memory kernel and linear damping. Firstly, we introduce a memory function and rewrite the problem to a equivalent system. By constructing an appropriate time dependent memory space, we control the memory function by some integral inequalities. Furthermore, the existence of weak solutions is proved by the Feado-Galerkin method, and the uniform boundedness of the solutions is also obtained. Secondly, we prove the continuous dependence of the solutions on the initial values and obtain the uniqueness of the solution. Finally, by constructing an auxiliary functional and using the integral inequality, we prove the exponential decay of the energy under the condition that the external source term is 0. The related methods are also applicable in the study of the long time behavior of solutions of classical viscoelastic wave equations.

Keywords

Time-Varying Memory Kernel, Wave Equation, Existence, Uniqueness, Attenuation

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在本文中我们考虑如下时变黏弹性波动方程

$$\partial_{tt}u - h_t(0)\Delta u - \int_0^\infty h'_t(s)\Delta u(t-s)ds + u_t + f(u) = g, \quad (1.1)$$

方程满足齐次 Dirichlet 边界条件

$$u(t)|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1.2)$$

及初值条件

$$\begin{cases} u(\tau) = u_\tau, \\ \partial_t u(\tau) = v_\tau, \\ u(\tau - s) = \phi_\tau(s), \quad s > 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

其中 $\tau > 0$, $\Omega \subset R^3$ 是有光滑边界的有界区域。 ϕ_τ 为给定函数, 描述初始时刻 τ 前黏弹性物体的状态, 不需要满足方程(1.1)。 $h_t(s) = k_t(s) + k_\infty$ 为时变记忆核, 其中 $k_\infty > 0$ 为常数, 表示材料的松弛模量, $k_t(s)$ 为与时间 t 相关且关于 s 可积的函数, 表示随时间变化的瞬时弹性模量。

当 $h_t(s) = h(s)$, 即记忆核与时间 t 无关时, 大量文献研究了此类黏弹性波动方程解的长时间行为, 其中具有开创性的是 C.M.Dafermos 等人的一系列工作, 1968 年, C.M.Dafermos 在 [1] 中研究了一类一维非线性黏弹性方程的混合初边值问题, 证明了在适当条件下解的存在唯一性及解的适定性; 之后, 他在 [2] 中考虑了 n 维情形下线性黏弹性方程的初边值问题, 并利用 HALE 动力系统理论框架, 在记忆核不满足凸性条件的情况下, 证明了系统解的渐近稳定性, 得到了更好的结论。1991 年, M.Fabrizio 和 B.Lazzari 在 [3] 中研究了线性黏弹性波动方程, 他们提出了关于记忆核的一系列假设, 并运用拉普拉斯变换转化方程后证明了方程解存在唯一性, 在此基础上, 他们进一步讨论了系统能量指数衰减的条件; 1996 年, Munoz Rivera.J.E. 和 Barreto.R.K 在 [4] 中考虑了非线性黏弹性方程, 将记忆核的指数衰减假设改为多项式衰减假设, 证明了解的一阶和二阶能量衰减速率与记忆核衰减速率相同, 即记忆核决定了解的衰减行为。21 世纪初, V.Pata 等人进一步考虑了具有阻尼项的黏弹性线性双曲方程 [5]、具有非线性源项的黏弹性半线性双曲方程 [6] 以及源于等温黏弹性理论的半线性双曲方程 [7] 解的存在性与长时间行为, 并证明了相应系统的吸收集与全局吸引子的存在性。相关研究还可参见文献 [8,9]。

如果黏弹性材料的弹性随时间变化 (如材料老化、硬化等), 则黏弹性核 h 与时间 t 相关, 方程变为(1.1)中的形式。此时, 方程的非自制性是结构性的。这种非自制性导致方程的解空间与时间相关, 使得经典的研究方法不再适用。关于这类方面的研究目前还比较少, 比较有代表性的工作是 V.Pata 等人在文献 [10,11] 中的系列工作, 在文献 [10] 中, 他们主要研究了具时变记忆核的黏弹性波动方程

$$\partial_{tt}u - h_t(0)\Delta u - \int_0^\infty h'_t(s)\Delta u(t-s)ds + f(u) = g,$$

在给出一系列的假设条件下, 证明了解的存在性、连续依赖性和唯一性。之后在文献 [11] 中, 他们弱化了上篇文章给出的假设条件, 并给出新的相关条件, 证明了吸收集和吸引子的存在性。受此启发本文改用积分计算进行证明含有时变的黏弹性记忆核性质。

上述文章主要考虑了时变黏弹性项对系统带来的耗散, 一个很自然的问题是, 当时变黏弹性系统中同时出现阻尼带来的能量耗散时, 系统的衰减性会发生怎样的变化, 典型例子是线性弹簧和黏性阻尼器组合的弹性模型。时变记忆核通过历史应力应变关系提供长期耗散, 而线性阻尼项通过速度相关的即时耗散加速能量衰减。这种阻尼与记忆项组成的双渠道耗散结构不仅加快了能量衰减速率, 还降低了系统对记忆核衰减特性的依赖, 使得在较弱的记忆核条件下仍能保证能量的指数衰减。本文主要考虑此类具线性阻尼的时变黏弹性波动方程系统稳定性问题。具体地, 我们考虑初边值问题(1.1)-(1.3), 利用 Feado-Galerkin 方法证明问题弱解的存在唯一性, 并在假设外源项 $g = 0$ 的条件下, 证明了方程能量的指数衰减。

本文所采用的处理时变黏弹性波动方程的方法对非时变情形仍然适用。具体地, 我们构造了记忆函数所满足一个代数方程来代替经典研究方法中的微分方程, 并利用代数方程对记忆函数进行估计, 可以证明, 在非时变情形下该代数方程与经典理论中的微分方程是等价的。

本文的具体结构如下: 在第 2 节中, 我们介绍一些符号、假设条件及预备知识; 在第 3 节中, 我们给出弱解的定义并证明解的存在性和唯一性; 最后, 我们在第 4 节中证明系统能量的指数衰减性。

2. 预备知识与假设

设 $A = -\Delta$ 为满足 Dirichlet 边界条件的拉普拉斯算子, 则 A 是 $L_2(\Omega)$ 上的正线性算子, 其定义域为 $\mathcal{D}(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ 。对任意 $\sigma \in \mathbb{R}$, 定义 Hilbert 空间 $H^\sigma = \mathcal{D}(A^{\frac{\sigma}{2}})$, 其上内积与范数分别定义为

$$\langle u, v \rangle_\sigma = \langle A^{\frac{\sigma}{2}} u, A^{\frac{\sigma}{2}} v \rangle, \quad \|u\|_\sigma = \|A^{\frac{\sigma}{2}} u\|. \quad (2.1)$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 与 $\|\cdot\|$ 分别表示 $L^2(\Omega)$ 上的内积与范数。当 $\sigma = 0$ 时, $H^0 = L^2(\Omega)$, 此时我们将 H^0 简记为 H 。当 $\sigma = 1$ 时, $H^1 = H_0^1(\Omega)$, 根据嵌入定理知 $H^1 \hookrightarrow L^6$, 且由(2.1)有

$$\langle u, v \rangle_1 = \langle A^{1/2} u, A^{1/2} v \rangle = \langle \nabla u, \nabla v \rangle, \quad \forall u, v \in H_0^1.$$

当 $\sigma = -1$ 时, $H^{-1} = H^{-1}(\Omega)$ 为 H^1 的对偶空间。当 $\sigma = 2$ 时, $H^2 = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ 。

为求解问题(1.1), 利用 Dafermos 在文献 [2] 中的思想, 引入新变量

$$\eta^t(s) = u(t) - u(t-s), \quad s > 0.$$

令 $\mu_t(s) = -k'_t(s) = -h'_t(s)$, 为简单起见记 $k_\infty = 1$, 则方程(1.1)可变换为如下形式:

$$\partial_{tt} u - \Delta u - \int_0^\infty \mu_t(s) \Delta \eta^t(s) ds + \partial_t u + f(u) = g, \quad (2.2)$$

且当 $t \geq \tau$ 时, 有

$$\eta^t(s) = \begin{cases} u(t) - u(t-s), & s \leq t-\tau, \\ \eta_\tau(s-t+\tau) + u(t) - u_\tau, & s > t-\tau, \end{cases} \quad (2.3)$$

其中

$$\eta_\tau(s) = u(\tau) - u(\tau-s) = u_\tau - \phi_\tau(s),$$

进而原方程初值条件可化为:

$$\begin{cases} u(\tau) = u_\tau, \\ \partial_t u(\tau) = v_\tau, \\ \eta^\tau = \eta_\tau. \end{cases} \quad (2.4)$$

可以验证, 问题(1.1)-(1.3)与问题(2.2)-(2.4)等价, 于是我们可以将求解(1.1)-(1.3)的问题转化为求

解(2.2)-(2.4)。值得一提的是, 在经典的非时变问题研究 (如 Dafermos [1, 2]、V.Pata [5-7]) 中, $\eta^t(s)$ 由微分方程

$$\partial_t \eta^t = -\partial_s \eta^t + \partial_t u \quad (2.5)$$

控制, 但该方程在时变情形下不再成立, 其原因在于 $\eta^t(s)$ 所在记忆空间是随时间变化的, 因此无法在严格意义下对 $\eta^t(s)$ 进行微分运算。于是, 我们用代数方程(2.3) 替代常用的微分方程(2.5), 可以验证, (2.3)与(2.5)等价且对于经典非时变情形也是适用的。

接下来, 对固定的 $\sigma, \tau \in R$ 及 $t \geq \tau$, 我们介绍文献 [12] 中给出的时变记忆空间的定义, 记

$$\mathcal{M}_t^\sigma = L_{\mu_t}^2(R^+; H^{\sigma+1}) = \left\{ \eta^t : R^+ \rightarrow H^{\sigma+1} \mid \int_0^\infty \mu_t(s) \|\eta^t\|_{\sigma+1}^2 ds < +\infty \right\},$$

定义其上内积与范数分别为

$$\begin{aligned} \langle \eta^t, \xi \rangle_{\mathcal{M}_t^\sigma} &= \int_0^\infty \mu_t(s) \langle \eta^t(s), \xi(s) \rangle_{\sigma+1} ds, \\ \|\eta^t\|_{\mathcal{M}_t^\sigma}^2 &= \langle \eta^t, \eta^t \rangle_{\mathcal{M}_t^\sigma}, \end{aligned}$$

则 $\mathcal{M}_t^\sigma$ 为一加权的时变 Hilbert 空间。在此基础上, 定义 Hilbert 空间 $\mathcal{H}_t^\sigma$ 如下

$$\mathcal{H}_t^\sigma = H^{\sigma+1} \times H^\sigma \times \mathcal{M}_t^\sigma,$$

该空间范数满足

$$\|(u, v, \eta^t)\|_{\mathcal{H}_t^\sigma}^2 = \|u\|_{\sigma+1}^2 + \|v\|_\sigma^2 + \|\eta^t\|_{\mathcal{M}_t^\sigma}^2.$$

我们将问题(2.2)-(2.4)放在 $\mathcal{H}_t^\sigma$ 中进行讨论。

下面我们给出时变记忆核 $\mu_t(s) : R \times R^+ \rightarrow R^+$ 满足的条件 [10]

(h1) 对每个固定的 $t \in R$, 函数 $\mu_t(s)$ 是非增、绝对连续、可积的;

(h2) 对任意 $\tau \in R$, 存在可积函数 $K_\tau : [\tau, \infty) \rightarrow R^+$, 使得对每个 $t \geq \tau$ 及 $s > 0$ 有

$$\mu_t(s) \leq K_\tau(s) \mu_\tau(s).$$

(h3) 对几乎每个 $s > 0$, 函数 $\mu_t(s)$ 关于 $t \in R$ 都是可微的。此外, 对 $R \times R^+$ 中的紧集 $\mathcal{K}$, 映射 $\Upsilon_1 : (t, s) \rightarrow \mu_t(s)$ 和 $\Upsilon_2 : (t, s) \rightarrow \dot{\mu}_t(s)$ 满足

$$\Upsilon_1 \in L^\infty(\mathcal{K}), \Upsilon_2 \in L^\infty(\mathcal{K}).$$

(h4) 存在局部有界函数 $M : R \rightarrow R^+$ 及常数 $\delta > 0$, 使得对所有 $t \in R$ 和几乎每个 $s > 0$ 都有

$$\dot{\mu}_t(s) + \mu_t'(s) \leq M(t) \mu_t(s),$$

其中

$$\dot{\mu}_t(s) = \partial_t \mu_t(s), \quad \mu_t'(s) = \partial_s \mu_t(s).$$

由 (h1) 可知, 函数 $s \rightarrow \mu_t(s)$ 是几乎处处可微的且对每个 $t \in R$, 有

$$\mu'_t(s) \leq 0, \quad \text{a.e. } s > 0.$$

令

$$\kappa(t) = \int_0^\infty \mu_t(s) ds, \quad (2.6)$$

则由 (h2) 可得

$$\kappa(t) \leq K_\tau(t) \kappa(\tau), \quad \forall t \geq \tau.$$

此外, (h2) 还保证了时变空间具有如下的嵌入关系。

引理 2.1. 假设 $\mu_t(s)$ 满足 (h2), 则 $\mathcal{M}_\tau^\sigma \subset \mathcal{M}_t^\sigma$, $\forall t \geq \tau$, 即对每个 $\eta^t \in \mathcal{M}_\tau^\sigma$, 有

$$\|\eta^t\|_{\mathcal{M}_t^\sigma}^2 \leq K_\tau(t) \|\eta^t\|_{\mathcal{M}_\tau^\sigma}^2, \quad \forall t \geq \tau, \quad (2.7)$$

定义时变空间 $\mathcal{M}_t^\sigma$ 上的线性算子 $\mathbb{T}_t$, 满足

$$\mathbb{T}_t : \mathcal{D}(\mathbb{T}_t) \subset \mathcal{M}_t^\sigma \rightarrow \mathcal{M}_t^\sigma,$$

$$\mathbb{T}_t \eta^t = -\eta',$$

其定义域为

$$\mathcal{D}(\mathbb{T}_t) = \left\{ \eta^t \in \mathcal{M}_t^\sigma : \eta' \in \mathcal{M}_t^\sigma, \lim_{s \rightarrow 0} \eta^t(s) = 0 \text{ 在 } H^{\sigma+1} \text{ 中} \right\}.$$

利用分部积分可得

$$\langle \mathbb{T}_t \eta^t, \eta^t \rangle_{\mathcal{M}_t^\sigma} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \mu'_t(s) \|\eta^t(s)\|_{\sigma+1}^2 ds, \quad \forall \eta^t \in \mathcal{D}(\mathbb{T}_t),$$

根据文献 [12] 可知 $\mathbb{T}_t$ 是一极小生成子。由 (h1) 中 $\mu_t(s)$ 是非增性质可得 $\mathbb{T}_t$ 是一个非增算子, 即

$$\langle \mathbb{T}_t \eta^t, \eta^t \rangle_{\mathcal{M}_t^\sigma} \leq 0, \quad \forall \eta^t \in \mathcal{D}(\mathbb{T}_t).$$

由引理 2.1 可知, 对于任意的 $t \geq \tau$, $\mathbb{T}_t$ 是 $\mathbb{T}_\tau$ 的延拓。

在 (h1)-(h4) 的条件下, 我们可以进一步得到关于记忆空间 $\mathcal{M}_t^\sigma$ 的一些性质。

引理 2.2. ^[10] 假设 $\mu_t(s)$ 满足 (h2) 且 $\eta_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\sigma$, 令 $\Phi(u, \eta_\tau) = 6\kappa(\tau) \|u\|_{L^\infty(\tau, T; H^{\sigma+1})}^2 + 3\|\eta_\tau\|_{\mathcal{M}_\tau^\sigma}^2$, 则 $\eta^t \in \mathcal{M}_\tau^\sigma \subset \mathcal{M}_t^\sigma$, 且有

$$\begin{aligned} \|\eta^t\|_{\mathcal{M}_\tau^\sigma}^2 &\leq \Phi(u, \eta_\tau), \quad \forall t \in [\tau, T], \\ \|\eta^t\|_{\mathcal{M}_t^\sigma}^2 &\leq \Phi(u, \eta_\tau) K_\tau(t) \in L^1(\tau, T). \end{aligned}$$

引理 2.2 说明当 η^t 的初值 η_τ 在 $\mathcal{M}_\tau^\sigma$ 空间中时, η^t 也在 $\mathcal{M}_\tau^\sigma$ 空间中, 这解决了 η^t 所在空间的一致性问题。

引理 2.3. [10] 假设 $\eta_\tau \in \mathcal{D}(\mathbb{T}_\tau)$, 那么对于每一个 $t \in [\tau, T]$, 有 $\eta^t \in \mathcal{D}(\mathbb{T}_\tau)$, $\eta^t \in W^{1,\infty}(\tau, T; \mathcal{M}_\tau^\sigma)$, 并且方程

$$\partial_t \eta^t = \mathbb{T}_\tau \eta^t + \partial_t u(t), \quad (2.8)$$

在 $\mathcal{M}_\tau^\sigma$ 中成立。

引理 2.3 说明如果 η^t 的初值 η_τ 属于 $\mathbb{T}_\tau$ 的定义域, 则 η^t 也属于 $\mathbb{T}_\tau$ 的定义域, 于是求导运算可以定义。同时可以看到, 方程 (2.8) 与经典问题中的微分方程本质上是一致的。

在非时变问题的研究中, $\eta^t(s)$ 可由微分方程 (2.5) 所导出的微分不等式控制, 但由于在本问题中微分方程 (2.5) 被替换成了代数方程 (2.3), 我们需要下述积分形式的不等式来对 $\eta^t(s)$ 的范数进行控制, 它们这在之后的证明中是十分重要的。

引理 2.4. [10] 假设 $u \in C^1([\tau, T], H^{\sigma+1})$ 且 $\eta_\tau \in C^1(R^+, H^{\sigma+1}) \cap \mathcal{D}(\mathbb{T}_\tau)$, 则对 $a, b \in [\tau, T]$, 有不等式

$$\|\eta^b\|_{\mathcal{M}_b^\sigma}^2 \leq \|\eta^a\|_{\mathcal{M}_a^\sigma}^2 + \int_a^b \int_0^\infty [\dot{\mu}_t(s) + \mu'_t(s)] \|\eta^t(s)\|_{\sigma+1}^2 ds dt + 2 \int_a^b \langle \partial_t u(t), \eta^t \rangle_{\mathcal{M}_t^\sigma} dt.$$

引理 2.5. [10] 假设 $u \in W^{1,\infty}(\tau, T; H^{\sigma+1})$ 且 $\eta_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\sigma$ 。则对 $a, b \in [\tau, T]$, 有不等式

$$\|\eta^b\|_{\mathcal{M}_b^\sigma}^2 \leq \|\eta^a\|_{\mathcal{M}_a^\sigma}^2 + M \int_a^b \|\eta^t\|_{\mathcal{M}_t^\sigma}^2 dt + 2 \int_a^b \langle \partial_t u(t), \eta^t \rangle_{\mathcal{M}_t^\sigma} dt,$$

其中设

$$M = \sup_{t \in [\tau, T]} M(t).$$

下面我们给出外源项 g 和内源项 f 的假设:

设 $g \in H$, $f \in C^1(R)$, $f(0) = 0$ 且存在常数 $C \geq 0$, 使得

$$|f'(u)| \leq C(1 + |u|^2), \quad (2.9)$$

$$\liminf_{|u| \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{u} > -\lambda_1, \quad (2.10)$$

其中 λ_1 是 A 的第一个特征值。上述关于 f, g 的假设是比较经典的。

3. 存在性和唯一性

3.1. 解的存在性

在本小节中, 我们将用 Feado-Galerkin 方法证明问题 (2.2)-(2.4) 弱解的存在性。首先给出问题弱解的定义。

定义 3.1. 设 $T > \tau$, $z_\tau = (u_\tau, v_\tau, \eta_\tau) \in \mathcal{H}_\tau$ 为一个固定向量。对于几乎每一个 $t \in [\tau, T]$, 称函数

$$z(t) = (u(t), \partial_t u(t), \eta^t) \in \mathcal{H}_t,$$

是区间 $[\tau, T]$ 上以 z_τ 为初值的问题(2.2)-(2.4)的弱解, 如果 $z(t)$ 满足以下条件:

- (i) $u \in L^\infty(\tau, T; H^1)$, $\partial_t u \in L^\infty(\tau, T; H)$, $\partial_{tt} u \in L^1(\tau, T; H^{-1})$;
- (ii) $u(\tau) = u_\tau$, $\partial_t u(\tau) = v_\tau$;
- (iii) 函数 η^t 满足表示公式(2.3);
- (iv) 对于每个 $\varphi \in H^1$ 以及几乎所有 $t \in [\tau, T]$, 有

$$\langle \partial_{tt} u(t), \varphi \rangle + \langle u(t), \varphi \rangle_1 + \int_0^\infty \mu_t(s) \langle \eta^t(s), \varphi \rangle_1 ds + \langle \partial_t u(t), \varphi \rangle + \langle f(u(t)), \varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle. \quad (3.1)$$

下面我们给出弱解存在性定理。

定理 3.1. 假设 μ_t 满足 (h1) - (h4), 初值 $z_\tau = (u_\tau, v_\tau, \eta_\tau^t) \in \mathcal{H}_\tau$, 则对每个 $T > \tau \in R$, 问题(2.2)-(2.4)在 $[\tau, T]$ 上至少有一个解 $z(t) \in \mathcal{H}_t$ 满足

$$\sup_{t \in [\tau, T]} \|z(t)\|_{\mathcal{H}_t} \leq C,$$

其中 $C > 0$ 为仅依赖于 T 、 τ 和初值的常数。

上述定理可由经典的 Feado-Galerkin 方法证明。对任意的 $n \in N$, 设 $\{w_n\}$ 是 H 的一组标准正交基, 并在 H^1 中也是正交的, 定义函数

$$u_n(t) = \sum_{j=1}^n a_j^n(t) w_j,$$

由(2.3)知

$$\eta_n^t(s) = \begin{cases} u_n(t) - u_n(t-s), & s \leq t-\tau, \\ \eta_{\tau n}(s-t+\tau) + u_n(t) - u_{\tau n}, & s > t-\tau, \end{cases}$$

且

$$\eta_{\tau n}(s) = u_n(\tau) - u_n(\tau-s),$$

设 $z_n(t) = (u_n(t), \partial_t u_n(t), \eta_n^t)$, $z_{\tau n}(t) = (u_n(\tau), \partial_t u_n(\tau), \eta_n^t(\tau)) = (u_{\tau n}, \partial_t u_{\tau n}, \eta_{\tau n}^t)$, 其中 $u_{\tau n}$ 在 H^1 中收敛到 u_τ , $\partial_t u_{\tau n}$ 在 H 中收敛到 $\partial_t u_\tau$, $\eta_{\tau n}^t$ 在 $\mathcal{M}_t$ 中收敛到 η_τ^t , 根据微分方程的标准存在性理论, 在区间 $[\tau, T_n]$ 上存在问题(2.2)-(2.4)的局部解 z_n 。

接下来需要通过对 z_n 进行先验估计, 将解的存在时间从 T_n 延拓到任意 $T > 0$ 。这里, 我们主要给出先验估计的证明。

引理 3.1. 设 $\|z_\tau\|_{\mathcal{H}_\tau} \leq R$, $R \geq 0$ 。则 $z_n(t) \in \mathcal{H}_t$, $t \geq \tau$, 且存在一个非减的正函数 $Q: R^+ \rightarrow R^+$, 使得

$$\sup_{t \in [\tau, T]} \|z_n(t)\|_{\mathcal{H}_t} \leq Q(R).$$

Proof. 根据 $z_{\tau n}$ 及初值的定义, 有

$$\|z_{\tau n}\|_{\mathcal{H}_\tau} \leq \|z_\tau\|_{\mathcal{H}_\tau} \leq R.$$

对 $t \in [\tau, T_n]$, 定义能量泛函

$$E_n(t) = \|u_n(t)\|_1^2 + \|\partial_t u_n(t)\|^2 + 2\langle F(u_n(t)), 1 \rangle,$$

其中

$$F(u) = \int_0^u f(s)ds.$$

根据(2.9)得

$$\begin{aligned} |f(u)| &= \left| \int_0^u f'(s)ds \right| \leq \int_0^{|u|} |f'(s)|ds \leq \int_0^{|u|} C(1+s^2)ds \leq C(1+|u|^3), \\ F(u) &\leq C \int_0^u (1+|s|^3)ds = C \left(|u| + \frac{1}{4}|u|^4 \right) \leq C(1+|u|^4). \end{aligned}$$

由 Hölder 不等式和嵌入定理, 有

$$\int_{\Omega} |u_n(x)|^4 dx \leq \left(\int_{\Omega} |u_n(x)|^6 dx \right)^{\frac{2}{3}} \left(\int_{\Omega} 1 dx \right)^{\frac{1}{3}} = \|u_n(x)\|_{L^6}^4 \leq C \|u_n(x)\|_1^4.$$

于是由(2.9), 可得

$$2\langle F(u_n(t)), 1 \rangle \leq C \int_{\Omega} 1 + |u_n(x)|^4 dx \leq C(1 + \|u_n(x)\|_1^4), \quad (3.2)$$

再根据(2.10), 可得

$$2\langle F(u_n(t)), 1 \rangle \geq -(1-\theta)\|u_n\|_1^2 - C, \quad (3.3)$$

结合(3.2)和(3.3)及能量泛函 $E_n(t)$ 的定义, 当 $0 < \theta < 1$, 我们有

$$\theta [\|u_n(t)\|_1^2 + \|\partial_t u_n(t)\|^2] - C \leq E_n(t) \leq Q(\|u_n(x)\|_1 + \|\partial_t u_n(x)\|). \quad (3.4)$$

另一方面, 在(3.1)中取 $\varphi = \partial_t u_n$, 可得

$$\frac{d}{dt} E_n + 2\langle \eta_n^t, \partial_t u_n \rangle_{\mathcal{M}_t} + 2\langle \partial_t u_n, \partial_t u_n \rangle = 2\langle g, \partial_t u_n \rangle, \quad (3.5)$$

由(3.4)得

$$2\langle g, \partial_t u_n \rangle \leq 2\|g\| \|\partial_t u_n\| \leq 2\|g\| \sqrt{\frac{1}{\theta}(E_n + C)} \leq C + CE_n, \quad (3.6)$$

将(3.6)代入到(3.5)中, 并且注意到 $2\langle \partial_t u_n, \partial_t u_n \rangle = 2\|\partial_t u_n\|^2 \geq 0$, 则有

$$\frac{d}{dt} E_n + 2\langle \eta_n^t, \partial_t u_n \rangle_{\mathcal{M}_t} \leq C + CE_n,$$

对其在 $[\tau, t]$ 上积分得

$$E_n(t) + 2 \int_{\tau}^t \langle \eta_n^y, \partial_t u_n(y) \rangle_{\mathcal{M}_y} dy \leq E_n(\tau) + C + C \int_{\tau}^t E_n(y) dy. \quad (3.7)$$

注意到, 当引理2.5中 $a = \tau$, $b = t$, $\sigma = 0$ 时, 有

$$\|\eta_n^t\|_{\mathcal{M}_t}^2 \leq \|\eta_n^{\tau}\|_{\mathcal{M}_{\tau}}^2 + M \int_{\tau}^t \|\eta_n^y\|_{\mathcal{M}_y}^2 dy + 2 \int_{\tau}^t \langle \eta_n^y, \partial_t u(y) \rangle_{\mathcal{M}_y} dy. \quad (3.8)$$

记

$$\varepsilon_n(t) = E_n(t) + \|\eta_n^t\|_{\mathcal{M}_t}^2,$$

将(3.7)和(3.8)相加可得

$$\varepsilon_n(t) \leq \varepsilon_n(\tau) + C + C \int_{\tau}^t \varepsilon_n(y) dy,$$

由 Gronwall 引理知 $\varepsilon_n(t)$ 有界, 再根据(3.4)和 $\varepsilon_n(t)$ 的定义, 可知 $\|u_n(t)\|$ 、 $\|\partial_t u_n(t)\|$ 、 $\|\eta_n^t\|$ 均有界, 且其估计值与 n 无关, 于是我们可以将 $z_n(t)$ 的存在时间延拓到任意的 $T > 0$. $\square$

由于先验估计成立, 我们可以对 $u_n(t)$ 、 $\partial_t u_n(t)$ 、 η_n^t 在相应空间中抽取收敛子列得到 $z(x, t) = (u, \partial_t u, \eta^t)$ 是问题(2.2)-(2.4)在 $[\tau, T] \times \Omega$ 上的弱解, 具体过程可参见文献 [10].

接下来为了进一步完成定理3.1的证明, 我们还需要对 $z(x, t)$ 在 $\mathcal{H}_t$ 中进行范数的一致性估计, 由 $u(t)$ 和 $\partial_t u(t)$ 的连续性和弱收敛性得到, 对每个 $t \in [\tau, T]$, 下式成立

$$\sup_{t \in [\tau, T]} [\|u_n(t)\|_1 + \|\partial_t u_n(t)\|] \leq Q(R).$$

对固定的 $t \in [\tau, T]$, 在 $\mathcal{M}_t$ 中存在子序列 $\eta_n^t(x)$ 弱收敛于 q^t , 且

$$\|q^t\|_{\mathcal{M}_t} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\eta_n^t\|_{\mathcal{M}_t} \leq Q(R),$$

设 $\tilde{\eta}_n = \eta_n^t - \eta^t$, $\tilde{u}_n = u_n - u$, $\tilde{\eta}_{\tau n} = \eta_{\tau n} - \eta_{\tau}$, 则

$$\|\tilde{\eta}\|_{\mathcal{M}_t}^2 \leq \Phi(\tilde{u}_n, \tilde{\eta}_{\tau n}) K_{\tau}(t) \rightarrow 0$$

因为 $\tilde{u}_n$ 在 $C([\tau, T]; H(\Omega))$ 中趋于 0, $\tilde{\eta}_{\tau n}$ 在 $\mathcal{M}_t$ 中趋于 0, 所以 $q^t = \eta^t$, 得 $\|\eta^t\|_{\mathcal{M}_t} \leq Q(R)$. 得到

$$\sup_{t \in [\tau, T]} [\|u_n(t)\|_1 + \|\partial_t u_n(t)\| + \|\eta^t\|_{\mathcal{M}_t}] \leq Q(R)$$

即得

$$\sup_{t \in [\tau, T]} \|z(t)\|_{\mathcal{H}_t} \leq Q(R).$$

3.2. 解的唯一性

本节中我们证明解的唯一性。

定理 3.2. 若 $z_1(t) = (u_1(t), \partial_t u_1(t), \eta_1^t)$, $z_2(t) = (u_2(t), \partial_t u_2(t), \eta_2^t)$ 是问题(2.2)-(2.4)在 $[\tau, T]$ 上的两个解, 且 $z_1(\tau), z_2(\tau) \in \mathcal{H}_\tau$, 存在一个常数 $C > 0$ (仅依赖于 $\tau, T, \mathcal{H}_\tau$ 上的初值), 使得对每个 $t \in [\tau, T]$ 有

$$\|z_1(t) - z_2(t)\|_{\mathcal{H}_t^{-1}} \leq C \|z_1(\tau) - z_2(\tau)\|_{\mathcal{H}_\tau}.$$

Proof. 由定理3.1知

$$\sup_{t \in [\tau, T]} [\|u_1(t)\|_1 + \|u_2(t)\|_1] \leq C, \quad (3.9)$$

定义 $\tilde{z}(t) = z_1(t) - z_2(t) = (\tilde{u}(t), \partial_t \tilde{u}(t), \tilde{\eta}^t)$, 并设

$$\Gamma(t) = \|\tilde{u}(t)\|^2 + \|\partial_t \tilde{u}(t)\|_{-1}^2.$$

则由弱解定义可知

$$\langle \partial_{tt} \tilde{u}(t), \varphi \rangle + \langle \tilde{u}(t), \varphi \rangle_1 + \int_0^\infty \mu_t(s) \langle \tilde{\eta}^t(s), \varphi \rangle_1 ds + \langle \partial_t \tilde{u}(t), \varphi \rangle + \langle f(u_1(t) - u_2(t)), \varphi \rangle = 0, \quad (3.10)$$

且

$$\tilde{\eta}^t(s) = \begin{cases} \tilde{u}(t) - \tilde{u}(t-s), & s \leq t-\tau, \\ \tilde{\eta}_\tau(s-t+\tau) + \tilde{u}(t) - \tilde{u}_\tau, & s > t-\tau. \end{cases}$$

在(3.10)中取 $\varphi = A^{-1} \partial_t \tilde{u}(t)$

$$\begin{aligned} & \langle \partial_{tt} \tilde{u}(t), A^{-1} \partial_t \tilde{u}(t) \rangle + \langle \tilde{u}(t), A^{-1} \partial_t \tilde{u}(t) \rangle_1 + \int_0^\infty \mu_t(s) \langle \tilde{\eta}^t(s), A^{-1} \partial_t \tilde{u}(t) \rangle_1 ds \\ & + \langle \partial_t \tilde{u}(t), A^{-1} \partial_t \tilde{u}(t) \rangle + \langle f(u_1(t) - u_2(t)), A^{-1} \partial_t \tilde{u}(t) \rangle \\ & = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\partial_t \tilde{u}(t)\|_{-1}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\tilde{u}(t)\|^2 + \langle \tilde{\eta}^t, \partial_t \tilde{u}(t) \rangle_{\mathcal{M}_t^{-1}} + \|\partial_t \tilde{u}(t)\|_{-1}^2 + \\ & \quad \langle f(u_1(t) - u_2(t)), \partial_t \tilde{u}(t) \rangle_{-1} \\ & = 0. \end{aligned}$$

整理得

$$\frac{d}{dt} \Gamma(t) + 2 \langle \tilde{\eta}^t, \partial_t \tilde{u}(t) \rangle_{\mathcal{M}_t^{-1}} + 2 \|\partial_t \tilde{u}(t)\|_{-1}^2 = 2 \langle f(u_2(t) - u_1(t)), \partial_t \tilde{u}(t) \rangle_{-1}, \quad (3.11)$$

由(2.9)、中值定理 (取 $\xi = u_1 - u_2$) 和 Sobolev 嵌入定理, 有

$$\|f(u_2(t) - u_1(t))\|_{-1} \leq C (1 + |\xi|^2) \|\tilde{u}\|_{-1} \leq C \|C (1 + |u_1|^2 + |u_2|^2) \|\tilde{u}\|_{L^{\frac{6}{5}}(\Omega)},$$

再根据(3.9)和 Hölder 不等式, 得

$$\|f(u_2(t) - u_1(t))\|_{-1} \leq C \|1 + |u_1|^2 + |u_2|^2\|_{L^3(\Omega)} \|\tilde{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq C (1 + \|u_1\|_1^2 + \|u_2\|_1^2) \|\tilde{u}\| \leq C \|\tilde{u}\|. \quad (3.12)$$

将(3.12)代入(3.11)中, $\|\partial_t \tilde{u}(t)\|_{-1}^2 \geq 0$, 得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Gamma(t) + 2 \langle \tilde{\eta}^t, \partial_t \tilde{u}(t) \rangle_{\mathcal{M}_t^{-1}} &\leq 2 \|f(u_2(t) - u_1(t))\|_{-1} \|\partial_t \tilde{u}(t)\|_{-1} \leq C \|\tilde{u}\| \|\partial_t \tilde{u}(t)\|_{-1} \\ &\leq C \left(\|\tilde{u}\|^2 + \|\partial_t \tilde{u}(t)\|_{-1}^2 \right) \leq C \Gamma(t). \end{aligned}$$

对 $\forall \tau \leq t \leq T$, 将上述不等式在 $[\tau, t]$ 上积分, 可得

$$\Gamma(t) + 2 \int_{\tau}^t \langle \tilde{\eta}^y, \partial_t \tilde{u}(y) \rangle_{\mathcal{M}_y^{-1}} dy \leq \Gamma(\tau) + C \int_{\tau}^t \Gamma(y) dy. \quad (3.13)$$

利用引理2.5并取 $a = \tau$, $b = t$, $\sigma = -1$, 可得

$$\|\tilde{\eta}^t\|_{\mathcal{M}_t^{-1}}^2 \leq \|\tilde{\eta}^{\tau}\|_{\mathcal{M}_{\tau}^{-1}}^2 + M \int_{\tau}^t \|\tilde{\eta}^y\|_{\mathcal{M}_y^{-1}}^2 dy + 2 \int_{\tau}^t \langle \tilde{\eta}^y, \partial_t \tilde{u}(y) \rangle_{\mathcal{M}_y^{-1}} dy. \quad (3.14)$$

将(3.13)和(3.14)相加, 可得

$$\|\tilde{z}(t)\|_{\mathcal{H}_t^{-1}}^2 \leq \|\tilde{z}(\tau)\|_{\mathcal{H}_{\tau}^{-1}}^2 + C \int_{\tau}^t \|\tilde{z}(y)\|_{\mathcal{H}_y^{-1}}^2 dy.$$

最后由 Gronwall 引理和嵌入 $\mathcal{H}_{\tau} \hookrightarrow \mathcal{H}_{\tau}^{-1}$ 可得定理3.2成立。□

定理 3.3. 若 $z_1(t) = (u_1(t), \partial_t u_1(t), \eta_1^t)$, $z_2(t) = (u_2(t), \partial_t u_2(t), \eta_2^t)$ 是问题(2.2)-(2.4)在 $[\tau, T]$ 上的两个解, 且 $z_1(\tau), z_2(\tau) \in \mathcal{H}_{\tau}^1$, 存在一个常数 $C > 0$ (仅依赖于 $\tau, T, \mathcal{H}_{\tau}$ 上的初值), 使得对每个 $t \in [\tau, T]$ 有

$$\|z_1(t) - z_2(t)\|_{\mathcal{H}_t} \leq C \|z_1(\tau) - z_2(\tau)\|_{\mathcal{H}_{\tau}}.$$

Proof. 该定理证明思路与定理3.2类似。主要区别在于, 在(3.10)中取 $\varphi = \partial_t \tilde{u}(t)$, $\|\partial_t \tilde{u}(t)\|^2 \geq 0$, 得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\|\tilde{u}\|_1^2 + \|\partial_t \tilde{u}\|^2) + 2 \int_0^{\infty} \mu_t(s) \langle \tilde{\eta}^t(s), \partial_t \tilde{u}(t) \rangle_1 ds &= -\|\partial_t \tilde{u}(t)\|^2 + \langle f(u_2(t) - u_1(t)), \partial_t \tilde{u}(t) \rangle \\ &\leq C (\|\tilde{u}\|_1^2 + \|\partial_t \tilde{u}\|^2). \end{aligned}$$

对 $\forall \tau \leq t \leq T$, 将上述不等式在 $[\tau, t]$ 上积分, 有

$$\begin{aligned} [\|\tilde{u}(t)\|_1^2 + \|\partial_t \tilde{u}(t)\|^2] + 2 \int_{\tau}^t \langle \tilde{\eta}^y, \partial_t \tilde{u}(y) \rangle_{\mathcal{M}_y} dy &\leq [\|\tilde{u}(\tau)\|_1^2 + \\ &\|\partial_t \tilde{u}(\tau)\|^2 + C \int_{\tau}^t (\|\tilde{u}(y)\|_1^2 + \|\partial_t \tilde{u}(y)\|^2) dy. \end{aligned}$$

用上述不等式与引理2.5 (当 $a = \tau$, $b = t$, $\sigma = 0$) 相加, 得

$$[\|\tilde{u}(t)\|_1^2 + \|\partial_t \tilde{u}(t)\|^2 + \|\tilde{\eta}^t\|_{\mathcal{M}_t}^2] \leq [\|\tilde{u}(\tau)\|_1^2 + \|\partial_t \tilde{u}(\tau)\|^2]$$

$$+\|\tilde{\eta}^\tau\|_{\mathcal{M}_\tau}^2 + C \int_\tau^t \left(\|\tilde{u}(y)\|_1^2 + \|\partial_t \tilde{u}(y)\|^2 + \|\tilde{\eta}^y\|_{\mathcal{M}_y}^2 \right) dy,$$

整理得

$$\|\tilde{z}(t)\|_{\mathcal{H}_t}^2 \leq \|\tilde{z}(\tau)\|_{\mathcal{H}_\tau}^2 + C \int_\tau^t \|\tilde{z}(y)\|_{\mathcal{H}_y}^2 dy.$$

再由 Gronwall 引理可得定理3.3成立。 $\square$

定理3.2和定理3.3表示了问题(2.2)-(2.4)解对初值的连续依赖性, 进而可知当初值不变时, 解是唯一的。

4. 衰减性

在本节中, 我们在外源项 $g = 0$ 的条件下证明系统(2.2)-(2.4)能量的指数衰减。首先我们将 μ_t 所满足的条件 (h4) 替换为 (h4'), 并在此基础上给出 μ_t 的额外三个假设 [11]。

(h4') 存在局部有界函数 $M : R \rightarrow R^+$ 及常数 $\delta > 0$, 使得对每个 $t \in R$ 和几乎所有 $s > 0$ 都有

$$\dot{\mu}_t(s) + \mu'_t(s) + \delta \kappa(t) \mu_t(s) \leq 0.$$

(h5) $\kappa(t)$ 为形如(2.6)中的函数, 并满足

$$\inf_{t \in R} \kappa(t) > 0.$$

(h6) 函数 $\dot{\mu}_t(s)$ 满足一致积分估计

$$\sup_{t \in R} \frac{1}{[\kappa(t)]^2} \int_0^\infty |\dot{\mu}_t(s)| ds < \infty.$$

(h7) 对每个 $t \in R$, 函数 $\mu_t(s)$ 在零附近是有界的, 且满足

$$\sup_{t \in R} \frac{\mu_t(0)}{[\kappa(t)]^2} < \infty.$$

如果黏弹性核 $\mu_t(s)$ 与时间 t 无关, 则条件 (h4') 即为经典的指数衰减条件

$$\mu'(s) + \delta \mu(s) \leq 0.$$

条件 (h7) 对记忆核在 $s = 0$ 处的取值进行了限制, 避免其在 $s = 0$ 处出现奇异性。

首先, 我们给出系统能量泛函的定义

$$\mathcal{E}(t, \tau) = \frac{1}{2} \|z(t)\|_{\mathcal{H}_t}^2,$$

并要求初始时刻满足

$$\mathcal{E}(\tau, \tau) \leq R.$$

再定义如下辅助泛函

$$\mathcal{L}(t) = L(t) + \|\eta^t\|_{\mathcal{M}_t}^2,$$

其中

$$L(t) = \|u(t)\|_1^2 + \|\partial_t u(t)\|^2 + 2\langle F(u(t)), 1 \rangle.$$

可以证明, 上述定义的系统能量是有界的。

定理 4.1. 设 Q 为递增正函数, 则对每个 $t \geq \tau$, 有估计

$$\mathcal{E}(t, \tau) \leq Q(R).$$

Proof. 当 $0 < \theta < 1$, 根据不等式(3.2) (3.3)可得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t) &\geq \|u(t)\|_1^2 + \|\partial_t u(t)\|^2 + \|\eta^t\|_{\mathcal{M}_t}^2 - (1 - \theta)\|u(t)\|_1^2 - C \\ &= \frac{\theta}{2}\|u(t)\|_1^2 + \|\partial_t u(t)\|^2 + \|\eta^t\|_{\mathcal{M}_t}^2 - C \\ &\geq \theta \mathcal{E}(t, \tau). \\ \mathcal{L}(t) &\leq \|u(t)\|_1^2 + \|\partial_t u(t)\|^2 + \|\eta^t\|_{\mathcal{M}_t}^2 + C(1 + \|u(t)\|_1^4) \\ &\leq C(1 + \|u(t)\|_1^4 + \|\partial_t u(t)\|^2 + \|\eta^t\|_{\mathcal{M}_t}^2) \\ &\leq Q(\mathcal{E}(t, \tau)). \end{aligned}$$

即

$$\theta \mathcal{E}(t, \tau) \leq \mathcal{L}(t) \leq Q(\mathcal{E}(t, \tau)), \quad (4.1)$$

说明 $\mathcal{L}(t)$ 与 $\mathcal{E}(t, \tau)$ 等价。接下来, 在(3.1)中取 $\varphi = \partial_t u(t)$, 有

$$\begin{aligned} &\langle \partial_{tt} u(t), \partial_t u(t) \rangle + \langle u(t), \partial_t u(t) \rangle_1 + \int_0^\infty \mu_t(s) \langle \eta^t(s), \partial_t u(t) \rangle_1 ds + \langle \partial_t u(t), \partial_t u(t) \rangle + \langle f(u), \partial_t u(t) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\partial_t u(t)\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_1^2 + \langle \eta^t, \partial_t u(t) \rangle_{\mathcal{M}_t} + \|\partial_t u(t)\|^2 + \langle F'(u), 1 \rangle = 0. \end{aligned}$$

对方程两端在 $[a, b]$ 上进行积分, 得

$$\|\partial_t u(b)\|^2 - \|\partial_t u(a)\|^2 + \|u(b)\|_1^2 - \|u(a)\|_1^2 + 2 \int_a^b \langle \eta^t, \partial_t u(t) \rangle_{\mathcal{M}_t} dt + 2 \int_a^b \|\partial_t u(t)\|^2 dt + 2\langle F(b), 1 \rangle - 2\langle F(a), 1 \rangle = 0,$$

即

$$L(b) + 2 \int_a^b \langle \eta^t, \partial_t u(t) \rangle_{\mathcal{M}_t} dt + 2 \int_a^b \|\partial_t u(t)\|^2 dt = L(a), \quad (4.2)$$

注意到, 当引理2.4中 $\sigma = 0$ 时, 有

$$\|\eta^b\|_{\mathcal{M}_b^\sigma}^2 \leq \|\eta^a\|_{\mathcal{M}_a^\sigma}^2 + \int_a^b \int_0^\infty [\dot{\mu}_t(s) + \mu'_t(s)] \|\eta^t(s)\|_{\sigma+1}^2 ds dt + 2 \int_a^b \langle \partial_t u(t), \eta^t \rangle_{\mathcal{M}_t^\sigma} dt. \quad (4.3)$$

将(4.2)和(4.3)相加可得

$$\mathcal{L}(b) - \int_a^b \int_0^\infty [\dot{\mu}_t(s) + \mu'_t(s)] \|\eta^t\|_1^2 ds dt + 2 \int_a^b \|\partial_t u(t)\|^2 dt \leq \mathcal{L}(a), \quad (4.4)$$

其中 $\dot{\mu}_t(s) + \mu'_t(s) \leq 0$, $\int_a^b \|\partial_t u(t)\|^2 dt \geq 0$, 并且令 $a = \tau$, $b = t$, 得

$$\mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(\tau) \leq Q(\mathcal{E}(\tau, \tau)) \leq Q(R),$$

再由(4.1)可得即得到结论 $\mathcal{E}(t, \tau) \leq Q(R)$ 。 $\square$

下面引入泛函

$$\Lambda(t) = \mathcal{L}(t) + 2\varepsilon[\Phi(t) + 4\Psi(t)],$$

其中

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= 2\langle u(t), \partial_t u(t) \rangle, \\ \Psi(t) &= -\frac{2}{\kappa(t)} \int_0^\infty \mu_t(s) \langle \eta^t(s), \partial_t u(t) \rangle ds. \end{aligned}$$

根据上述 $\Phi(t)$ 和 $\Psi(t)$ 的定义可知

$$|\Phi(t) + \Psi(t)| \leq C \|z(t)\|_{\mathcal{H}_t}^2, \quad (4.5)$$

由于(4.1)、(4.5)及 $\Lambda(t)$ 定义, 得

$$\frac{\theta}{2} \mathcal{E}(t, \tau) \leq \Lambda(t) \leq Q(\mathcal{E}(t, \tau)) \leq Q(R). \quad (4.6)$$

接下来我们给出系统能量衰减率估计定理。

定理 4.2. 设 Q 为递增正函数, $\varepsilon > 0$, 则对每个 $t \geq \tau$, 有估计

$$\mathcal{E}(t, \tau) \leq Q(R) e^{-\varepsilon(t-\tau)}.$$

该定理的证明主要依赖如下 Gronwall 引理及积分不等式。

引理 4.1. (Gronwall 引理^[11]) 设 $\tau \in R$, $\Theta : [\tau, +\infty) \rightarrow R$ 为连续函数, 对于 $\varepsilon > 0$ 以及每个 $b > a \geq \tau$, 存在

$$\Theta(b) + 2\varepsilon \int_a^b \Theta(t) dt \leq \Theta(a),$$

则对于每个 $t \geq \tau$, 有

$$\Theta(t) \leq e^C |\Theta(\tau)| e^{-\varepsilon(t-\tau)}.$$

引理 4.2. 当 $0 < \theta < 1$ 时, 对每个 $b > a \geq \tau$, 函数 $\Phi(t)$ 和 $\Psi(t)$ 分别满足

$$\begin{aligned} \Phi(b) + (2 - \frac{\theta}{32}) \int_a^b \|u(t)\|_1^2 dt &\leq \Phi(a) + 2 \int_a^b \|\partial_t u(t)\|^2 dt \\ &+ \frac{32}{\theta} \int_a^b \kappa(t) \|\eta^t\|_{\mathcal{M}_t}^2 dt - 2 \int_a^b \langle f(u), u(t) \rangle dt. \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \Psi(b) + \int_a^b \|\partial_t u(t)\|^2 dt &\leq \Psi(a) - M \int_a^b \int_0^\infty [\dot{\mu}_t(s) + \mu'_t(s)] \|\eta^t(s)\|_1^2 ds dt \\ &+ \frac{\theta}{32} \int_a^b \|u(t)\|_1^2 dt + \frac{32C}{\theta} \int_a^b \kappa(t) \|\eta^t\|_{\mathcal{M}_t}^2 dt \\ &+ \int_a^b \frac{2}{\kappa(t)} \int_0^\infty \mu_t(s) \langle \eta^t(s), f(u) \rangle ds dt. \end{aligned} \quad (4.8)$$

引理4.2的证明过程类似于文献 [11] 中的引理 5.3 和引理 5.4, 相较于文献 [11], 本文所处理问题中考虑了阻尼项 $u_t(t)$ 的存在, 但阻尼项的存在不影响引理4.2中的估计。

下面给出定理4.2的证明。

Proof. 由引理4.2中 $\Phi(t)$ 所满足不等式及(2.10), 得

$$\begin{aligned} \Phi(b) + \left(1 + \frac{\theta}{2}\right) \int_a^b \|u(t)\|_1^2 dt + 2 \int_a^b \langle F(u), 1 \rangle dt \\ \leq \Phi(a) + 2 \int_a^b \|\partial_t u(t)\|^2 dt + \frac{2}{\theta} \int_a^b \kappa(t) \|\eta^t(s)\|_{\mathcal{M}_t}^2 dt, \end{aligned} \quad (4.9)$$

根据引理4.2中 $\Psi(t)$ 所满足不等式、(h5)及(2.9), 得

$$\begin{aligned} \Psi(b) + \int_a^b \|\partial_t u(t)\|^2 dt \\ \leq \Psi(a) - M \int_a^b \int_0^\infty [\dot{\mu}_t(s) + \mu'_t(s)] \|\eta^t\|_1^2 ds dt + \frac{\theta}{16} \int_a^b \|u(t)\|_1^2 dt + \frac{32}{\theta} \int_a^b Q(\|u(t)\|_1) \kappa(t) \|\eta^t(s)\|_{\mathcal{H}_t}^2 dt. \end{aligned} \quad (4.10)$$

将(4.9)和 4 倍的(4.10)相加, 得

$$\begin{aligned} \Phi(b) + 4\Psi(b) + \int_a^b \mathcal{L}(t) dt + \frac{\theta}{2} \int_a^b \mathcal{E}(t, \tau) dt \\ \leq \Phi(a) + 4\Psi(a) - 4M \int_a^b \int_0^\infty [\dot{\mu}_t(s) + \mu'_t(s)] \|\eta^t\|_1^2 ds dt + Q(R) \int_a^b \kappa(t) \|\eta^t\|_{\mathcal{M}_t}^2 dt \end{aligned}$$

将上述不等式乘 2ε 和(4.4)相加, 得

$$\Lambda(b) + 2\varepsilon \int_a^b \Lambda(t) dt + N_1 + N_2 + 2 \int_a^b \|\partial_t u(t)\|^2 dt \leq \Lambda(a), \quad (4.11)$$

其中

$$N_1 = \varepsilon \int_a^b (\theta \mathcal{E}(t, \tau) - 4\varepsilon[\Phi(t) + 4\Psi(t)]) dt,$$

$$N_2 = -(1 - 8\varepsilon M) \int_a^b \int_0^\infty [\dot{\mu}_t(s) + \mu'_t(s)] \|\eta^t\|_1^2 ds dt - 2\varepsilon Q(R) \int_a^b \kappa(t) \|\eta^t\|_{\mathcal{M}_t}^2 dt.$$

当 ε 取足够小, 得到 N_1 是非负的. 由 **(h4')** 可得到 N_2 估计

$$N_2 \geq [\delta(1 - 8\varepsilon M) - 2\varepsilon Q(R)] \int_a^b \kappa(t) \|\eta^t\|_{\mathcal{M}_t}^2 dt,$$

同理, ε 取足够小时, 得到 N_2 是非负的, 则(4.11)可化为

$$\Lambda(b) + 2\varepsilon \int_a^b \Lambda(t) dt \leq \Lambda(a),$$

由引理4.1, 得

$$\Lambda(t) \leq e^C |\Lambda(\tau)| e^{-\varepsilon(t-\tau)}.$$

根据(4.6), 有

$$\mathcal{E}(t, \tau) \leq \frac{\theta}{2} \Lambda(t) \leq \frac{\theta}{2} e^C |\Lambda(\tau)| e^{-\varepsilon(t-\tau)} \leq Q(R) e^{-\varepsilon(t-\tau)},$$

即当 $g = 0$ 时, (2.2)-(2.4)的能量是指数衰减的. $\square$

注 4.1. 当外源项 $g \neq 0$ 时, 运用以上方法能够证明系统吸收集的存在性, 进而还可证明系统吸引子的存在性, 相关工作将在后续研究中展开.

参考文献

- [1] Dafermos, C.M. (1969) The Mixed Initial-Boundary Value Problem for the Equations of Nonlinear One-Dimensional Viscoelasticity. *Journal of Differential Equations*, **6**, 71-86. [https://doi.org/10.1016/0022-0396\(69\)90118-1](https://doi.org/10.1016/0022-0396(69)90118-1)
- [2] Dafermos, C.M. (1970) Asymptotic Stability in Viscoelasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **37**, 297-308. <https://doi.org/10.1007/bf00251609>
- [3] Fabrizio, M. and Lazzari, B. (1991) On the Existence and the Asymptotic Stability of Solutions for Linearly Viscoelastic Solids. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **116**, 139-152. <https://doi.org/10.1007/bf00375589>
- [4] Munoz Rivera, J.E. and Barretot, R.K. (1996) Uniform Rates of Decay in Nonlinear Viscoelasticity for Polynomial Decaying Kernels. *Applicable Analysis*, **60**, 97-133. <https://doi.org/10.1080/00036819608840437>

-
- [5] Pata, V. and Zucchi, A. (2001) Attractors for a Damped Hyperbolic Equation with Linear Memory. *Advances in Mathematical Sciences and Applications*, **11**, 505-529.
- [6] Conti, M. and Pata, V. (2005) Weakly Dissipative Semilinear Equations of Viscoelasticity. *Communications on Pure & Applied Analysis*, **4**, 705-720.
<https://doi.org/10.3934/cpaa.2005.4.705>
- [7] Giorgi, C., Muñoz Rivera, J.E. and Pata, V. (2001) Global Attractors for a Semilinear Hyperbolic Equation in Viscoelasticity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **260**, 83-99. <https://doi.org/10.1006/jmaa.2001.7437>
- [8] Christensen, R.M. (2013) Theory of Viscoelasticity. Courier Corporation.
- [9] Berrimi, S. and Messaoudi, S.A. (2004) Exponential Decay of Solutions to a Viscoelastic Equation with Nonlinear Localized Damping. *Electronic Journal of Differential Equations*, **88**, 1-10.
- [10] Conti, M., Danese, V., Giorgi, C. and Pata, V. (2018) A Model of Viscoelasticity with Time-Dependent Memory Kernels. *American Journal of Mathematics*, **140**, 349-389.
<https://doi.org/10.1353/ajm.2018.0008>
- [11] Conti, M., Danese, V. and Pata, V. (2018) Viscoelasticity with Time-Dependent Memory Kernels, II: Asymptotic Behavior of Solutions. *American Journal of Mathematics*, **140**, 1687-1729. <https://doi.org/10.1353/ajm.2018.0049>
- [12] Grasselli, M. and Pata, V. (2002) Uniform Attractors of Nonautonomous Dynamical Systems with Memory. In: Lorenzi, A. and Ruf, B., Eds., *Evolution Equations, Semigroups and Functional Analysis*, Birkhäuser Basel, 155-178. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8221-7_9