

具有脉冲和时滞的四元数神经网络的输入到状态稳定性

马楠

上海理工大学理学院, 上海

收稿日期: 2025年3月20日; 录用日期: 2025年4月16日; 发布日期: 2025年4月29日

摘要

本文主要研究具有脉冲和时滞的四元数神经网络(QVNN)的输入到状态稳定(ISS)。首先, 由于四元数乘法不适用于交换律, 所以我们将四元数神经网络分解为四个实值神经网络来进行分析, 然后通过比较原理和平均脉冲间隔方法, 以及利用Lyapunov-Krasovskii函数和一些矩阵不等式, 提出了一些充分的条件, 以确保所考虑的系统是输入到状态稳定(ISS)。最后, 我们给出了一个数值模拟例子及其仿真图来证明理论结果的正确性和有效性。

关键词

四元数神经网络(QVNN), 时滞, 脉冲, 输入到状态稳定(ISS)

Input-to-State Stability of Quaternion-Valued Neural Networks with Impulses and Time Delay

Nan Ma

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Mar. 20th, 2025; accepted: Apr. 16th, 2025; published: Apr. 29th, 2025

Abstract

In this paper, the input-to-state stability of quaternion-valued neural networks (QVNN) with impulses and time delay is investigated. First of all, in virtue of the quaternion multiplication is not suitable for commutative law, QVNN is resolved into four real-valued neural networks (RVNNs). With the help of the comparison principle and average impulse interval approach, and making use

of a Lyapunov function and some inequalities, we obtain sufficient conditions to assure the considered system is ISS. Finally, one numerical example and their simulations are given to show the correctness and effectiveness of our theoretical results.

Keywords

Quaternion-Valued Neural Networks, Time Delay, Impulses, Input-to-State Stability (ISS)

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

神经网络作为一种模拟人脑神经元结构和功能的计算模型，自 20 世纪 40 年代 McCulloch-Pitts 提出神经元模型以来，经历了漫长而曲折的发展历程。它在处理复杂非线性问题、模式识别、优化计算等诸多领域展现出独特的优势，吸引了众多学者的广泛关注[1]-[4]。随着人工智能技术的飞速发展，现代科学与工程众多领域，神经网络都发挥着不可或缺的关键作用，如图像识别、人工智能、信号处理、以及联想记忆等[5]-[8]。

然而，传统的神经网络模型大多基于实数域构建，在处理某些复杂问题时存在局限性。四元数神经网络(Quaternion-Valued Neural Networks, QVNNs)应运而生，它将神经元的激活函数和权重等参数扩展到四元数域。四元数的概念由爱尔兰数学家 William Rowan Hamilton 提出，作为一种超复数，由一个实数部分和三个虚数部分组成，其独特的代数结构为处理多维信息提供了有力工具。在神经网络的研究范畴中，四元数神经网络能够同时处理多个通道的信息，这使得它在诸如彩色图像处理、多传感器数据融合等需要处理多维信息的复杂任务中展现出显著优势[9]-[11]。通过引入四元数，神经网络可以更加高效地处理和分析多维数据，避免了因将多维信息分别处理而可能导致的信息丢失和计算复杂度增加的问题。近年来，实值和复值神经网络被扩散在无线通信、工程操作、信号处理和模式识别领域。四元数神经网络可以被视为复值和实值神经网络的扩展，其优势在三维和四维数据建模中具有巨大的发展潜力。所以四元数神经网络现在被越来越广泛的应用在实际生活中。

由于四元数特殊的非交换性，所以适用于实值和复值神经网络的方法不能直接运用到四元数神经网络中，因此，必须通过将四元数神经网络分解为四个实值神经网络，或者分解为两个复值神经网络，来进行研究。例如，在[12]中，Shu 和 Song 等人将四元数神经网络分解为两个复值神经网络，并使用同构映射定理，研究了具有不可微时变延迟的四元数神经网络的全局 μ 稳定；在[13]中，Zhang 和 Liu 等人将四元数神经网络分解为四个实值神经网络，研究了具有时滞的递归神经网络的全局指数稳定性；在[14]中，Qi 和 Bao 等人将四元数神经网络分解为四个实值神经网络，研究了具有时滞的四元数神经网络的指数输入到状态稳定性。

在现实世界的复杂系统中，脉冲和时滞现象普遍存在。脉冲是指系统状态在某些特定时刻发生瞬时突变，这种突变可能源于外部干扰、内部机制的突然切换等多种因素。一些不稳定的系统需要通过脉冲控制来稳定，一些稳定的系统可能会受到突然的不确定性现象的干扰甚至破坏。对于 QVNNs，还应考虑脉冲效应，以抵抗某些突然现象的扰动或稳定它们。最近，一些作者研究了脉冲型 QVDNNs (IQVDNN)，并取得了一些优异的结果[15]-[17]。时滞则是指系统当前状态受到过去状态的影响，这种影响可能来源于信息传输的延迟、物理过程的惯性等。时滞神经网络由于能够更精准地刻画现实世界中存在的时间延迟

现象, 成为了神经网络研究领域中的重点关注对象。时间延迟在各类实际系统中广泛存在, 因为信号在神经元之间的传递需要时间, 这就导致了时滞的产生, 它往往是导致系统不稳定和性能下降的重要因素[18]-[21]。脉冲和时滞的存在使得系统的动态行为更加复杂, 它们可能会导致系统出现不稳定、振荡甚至混沌等现象, 从而影响神经网络的性能和可靠性。因此, 研究具有脉冲和时滞的四元数神经网络的稳定性问题具有极其重要的理论和实际意义。在[22]中, Tu 和 Yang 等人利用直接四元数法研究了具有不确定时滞和脉冲的四元数值神经网络的指数稳定性。和其他的稳定性概念相比, 输入到状态稳定性在实际系统分析中具有更强的实用性, 其强调在有界输入情况下系统状态的有界性以及输入对状态的影响程度。

输入到状态稳定性(Input-to-State Stability, ISS)作为稳定性理论的重要拓展, 能够细致描述系统状态与输入之间的定量关系。相较于传统的稳定性概念, ISS 不仅关注系统在零输入时的稳定性, 更强调在有界输入情况下系统状态的有界性以及输入对状态的影响程度。这种特性使 ISS 在实际系统分析中具有更强的实用性, 因为在现实应用中, 系统不可避免受到各种外部输入和干扰的影响, 而 ISS 理论可以帮助我们准确评估输入变化对系统状态的影响, 从而为系统的设计和优化提供依据。对于实值神经网络, 已经有大量文献研究了其在不同条件下的输入到状态稳定性, 包括线性、非线性、时变、时滞等多种情况[23]-[25]。通过扩展 ISS 的概念, 我们可以获得积分输入到状态稳定性和输入到输出稳定性等。在[26]中, Wu 和 Tang 等人研究了脉冲随机延迟系统线性假设的输入到状态稳定以及积分输入到状态稳定; 在[27]中, Wang 和 Li 等人研究了非线性脉冲延迟系统的输入到状态稳定和积分输入到状态稳定。

鉴于上述研究现状和挑战, 本文将深入研究具有脉冲和时滞的四元数神经网络的输入到状态稳定性问题。首先, 我们将构建一个具有脉冲和时滞的四元数神经网络模型, 明确系统的动态方程和相关参数。然后, 针对该模型, 提出一种新的 Lyapunov-Krasovskii 泛函构造方法, 该方法充分考虑了四元数域的代数特性以及脉冲和时滞的影响, 通过巧妙设计泛函的形式和参数, 使得能够有效地分析系统的输入到状态稳定性。然后利用不等式技巧和矩阵理论等工具, 推导出确保系统输入到状态稳定的充分条件。期望本文的研究成果能够为四元数时滞神经网络在实际工程中的应用提供更加坚实的理论基础。

本文的主要贡献包括: (1) 首次系统地研究具有脉冲和时滞的四元数神经网络的输入到状态稳定性问题, 填补了该领域的研究空白; (2) 提出了一种新的适用于四元数神经网络的 Lyapunov-Krasovskii 泛函构造方法, 为四元数神经网络的稳定性分析提供了一种新的思路; (3) 通过推导出的输入到状态稳定的充分条件, 为四元数神经网络的设计和应用提供了理论指导, 有助于提高四元数神经网络在复杂环境下的稳定性和可靠性。

本文的结构大纲如下, 第 2 节介绍了本文使用的符号和基本定义, 以及描述了研究的模型和用到的基本引理。第 3 节介绍了主要的理论结果, 提出了确保具有脉冲和时滞的四元数神经网络的输入到状态稳定的条件。第 4 节提供了一个示例来证明理论结果的有效性。最后, 第 5 节给出了本研究的结论。

2. 预备知识

2.1. 四元数代数

首先, 我们先介绍一些符号和基本定义。

四元数可以写成如下形式: $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$, $q \in Q$, 其中 Q 表示四元数域, 系数 $q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$, i, j, k 为虚部单位, 并且虚数单位遵循以下 Hamilton 规则:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j.$$

从规则来看, 四元数的乘法是不满足乘法交换律的。假设两个四元数 $m = m_0 + m_1i + m_2j + m_3k$, $n = n_0 + n_1i + n_2j + n_3k$, 下面给出四元数加法和乘法的定义:

$$\begin{aligned}
m+n &= (m_0+n_0) + (m_1+n_1)i + (m_2+n_2)j + (m_3+n_3)k \\
mn &= (m_0+m_1i+m_2j+m_3k)(n_0+n_1i+n_2j+n_3k) \\
&= (m_0n_0-m_1n_1-m_2n_2-m_3n_3) + (m_0n_1+m_1n_0+m_2n_3-m_3n_2)i \\
&\quad + (m_0n_2+m_2n_0-m_1n_3+m_3n_1)j + (m_0n_3+m_3n_0+m_1n_2-m_2n_1)k
\end{aligned}$$

$m = m_0 + m_1i + m_2j + m_3k$ 的共轭用 m^* 来表示, $m^* = m_0 - m_1i - m_2j - m_3k$, m 的模用 $|m|$ 来表示, $|m| = \sqrt{mm^*} = \sqrt{m_0^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}$ 。对于 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)^T \in Q^n$, 则 μ 的模为 $|\mu| = (|\mu_1|, |\mu_2|, \dots, |\mu_n|)^T$, μ 的范数为 $\|\mu\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\mu_i|^2}$ 。

2.2. 模型描述

在本文中, 我们将讨论如下带有时滞的四元数神经网络:

$$\begin{cases} \frac{dw(t)}{dt} = -Mw(t) + Ag(w(t)) + Bg(w(t-\tau(t))) + Cu(t), t \neq t_k, \\ w(t) = Hw(t^-), t = t_k, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $w(t) = (w_1(t), w_2(t), \dots, w_n(t))^T \in Q^n$ 表示 t 时刻神经元的状态向量, 并且 $t \geq 0$;
 $g(w(t)) = (g_1(w_1(t)), g_2(w_2(t)), \dots, g_n(w_n(t)))^T \in Q^n$ 表示 t 时刻四元数神经元的激活函数;
 $g(w(t-\tau(t))) = (g_1(w_1(t-\tau(t))), g_2(w_2(t-\tau(t))), \dots, g_n(w_n(t-\tau(t))))^T \in Q^n$ 表示带有时滞的四元数神经元的激活函数; $0 \leq \tau(t) \leq \tau$ 表示表示离散时变时滞, 并且 $\tau > 0$ 。

$M = \text{diag}\{m_1, m_2, \dots, m_n\} \in R^{n \times n}$ 是一个常数矩阵, 表示自反馈连接权矩阵, $m_i > 0 (i=1, 2, \dots, n)$;
 $A = (a_{ij})_{n \times n} = A^R + A^I i + A^J j + A^K k \in Q^{n \times n}$ 是内部连接权矩阵; $B = (b_{ij})_{n \times n} = B^R + B^I i + B^J j + B^K k \in Q^{n \times n}$ 是时滞连接权矩阵; $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))^T \in Q^n$ 表示四元数值外部输入向量;
 $C = \text{diag}\{c_1, c_2, \dots, c_n\} \in R^{n \times n}$ 是常数矩阵, 为外部输入的系数矩阵, 其中 c_i 为正常数。 $D \in R^{n \times n}$, 也是常数矩阵。

假设 1: $w = w^R + iw^I + jw^J + kw^K$, $w^R, w^I, w^J, w^K \in R$ 。那么 $g_q(w(t)), g_q(w(t-\tau(t)))$ 可以表示为 $g_q(w(t)) = g_q^R(w(t)) + ig_q^I(w(t)) + jg_q^J(w(t)) + kg_q^K(w(t))$, $g_q(w(t-\tau(t)))$ 表示为 $g_q(w(t-\tau(t))) = g_q^R(w(t-\tau(t))) + ig_q^I(w(t-\tau(t))) + jg_q^J(w(t-\tau(t))) + kg_q^K(w(t-\tau(t)))$, 其中 $g_q^l(\cdot): R \rightarrow R$, $q=1, 2, \dots, n$, $l=R, I, J, K$ 满足 $|g_q^l(w^l) - g_q^l(\tilde{w}^l)| \leq \delta_q^l |w^l - \tilde{w}^l|$, 其中 δ_q^l 是常数, 令 $\delta^l = \text{diag}\{\delta_1^l, \delta_2^l, \dots, \delta_n^l\}$ 。

由于四元数不满足交换律, 我们将上述四元数模型转化为实值神经网络模型。

根据四元数的性质和方程(1)可以得到:

$$\begin{aligned}
\frac{dw(t)}{dt} &= -Mw(t) + Ag(w(t)) + Bg(w(t-\tau(t))) + Cu(t) \\
&= \frac{dw^R(t)}{dt} + \frac{dw^I(t)}{dt}i + \frac{dw^J(t)}{dt}j + \frac{dw^K(t)}{dt}k \\
&= -M(w^R(t) + w^I(t)i + w^J(t)j + w^K(t)k) + (A^R + A^I i + A^J j + A^K k) \\
&\quad \times (g^R(w(t)) + g^I(w(t))i + g^J(w(t))j + g^K(w(t))k) + (B^R + B^I i + B^J j + B^K k) \\
&\quad \times (g^R(w(t-\tau(t))) + g^I(w(t-\tau(t)))i + g^J(w(t-\tau(t)))j + g^K(w(t-\tau(t)))k) + (C^R + C^I i + C^J j + C^K k)u(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times (g^R(w(t-\tau(t))) + g^I(w(t-\tau(t)))i + g^J(w(t-\tau(t)))j + g^K(w(t-\tau(t)))k) \\ & + C(u^R(t) + u^I(t)i + u^J(t)j + u^K(t)k) \end{aligned} \quad (2)$$

再运用四元数乘积性质, (2)可以被分解为以下四个等价的实值系统:

$$\begin{cases} \frac{dw^R(t)}{dt} = -Mw^R(t) + A^R g^R(w(t)) - A^I g^I(w(t)) - A^J g^J(w(t)) - A^K g^K(w(t)) \\ \quad + B^R g^R(w(t-\tau(t))) - B^I g^I(w(t-\tau(t))) - B^J g^J(w(t-\tau(t))) - B^K g^K(w(t-\tau(t))) + Cu^R(t) \\ \frac{dw^I(t)}{dt} = -Mw^I(t) + A^R g^I(w(t)) + A^I g^R(w(t)) + A^J g^K(w(t)) - A^K g^J(w(t)) \\ \quad + B^R g^I(w(t-\tau(t))) + B^I g^R(w(t-\tau(t))) + B^J g^K(w(t-\tau(t))) - B^K g^J(w(t-\tau(t))) + Cu^I(t) \\ \frac{dw^J(t)}{dt} = -Mw^J(t) + A^R g^J(w(t)) - A^I g^K(w(t)) + A^J g^R(w(t)) + A^K g^I(w(t)) \\ \quad + B^R g^J(w(t-\tau(t))) - B^I g^K(w(t-\tau(t))) + B^J g^R(w(t-\tau(t))) + B^K g^I(w(t-\tau(t))) + Cu^J(t) \\ \frac{dw^K(t)}{dt} = -Mw^K(t) + A^R g^K(w(t)) + A^I g^J(w(t)) - A^J g^I(w(t)) + A^K g^R(w(t)) \\ \quad + B^R g^K(w(t-\tau(t))) + B^I g^J(w(t-\tau(t))) - B^J g^I(w(t-\tau(t))) + B^K g^R(w(t-\tau(t))) + Cu^K(t) \end{cases} \quad (3)$$

下面我们令 $\tilde{M} = \text{diag}\{M, M, M, M\}$, $W(t) = \left((w^R(t))^T, (w^I(t))^T, (w^J(t))^T, (w^K(t))^T \right)^T$, 激活函数 $G(W(t)) = \left((g^R(w(t)))^T, (g^I(w(t)))^T, (g^J(w(t)))^T, (g^K(w(t)))^T \right)^T$, $\tilde{C} = \text{diag}\{C, C, C, C\}$
 $U(t) = \left((u^R(t))^T, (u^I(t))^T, (u^J(t))^T, (u^K(t))^T \right)^T$, 并且

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A^R & -A^I & -A^J & -A^K \\ A^I & A^R & -A^K & A^J \\ A^J & A^K & A^R & -A^I \\ A^K & -A^J & A^I & A^R \end{pmatrix}, \tilde{B} = \begin{pmatrix} B^R & -B^I & -B^J & -B^K \\ B^I & B^R & -B^K & B^J \\ B^J & B^K & B^R & -B^I \\ B^K & -B^J & B^I & B^R \end{pmatrix}.$$

当 $t = t_k$ 时, $W(t) = \left(H(w^R(t^-)), H(w^I(t^-)), H(w^J(t^-)), H(w^K(t^-)) \right)^T$, 脉冲系数矩阵可以表示为 $\tilde{H} = \text{diag}\{H, H, H, H\}$.

所以方程(1)可以等价于下面的方程

$$\begin{cases} \frac{dW(t)}{dt} = -\tilde{M}W(t) + \tilde{A}G(W(t)) + \tilde{B}G(W(t-\tau(t))) + \tilde{C}U(t), t \neq t_k, \\ W(t) = \tilde{H}W(t^-), t = t_k, \end{cases} \quad (4)$$

定义 1 [27]: 若存在一个 KL 类函数 $\beta: [0, +\infty] \times [0, +\infty] \rightarrow [0, +\infty]$ 和一个 K 类函数 φ , 使得对任意的 $\xi \in C([- \varsigma, 0], R^n)$, $u(t) \in L_\infty^m$ 都有以下不等式成立:

$$|w(t; \xi, u(t))| \leq \beta(\|\xi\|_\tau, t) + \varphi(\|u\|_\infty), t \geq 0, \quad (5)$$

则系统(1)被称为是输入到状态稳定(ISS)的。

定义 2 [28]: 如果存在正常数 N_0 和 τ^* , 则称脉冲时间序列 $\{t_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ 的平均脉冲间隔不小于 τ^* 使得

$$N(T, t) \leq \frac{T-t}{\tau^*} + N_0, \forall T \geq t \geq t_0, \quad (6)$$

其中 $N(T, t)$ 是序列 $\{t_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ 在区间 (t, T) 上出现的脉冲数, N_0 是弹性数。用集合 $F^+[\tau^*, N_0]$ 表示这种脉冲

时间序列。

引理 1 [29]: 对于任意 $a, b \in Q^n$, 正定对称矩阵 $P = P^T > 0$, 则有下列不等式成立:

$$a^*b + b^*a \leq a^*Pa + b^*P^{-1}b.$$

引理 2 [30]: 给定一个实对称矩阵 $S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \in Q^{2n \times 2n}$, 其中 $S_{11}^T = S_{11}, S_{12}^T = S_{21}, S_{22}^T = S_{22}$, 则 $S < 0$

与下列两个条件都等价:

$$(1) S_{22} < 0, S_{11} - S_{12}S_{22}^{-1}S_{12}^T < 0;$$

$$(2) S_{11} < 0, S_{22} - S_{12}^TS_{11}^{-1}S_{12} < 0.$$

引理 3 [31]: 令函数 $z_1(t), z_2(t) \in PC([t_0 - \tilde{\tau}, +\infty), \mathbb{R}_+)$ 和 $\varphi(t) \in PC([t_0, +\infty), \mathbb{R}_+)$ 。假设存在 $\alpha_1 \in \mathbb{R}, \alpha_2 \in \mathbb{R}_+, \tilde{\beta} \in \mathbb{R}_+$ 使得

$$\begin{cases} D^+z_1(t) \leq \alpha_1 z_1(t) + \alpha_2 z_1(t - \tau(t)) + \varphi(t), t \neq t_k, t \geq t_0, \\ z_1(t_k) \leq \tilde{\beta} z_1(t_k^-), k \in \mathbb{Z}_+, \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} D^+z_2(t) > \alpha_1 z_2(t) + \alpha_2 z_2(t - \tau(t)) + \varphi(t), t \neq t_k, t \geq t_0, \\ z_2(t_k) > \tilde{\beta} z_2(t_k^-), k \in \mathbb{Z}_+, \end{cases}$$

则对于任意 $t_0 - \tilde{\tau} \leq t \leq t_0$ 有 $z_1(t) \leq z_2(t)$, 那么意味着对于任意 $t \geq t_0$ 都有 $z_1(t) \leq z_2(t)$ 。

引理 4 [26]: 假设存在一个函数 $z(t) \in PC([t_0 - \tilde{\tau}, +\infty), \mathbb{R}_+)$ 和常数 $\alpha_1 \in \mathbb{R}, \alpha_2 \in \mathbb{R}_+, \tilde{\beta} \in \mathbb{R}_+$, 使得

$$\begin{cases} D^+z(t) \leq \alpha_1 z(t) + \alpha_2 z(t - \tau(t)) + \varphi(t), t \neq t_k, t \geq t_0, \\ z(t_k) \leq \tilde{\beta} z(t_k^-), k \in \mathbb{Z}_+, \end{cases}$$

则对于任意 $t \geq t_0$ 都有以下式子成立:

$$z(t) \leq \tilde{\beta}^{N(t, t_0)} z(t_0) e^{\alpha_1(t-t_0)} + \int_{t_0}^t \tilde{\beta}^{N(t, s)} e^{\alpha_1(t-s)} [\alpha_2 z(s - \tau(s)) + \varphi(s)] ds. \quad (7)$$

证明: 由(7)得:

$$\frac{d}{dt} (e^{-\alpha_1(t-t_0)} z(t)) \leq e^{-\alpha_1(t-t_0)} [\alpha_2 z(t - \tau(t)) + \varphi(t)]$$

对上式两边从 t_0 到 t 积分:

$$z(t) \leq z(t_0) e^{\alpha_1(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{\alpha_1(t-s)} [\alpha_2 z(s - \tau(s)) + \varphi(s)] ds,$$

其中 $t \in [t_0, t_1)$, 类似地, 对于任意 $t \in [t_k, t_{k+1}), k \in N$, 有:

$$z(t) \leq z(t_k) e^{\alpha_1(t-t_k)} + \int_{t_k}^t e^{\alpha_1(t-s)} [\alpha_2 z(s - \tau(s)) + \varphi(s)] ds,$$

$$z(t_k^-) \leq z(t_{k-1}) e^{\alpha_1(t_k-t_{k-1})} + \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{\alpha_1(t-s)} [\alpha_2 z(s - \tau(s)) + \varphi(s)] ds,$$

由(7)可得:

$$\begin{aligned} z(t) &\leq \tilde{\beta} z(t_k^-) e^{\alpha_1(t-t_k)} + \int_{t_k}^t e^{\alpha_1(t-s)} [\alpha_2 z(s - \tau(s)) + \varphi(s)] ds \\ &\leq \tilde{\beta} z(t_{k-1}) e^{\alpha_1(t-t_{k-1})} + \tilde{\beta} \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{\alpha_1(t-s)} [\alpha_2 z(s - \tau(s)) + \varphi(s)] ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{t_k}^t e^{\alpha_1(t-s)} [\alpha_2 z(s-\tau(s)) + \varphi(s)] ds \\
& \leq \tilde{\beta}^k z(t_0) e^{\alpha_1(t-t_0)} + \sum_{i=1}^k \tilde{\beta}^{k-i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{\alpha_1(t-s)} [\alpha_2 z(s-\tau(s)) + \varphi(s)] ds \\
& + \int_{t_k}^t e^{\alpha_1(t-s)} [\alpha_2 z(s-\tau(s)) + \varphi(s)] ds.
\end{aligned}$$

证明完成。

注 引理 4 的证明与 Wu X 和 Tang Y 等人在探究线性假设下脉冲随机时滞系统的输入到状态稳定性中的引理 2 证明类似，主要不同在于 α_1 是实常数，有更广泛的应用。

3. 理论结果

定理 1: 给定矩阵 L ，若存在矩阵 $E > 0$ ， $F > 0$ ，和对角阵 $P_i > 0, i=1, 2$ ，以及正常数 $N_0, \tau^*, \lambda_1, \lambda_2$ ，并且 $\mu > 1$ 使得 $\tau^* > \ln \mu / (\lambda_1 - \mu^{N_0} \lambda_2) > 0$ ， $L^T P_2 L < \lambda_2 E$ ，

$$\begin{pmatrix} \Omega & E\tilde{A} & E\tilde{B} & E\tilde{C} \\ * & -P_1 & 0 & 0 \\ * & * & -P_2 & 0 \\ * & * & * & -F \end{pmatrix} < 0 \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} -\mu E & \tilde{H}^T E \\ * & -E \end{pmatrix} \leq 0 \quad (9)$$

其中 $\Omega = -E\tilde{M} - \tilde{M}^T E + L^T P_1 L + \lambda_1 E$ ， $L = \text{diag}\{\delta_q^I, \delta_q^I, \delta_q^I, \delta_q^I, \delta_q^I, \delta_q^I, \delta_q^I, \delta_q^I\}$ ，则系统(4)在 $F^+[\tau^*, N_0]$ 上是输入到状态稳定(ISS)。

证明: 考虑上述系统(4)的一个 Lyapunov 函数， $V(t) = W^T(t)EW(t)$ ，对于 $t \in [t_{k-1}, t_k], k \in \mathbb{Z}_+$ ，沿着时间 t 对上述 Lyapunov 函数进行求导可以得到：

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) & = 2W^T(t)E\dot{W}(t) \\
& \leq W^T(t)(-E\tilde{M} - \tilde{M}^T E)W(t) + W^T(t)(L^T P_1 L + E\tilde{A}P_1^{-1}\tilde{A}^T E)W(t) \\
& \quad + W^T(t)E\tilde{B}P_2^{-1}\tilde{B}^T EW(t) + W^T(t-\tau(t))L^T P_2 LW(t-\tau(t)) + 2W^T(t)E\tilde{C}U(t) \\
& \leq W^T(\Omega + \Theta + E\tilde{C}F^{-1}\tilde{C}E)W(t) - \lambda_1 W^T(t)EW(t) \\
& \quad + \lambda_2 W^T(t-\tau(t))EW(t-\tau(t)) + U^T(t)FU(t) \\
& \leq -\lambda_1 W^T(t)EW(t) + \lambda_2 W^T(t-\tau(t))EW(t-\tau(t)) + \varphi(\|U(t)\|) \\
& \leq -\lambda_1 V(t) + \lambda_2 V(t-\tau(t)) + \varphi(\|U(t)\|) \quad (10)
\end{aligned}$$

其中 $\Theta = E\tilde{A}P_1^{-1}\tilde{A}^T E + E\tilde{B}P_2^{-1}\tilde{B}^T E$ 并且 $\varphi(\|U(t)\|) = \lambda_{\max}(F)\|U(t)\|^2$ 。

当 $t = t_k$ 时， $k \in \mathbb{Z}_+$ ，由(9)可以得到：

$$\begin{aligned}
V(t_k) & = W^T(t_k)EW(t_k) \\
& = W^T(t_k^-)\tilde{H}^T E\tilde{H}W(t_k^-) \\
& \leq \mu W^T(t_k^-)EW(t_k^-) = \mu V(t_k^-) \quad (11)
\end{aligned}$$

由(10)(11)，以及引理 4 我们可以得到下面的比较系统，

$$\begin{aligned}
\dot{v}(t) &= -\lambda_1 v(t) + \lambda_2 v(t - \tau(t)) + \varphi(\|U(t)\|) + \varepsilon, t \neq t_k \\
v(t_k) &= \mu V(t_k^-), k \in \mathbb{Z}_+ \\
v(s) &= \lambda_{\max}(E) \|\chi(s)\|^2, s \in [t_0 - \tilde{\tau}, t_0].
\end{aligned} \tag{12}$$

设 $v(t)_{\max}$ 是上述系统对应的最大解, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 由引理 3 得: $V(t) \leq v(t) \leq v(t)_{\max}, t \geq t_0$, 那么由引理 4 可得:

$$\begin{aligned}
v(t)_{\max} &\leq \mu^{N(t, t_0)} v(t_0)_{\max} e^{-\lambda_1(t-t_0)} + \int_{t_0}^t \mu^{N(t, s)} e^{-\lambda_1(t-s)} \\
&\quad \times [\lambda_2 v(s - \tau(s)) + \varphi(\|U(s)\|) + \varepsilon] ds, t \geq t_0
\end{aligned} \tag{13}$$

由定义 2 可得:

$$\begin{aligned}
e^{-\lambda_1(t-s)} \mu^{N(t, s)} &\leq e^{-\lambda_1(t-s)} \mu^{\frac{t-s}{\tau^*} + N_0} \\
&= e^{-\lambda_1(t-s)} e^{\left(-\lambda_1 + \frac{\ln \mu}{\tau^*}\right)(t-s)} \mu^{N_0} \\
&= \eta e^{-\lambda_3(t-s)}
\end{aligned} \tag{14}$$

其中 $\lambda_3 = \lambda_1 - \frac{\ln \mu}{\tau^*} > 0, \eta = \mu^{N_0}$ 。

将比较系统(12)和(14)代入到(13)中可得:

$$\begin{aligned}
v(t)_{\max} &\leq \eta e^{-\lambda_3(t-t_0)} v(t_0)_{\max} + \int_{t_0}^t \eta e^{-\lambda_3(t-s)} [\lambda_2 v(s - \tau(s)) + \varphi(\|U(s)\|) + \varepsilon] ds \\
&\leq \alpha e^{-\lambda_3(t-t_0)} + \int_{t_0}^t \eta e^{-\lambda_3(t-s)} [\lambda_2 v(s - \tau(s)) + \varphi(\|U(s)\|) + \varepsilon] ds
\end{aligned} \tag{15}$$

其中 $\alpha = \eta \lambda_{\max}(E) \|\chi(s)\|_{\tau}^2, s \in [t_0 - \tilde{\tau}, t_0]$ 。令 $\delta(\lambda) = \eta \lambda_2 e^{\lambda \tilde{\tau}} + \lambda - \lambda_3$, 那么由 $\tau^* > \ln \mu / (\lambda_1 - \mu^{N_0} \lambda_2) > 0$ 可得, $\delta(0) = \eta \lambda_2 - \lambda_3 < 0$, 并且 $\delta(+\infty) = +\infty$, $\delta'(\lambda) = 1 - \tilde{\tau} \eta \lambda_2 e^{\lambda \tilde{\tau}} > 0$ 。那么存在一个常数 $\lambda > 0$ 使得 $\eta \lambda_2 e^{\lambda \tilde{\tau}} + \lambda - \lambda_3 = 0$ 。设 λ_4 是一个正常数, 并且 $\lambda_4 \in (0, \lambda)$, 则可得 $0 < \eta \lambda_2 e^{\lambda_4 \tilde{\tau}} = \lambda_3 - \lambda < \lambda_3 - \lambda_4$ 。

下面为证系统(4)是 ISS, 则需要证明当 $t \geq t_0 - \tilde{\tau}$ 时, 以下式子成立:

$$v(t)_{\max} < \alpha e^{-\lambda(t-t_0)} + \gamma \int_{t_0}^t e^{-\lambda_4(t-s)} \varphi(\|U(s)\|) ds + \frac{\eta \varepsilon}{\lambda_3 - \eta \lambda_2} \tag{16}$$

其中 γ 是一个正常数, 满足 $\gamma \geq \frac{\eta(\lambda_3 - \lambda_4)}{\lambda_3 - \lambda_4 - \eta \lambda_2 e^{\lambda_4 \tilde{\tau}}}$ 。

下面我们设 $\varphi(\|U(t)\|) \equiv 0, t \in [t_0 - \tilde{\tau}, t_0]$, 并给出以下定义

$$\varphi(t) \triangleq \alpha e^{-\lambda(t-t_0)} + \gamma \int_{t_0}^t \eta e^{-\lambda_4(t-s)} \varphi(\|U(s)\|) ds + \frac{\eta \varepsilon}{\lambda_3 - \eta \lambda_2}$$

对于 $t \in [t_0 - \tilde{\tau}, t_0]$, 因为 $\eta = \mu^{N_0} > 1$, 那么

$$\begin{aligned}
v(t)_{\max} &= \lambda_{\max}(E) \|\chi(t)\|^2 \\
&\leq \lambda_{\max}(E) \|\chi(s)\|_{\tau}^2 = \alpha < \varphi(t).
\end{aligned}$$

对于 $t > t_0$ 时, 若(16)不成立, 则可定义 $t^* = \inf \{t > t_0, v(t)_{\max} \geq \varphi(t)\}$ 。如果 t^* 不是一个脉冲点, 则 $v(t^*)_{\max} = \varphi(t^*)$; 如果 t^* 是一个脉冲点, 则 $v(t^*)_{\max} \geq \varphi(t^*)$ 。所以

$$\begin{aligned} v(t)_{\max} &< \varphi(t), t \in [t_0 - \tilde{\tau}, t^*] \\ v(t^*)_{\max} &\geq \varphi(t^*). \end{aligned} \quad (17)$$

由(15)和(17), 我们可以得到

$$\begin{aligned} v(t^*)_{\max} &\leq \alpha e^{-\lambda_3(t^*-t_0)} + \int_{t_0}^{t^*} \eta e^{-\lambda_3(t^*-s)} \left[\lambda_2 v(s-\tau(s))_{\max} + \varphi(\|U(s)\|) + \varepsilon \right] ds \\ &\leq \alpha e^{-\lambda_3(t^*-t_0)} + \int_{t_0}^{t^*} \eta e^{-\lambda_3(t^*-s)} \left(\lambda_2 \alpha e^{-\lambda(s-\tau(s)-t_0)} + \frac{\lambda_2 \eta \varepsilon}{\lambda_3 - \eta \lambda_2} + \varphi(\|U(s)\|) + \varepsilon \right) ds \\ &\quad + \int_{t_0}^{t^*} \gamma \eta e^{-\lambda_3(t^*-s)} \lambda_2 \int_{t_0}^{s-\tau(s)} e^{-\lambda_4(s-\tau(s)-\zeta)} \varphi(\|U(s)\|) d\zeta ds + \int_{t_0}^{t^*} \eta e^{-\lambda_3(t^*-s)} \varphi(\|U(s)\|) ds \\ &\leq \alpha e^{-\lambda_3(t^*-t_0)} + \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \int_{t_0}^{t^*} \eta \lambda_2 \alpha e^{(\lambda_3 - \lambda)s + \lambda(\tilde{\tau} + t_0) - \lambda_3 t^*} ds, \quad \Gamma_2 = \int_{t_0}^{t^*} \eta e^{-\lambda_3(t^*-s)} \left(\frac{\lambda_2 \eta \varepsilon}{\lambda_3 - \eta \lambda_2} + \varepsilon \right) ds \\ \Gamma_3 &= \int_{t_0}^{t^*} \gamma \eta e^{-\lambda_3(t^*-s)} \lambda_2 \int_{t_0}^{s-\tau(s)} e^{-\lambda_4(s-\tau(s)-\zeta)} \varphi(\|U(s)\|) d\zeta ds, \quad \Gamma_4 = \int_{t_0}^{t^*} \eta e^{-\lambda_3(t^*-s)} \varphi(\|U(s)\|) ds. \end{aligned}$$

由于 $\eta \lambda_2 e^{\lambda \tilde{\tau}} + \lambda - \lambda_3 = 0$, 则

$$\begin{aligned} \Gamma_1 + \Gamma_2 &= \int_{t_0}^{t^*} \eta \lambda_2 \alpha e^{(\lambda_3 - \lambda)s + \lambda(\tilde{\tau} + t_0) - \lambda_3 t^*} ds + \int_{t_0}^{t^*} \eta e^{-\lambda_3(t^*-s)} \left(\frac{\lambda_2 \eta \varepsilon}{\lambda_3 - \eta \lambda_2} + \varepsilon \right) ds \\ &= \frac{\eta \lambda_2 \alpha e^{\lambda \tilde{\tau}}}{\lambda_3 - \lambda} (e^{-\lambda(t^*-t_0)} - e^{-\lambda_3(t^*-t_0)}) + \frac{\eta \varepsilon}{\lambda_3 - \eta \lambda_2} (1 - e^{-\lambda_3(t^*-t_0)}) \\ &\leq \alpha \left(e^{-\lambda(t^*-t_0)} - e^{-\lambda_3(t^*-t_0)} \right) + \frac{\eta \varepsilon}{\lambda_3 - \eta \lambda_2} \\ \Gamma_3 + \Gamma_4 &= \int_{t_0}^{t^*} \gamma \eta e^{-\lambda_3(t^*-s)} \lambda_2 \int_{t_0}^{s-\tau(s)} e^{-\lambda_4(s-\tau(s)-\zeta)} \varphi(\|U(s)\|) d\zeta ds + \int_{t_0}^{t^*} \eta e^{-\lambda_3(t^*-s)} \varphi(\|U(s)\|) ds \\ &\leq \left(\frac{\eta \lambda_2 e^{\lambda \tilde{\tau}} \gamma}{\lambda_3 - \lambda} + \eta \right) \int_{t_0}^{t^*} \eta e^{-\lambda_4(t^*-s)} \varphi(\|U(s)\|) ds \\ &\leq \gamma \int_{t_0}^{t^*} \eta e^{-\lambda_4(t^*-s)} \varphi(\|U(s)\|) ds \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} v(t)_{\max} &\leq \alpha e^{-\lambda_3(t^*-t_0)} + \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 \\ &\leq \alpha e^{-\lambda_3(t^*-t_0)} + \alpha \left(e^{-\lambda(t^*-t_0)} - e^{-\lambda_3(t^*-t_0)} \right) + \frac{\eta \varepsilon}{\lambda_3 - \eta \lambda_2} + \gamma \int_{t_0}^{t^*} \eta e^{-\lambda_4(t^*-s)} \varphi(\|U(s)\|) ds \end{aligned}$$

则 $v(t^*)_{\max} < \varphi(t^*)$ 成立, 与(17)矛盾, 所以(16)成立. 在(16)中, 令 $\varepsilon \rightarrow 0^+$, 那么

$$v(t)_{\max} < \alpha e^{-\lambda(t-t_0)} + \gamma \int_{t_0}^t \eta e^{-\lambda_4(t-s)} \varphi(\|U(s)\|) ds, \quad t \geq t_0$$

所以

$$\lambda_{\min}(E) \|W(t)\|^2 \leq V(t) \leq v(t)_{\max} \leq \varphi(t), \quad \forall t \geq t_0. \quad (18)$$

则对于任意 $t \geq t_0$ 都有

$$\begin{aligned}\|W(t)\|^2 &\leq \frac{\lambda_{\max}(E)}{\lambda_{\min}(E)} \eta \|\chi(s)\|_{\tau}^2 e^{-\lambda(t-t_0)} + \gamma \frac{\lambda_{\max}(F)}{\lambda_{\min}(E)} \int_{t_0}^t e^{-\lambda_4(t-s)} \|U(s)\|^2 ds \\ &\leq \frac{\lambda_{\max}(E)}{\lambda_{\min}(E)} \eta \|\chi(s)\|_{\tau}^2 e^{-\lambda(t-t_0)} + \gamma \frac{\lambda_{\max}(F)}{\lambda_{\min}(E)} \|U(s)\|_{[t_0,t]}^2 \int_{t_0}^t e^{-\lambda_4(t-s)} ds \\ &\leq \frac{\eta \lambda_{\max}(E)}{\lambda_{\min}(E)} \|\chi(s)\|_{\tau}^2 e^{-\lambda(t-t_0)} + \frac{\gamma \lambda_{\max}(F)}{\lambda_4 \lambda_{\min}(E)} \|U(s)\|_{[t_0,t]}^2\end{aligned}$$

所以

$$\|W(t)\| \leq p_1 \|\chi(s)\|_{\tau} e^{-\lambda(t-t_0)/2} + p_2 \|U(s)\|_{[t_0,t]}, \quad \forall t \geq t_0$$

$$\text{其中 } p_1 = \sqrt{\frac{\eta \lambda_{\max}(E)}{\lambda_{\min}(E)}} \quad p_2 = \sqrt{\frac{\gamma \lambda_{\max}(F)}{\lambda_4 \lambda_{\min}(E)}}.$$

所以, 系统(4)在 $F^+[\tau^*, N_0]$ 上是输入到状态稳定(ISS)。

4. 数值模拟

在本节中, 我们通过讨论具有脉冲的四元数时滞神经网络的 ISS 来证明理论结果的正确性和有效性。

考虑以下具有脉冲的四元数时滞神经网络:

$$\begin{cases} \frac{dW(t)}{dt} = -\tilde{M}W(t) + \tilde{A}G(W(t)) + \tilde{B}G(W(t-\tau(t))) + \tilde{C}U(t), t \neq t_k, \\ W(t) = \tilde{H}W(t^-), t = t_k, \end{cases} \quad (19)$$

其中, 设

$$\begin{aligned}A &= \begin{pmatrix} -0.1-0.4i-0.1j-0.5k & -0.4+0.2i-0.4j+0.2k \\ -0.3+0.1i-0.2j+0.1k & -0.7-0.1i-0.2j-0.1k \end{pmatrix} \\ B &= \begin{pmatrix} 0.2-0.1i+0.1j+0.1k & 0.2+0.1i-0.2j-0.3k \\ -0.1+0.1i-0.1j-0.2k & 0.3-0.3i+0.1j+0.2k \end{pmatrix} \\ M &= \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

那么, 根据四元数转化规则,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -0.1 & -0.4 & 0.4 & -0.2 & 0.1 & 0.4 & 0.5 & -0.2 \\ -0.3 & -0.7 & -0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & -0.1 & 0.1 \\ -0.4 & 0.2 & -0.1 & -0.4 & 0.5 & -0.2 & -0.1 & -0.4 \\ 0.1 & -0.1 & -0.3 & -0.7 & -0.1 & 0.1 & -0.2 & -0.2 \\ -0.1 & -0.4 & -0.5 & 0.2 & -0.1 & -0.4 & 0.4 & -0.2 \\ -0.2 & -0.2 & 0.1 & -0.1 & -0.3 & -0.7 & -0.1 & 0.1 \\ -0.5 & 0.2 & 0.1 & 0.4 & -0.4 & 0.2 & -0.1 & -0.4 \\ 0.1 & -0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.1 & -0.1 & -0.3 & -0.7 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.1 & -0.1 & -0.1 & 0.2 & -0.1 & 0.3 \\ -0.1 & 0.3 & 0.1 & 0.3 & 0.1 & -0.1 & 0.2 & -0.2 \\ -0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & -0.1 & 0.3 & 0.1 & -0.2 \\ 0.1 & -0.3 & -0.1 & 0.3 & 0.2 & -0.2 & -0.1 & 0.1 \\ 0.1 & -0.2 & 0.1 & -0.3 & 0.2 & 0.2 & 0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0.1 & -0.2 & 0.2 & -0.1 & 0.3 & -0.1 & 0.3 \\ 0.1 & -0.3 & -0.1 & 0.2 & -0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.2 \\ -0.2 & 0.2 & 0.1 & -0.1 & 0.1 & -0.3 & -0.1 & 0.3 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}$$

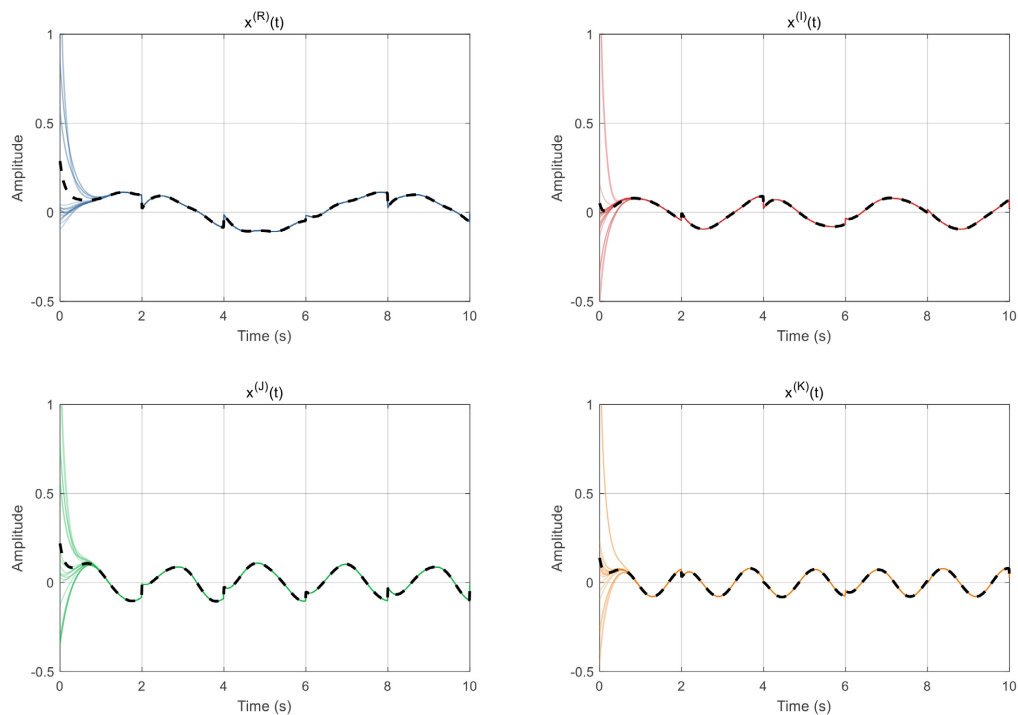


Figure 1. Trajectory of $x^{(R)}(t), x^{(I)}(t), x^{(J)}(t), x^{(K)}(t)$ of system (19)

图 1. 系统(19)的 $x^{(R)}(t), x^{(I)}(t), x^{(J)}(t), x^{(K)}(t)$ 的轨迹

并且 $\tilde{M} = \text{diag}\{8, 9, 8, 9, 8, 9, 8, 9\}$, $\tilde{C} = \text{diag}\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$, 激活函数 $G = \tanh$, 输入函数为 $U(t) = 0.6(\sin(t), 2\sin(2t), 3\sin(3t), 4\sin(4t), 5\sin(5t), 6\sin(6t), 7\sin(7t), 8\sin(8t))^T$, 时滞函数为 $\tau(t) = 0.25\cos t + 0.75$, 脉冲时刻为 $t_k = 2.5k (k = 1, 2, \dots)$ 。容易验证当

$L = \text{diag}\{1.05, 1.05, 1.05, 1.05, 1.05, 1.05, 1.05, 1.05\}$ 时满足假设, 且 $\tau^* = 0.2, \mu = 1.5, N_0 = 2, \lambda_1 = 3.5, \lambda_2 = 0.4$, 通过利用 MATLAB 工具箱, 满足定理 1 的所有条件, 并且符合定义 1 的要求, 因此系统(19)是 ISS 的(见图 1)。

5. 结论

本文通过将四元数神经网络分解为四个实值神经网络进行分析, 研究了具有脉冲和时滞的四元数神经网络的输入到状态稳定, 然后通过比较原理和平均脉冲间隔方法, 以及利用 Lyapunov 函数和一些不等式, 提出了一些充分的条件, 以确保所研究的系统是输入到状态稳定(ISS)。最后, 给出了一个数值模拟例子证明了理论结果的正确性和有效性。

参考文献

- [1] 张守武, 王恒, 陈鹏, 等. 神经网络在无人驾驶车辆运动控制中的应用综述[J]. 工程科学学报, 2022, 44(2): 235-243.
- [2] Mohareri, O., Dhaouadi, R. and Rad, A.B. (2012) Indirect Adaptive Tracking Control of a Nonholonomic Mobile Robot via Neural Networks. *Neurocomputing*, **88**, 54-66. <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2011.06.035>
- [3] Shitong, W. and Min, W. (2006) A New Detection Algorithm (NDA) Based on Fuzzy Cellular Neural Networks for White Blood Cell Detection. *IEEE Transactions on Information Technology in Biomedicine*, **10**, 5-10. <https://doi.org/10.1109/titb.2005.855545>
- [4] Cao, J.D. (2001) Global Stability Conditions for Delayed CNNs. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, **48**, 1330-1333. <https://doi.org/10.1109/81.964422>
- [5] Xiang, M., Scalzo Dees, B. and Mandic, D.P. (2019) Multiple-Model Adaptive Estimation for 3-D and 4-D Signals: A Widely Linear Quaternion Approach. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, **30**, 72-84. <https://doi.org/10.1109/tnnls.2018.2829526>
- [6] Ayrulu, B. and Barshan, B. (2001) Neural Networks for Improved Target Differentiation and Localization with Sonar. *Neural Networks*, **14**, 355-373. [https://doi.org/10.1016/s0893-6080\(01\)00017-x](https://doi.org/10.1016/s0893-6080(01)00017-x)
- [7] Zou, C., Kou, K.I. and Wang, Y. (2016) Quaternion Collaborative and Sparse Representation with Application to Color Face Recognition. *IEEE Transactions on Image Processing*, **25**, 3287-3302. <https://doi.org/10.1109/tip.2016.2567077>
- [8] Rajchakit, G., Chanthorn, P., Niezabitowski, M., Raja, R., Baleanu, D. and Pratap, A. (2020) Impulsive Effects on Stability and Passivity Analysis of Memristor-Based Fractional-Order Competitive Neural Networks. *Neurocomputing*, **417**, 290-301. <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2020.07.036>
- [9] Isokawa, T., Kusakabe, T., Matsui, N. and Peper, F. (2003) Quaternion Neural Network and Its Application. *Knowledge-Based Intelligent Information and Engineering Systems: 7th International Conference, KES 2003, Oxford, September 2003*, 318-324. https://doi.org/10.1007/978-3-540-45226-3_44
- [10] Kusamichi, H., Isokawa, T., Matsui, N., et al. (2004) A New Scheme for Color Night Vision by Quaternion Neural Network. *Proceedings of the 2nd International Conference on Autonomous Robots and Agents*, New Orleans, 26 April-1 May 2004, 1315.
- [11] Pei, S.-C. and Cheng, C.-M. (1997) A Novel Block Truncation Coding of Color Images Using a Quaternion-Moment-Preserving Principle. *IEEE Transactions on Communications*, **45**, 583-595. <https://doi.org/10.1109/26.592558>
- [12] Shu, H., Song, Q., Liu, Y., Zhao, Z. and Alsaadi, F.E. (2017) Global μ -Stability of Quaternion-Valued Neural Networks with Non-Differentiable Time-Varying Delays. *Neurocomputing*, **247**, 202-212. <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2017.03.052>
- [13] Zhang, D., Kou, K.I., Liu, Y. and Cao, J. (2017) Decomposition Approach to the Stability of Recurrent Neural Networks with Asynchronous Time Delays in Quaternion Field. *Neural Networks*, **94**, 55-66. <https://doi.org/10.1016/j.neunet.2017.06.014>
- [14] Qi, X., Bao, H. and Cao, J. (2019) Exponential Input-to-State Stability of Quaternion-Valued Neural Networks with Time Delay. *Applied Mathematics and Computation*, **358**, 382-393. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.04.045>
- [15] Zhu, J. and Sun, J. (2018) Stability of Quaternion-Valued Impulsive Delay Difference Systems and Its Application to Neural Networks. *Neurocomputing*, **284**, 63-69. <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2018.01.018>
- [16] Yang, X., Li, C., Song, Q., Li, H. and Huang, J. (2019) Effects of State-Dependent Impulses on Robust Exponential Stability of Quaternion-Valued Neural Networks under Parametric Uncertainty. *IEEE Transactions on Neural Networks*

-
- and Learning Systems, **30**, 2197-2211. <https://doi.org/10.1109/tnnls.2018.2877152>
- [17] Popa, C. and Kaslik, E. (2018) Multistability and Multiperiodicity in Impulsive Hybrid Quaternion-Valued Neural Networks with Mixed Delays. *Neural Networks*, **99**, 1-18. <https://doi.org/10.1016/j.neunet.2017.12.006>
 - [18] Zhong, S. and Liu, X. (2007) Exponential Stability and Periodicity of Cellular Neural Networks with Time Delay. *Mathematical and Computer Modelling*, **45**, 1231-1240. <https://doi.org/10.1016/j.mcm.2006.10.004>
 - [19] Yunquan, K. and Chunfang, M. (2012) Stability and Existence of Periodic Solutions in Inertial BAM Neural Networks with Time Delay. *Neural Computing and Applications*, **23**, 1089-1099. <https://doi.org/10.1007/s00521-012-1037-8>
 - [20] Liu, Y., Zhang, D. and Lu, J. (2016) Global Exponential Stability for Quaternion-Valued Recurrent Neural Networks with Time-Varying Delays. *Nonlinear Dynamics*, **87**, 553-565. <https://doi.org/10.1007/s11071-016-3060-2>
 - [21] Li, H., Jiang, H. and Cao, J. (2020) Global Synchronization of Fractional-Order Quaternion-Valued Neural Networks with Leakage and Discrete Delays. *Neurocomputing*, **385**, 211-219. <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2019.12.018>
 - [22] Tu, Z., Yang, X., Wang, L. and Ding, N. (2019) Stability and Stabilization of Quaternion-Valued Neural Networks with Uncertain Time-Delayed Impulses: Direct Quaternion Method. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, **535**, Article ID: 122358. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.122358>
 - [23] Jiang, Z. and Wang, Y. (2001) Input-to-State Stability for Discrete-Time Nonlinear Systems. *Automatica*, **37**, 857-869. [https://doi.org/10.1016/s0005-1098\(01\)00028-0](https://doi.org/10.1016/s0005-1098(01)00028-0)
 - [24] Wang, Y., Sun, X. and Wu, B. (2015) Lyapunov-Krasovskii Functionals for Input-to-State Stability of Switched Nonlinear Systems with Time-Varying Input Delay. *IET Control Theory & Applications*, **9**, 1717-1722. <https://doi.org/10.1049/iet-cta.2014.0526>
 - [25] Angeli, D., Sontag, E.D. and Wang, Y. (2000) A Characterization of Integral Input-to-State Stability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **45**, 1082-1097. <https://doi.org/10.1109/9.863594>
 - [26] Wu, X., Tang, Y. and Zhang, W. (2016) Input-to-State Stability of Impulsive Stochastic Delayed Systems under Linear Assumptions. *Automatica*, **66**, 195-204. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2016.01.002>
 - [27] Wang, Y., Li, X. and Song, S. (2022) Input-to-State Stabilization of Nonlinear Impulsive Delayed Systems: An Observer-Based Control Approach. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, **9**, 1273-1283. <https://doi.org/10.1109/jas.2022.105422>
 - [28] Yang, Z., Zhou, W. and Huang, T. (2013) Exponential Input-to-State Stability of Recurrent Neural Networks with Multiple Time-Varying Delays. *Cognitive Neurodynamics*, **8**, 47-54. <https://doi.org/10.1007/s11571-013-9258-9>
 - [29] Hespanha, J.P., Liberzon, D. and Teel, A.R. (2008) Lyapunov Conditions for Input-to-State Stability of Impulsive Systems. *Automatica*, **44**, 2735-2744. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2008.03.021>
 - [30] Chen, X., Li, Z., Song, Q., Hu, J. and Tan, Y. (2017) Robust Stability Analysis of Quaternion-Valued Neural Networks with Time Delays and Parameter Uncertainties. *Neural Networks*, **91**, 55-65. <https://doi.org/10.1016/j.neunet.2017.04.006>
 - [31] Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. and Balakrishnan, V. (1994) Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Society for Industrial and Applied Mathematics. <https://doi.org/10.1137/1.9781611970777>