Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(4), 394-408
Published Online April 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.154141

Hans汉斯

Dini型多线性极大奇异积分算子与Lipschitz函数生成的广义交换子的有界性

卢璟瑶

牡丹江师范学院数学科学学院，黑龙江 牡丹江

收稿日期：2025年3月3日；录用日期：2025年4月16日；发布日期：2025年4月29日

摘 要

设T是核满足Dini条件的多线性奇异积分算子，T^*是T 的极大算子。$T^*_{\vec{b},S}$是T^*与一类可测函数$\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$生成的广义交换子。本文讨论了当$\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$属于Lipschitz空间，$T^*_{\vec{b},S}$在Lebesgue 空间的有界性。

关键词

奇异积分算子，广义交换子，Lipschitz函数，多线性算子

Boundedness of Generalized Commutators with Dini Type Multilinear Maximal Calderón-Zygmund Operators and Lipschitz Functions

Jingyao Lu

Department of Mathematics, Mudanjiang Normal University, Mudanjiang Heilongjiang

Received: Mar. 3^{rd}, 2025; accepted: Apr. 16^{th}, 2025; published: Apr. 29^{th}, 2025

文章引用: 卢璟瑶. Dini型多线性极大奇异积分算子与Lipschitz函数生成的广义交换子的有界性[J]. 理论数学, 2025, 15(4): 394-408. DOI: 10.12677/pm.2025.154141

Abstract

Let T be an m-linear Calderón-Zygmund operator with kernel satisfying Dini-type condition, T^* be the maximal operator of T. $T^*_{\vec{b},S}$ is the generalized commutator of T^* with a class of measurable functions $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$. In this paper, we discuss the boundedness of $T^*_{\vec{b},S}$ on Lebesgue spaces when $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ belongs to Lipschitz spaces.

Keywords

Singular Integral Operator, Generalized Commutator, Lipschitz Function, Multilinear Operator

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

自 Calderón 和 Zygmund [1] 开创奇异积分算子理论以来, 具有标准核的 Calderón-Zygmund 算子及其推广得到了广泛研究. 1972 年, Fefferman 和 Stein [2] 证明了极大奇异积分算子在 L^p 空间 $(0 < p < \infty)$ 上的有界性. 1993 年,Buckley [3] 研究了极大奇异积分算子在加权 L^p 空间中的有界性. 多线性极大奇异积分算子 T^* 是极大奇异积分算子的推广, 定义为 $T^*(\vec{f})(x) = \sup_{\delta>0}\left|T_\delta(f_1,\ldots,f_m)(x)\right|$, 其中 T_δ 是 T 的截断算子, 即,

$$T_\delta(f_1,\ldots,f_m)(x) = \int_{\sum_{j=1}^{m}|x-y_j|^2>\delta^2} K(x,y_1,\ldots,y_m)f_1(y_1)\cdots f_m(y_m)\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_m.$$

交换子与奇异积分算子之间存在紧密联系. 1989 年, Segovia 和 Torrea 在文 [4] 中对 T_b^* 的加权强有界性展开探讨. 2000 年, Alphonse 在文 [5] 中给出了 T_b^* 的弱端点估计. 2006 年, Zhang 在文 [6] 中研究了 $T_{\vec{b}}^*$ 的加权估计. 2013 年, Xue 在文 [7] 中进一步研究了多线性算子 T^* 的迭代交换子 $T^*_{\prod\vec{b}}$, 并建立了其加权估计及加权弱端点估计. 2016 年, Xue 和 Yan 在文 [8] 中引入了一类多线性奇异积分算子的广义交换子, 定义如下:

定义1.1. [8] 设 T 是一个核为标准核的 m-线性 Calderón-Zygmund 算子. 若 S 是 $Z^+ \times \{1,\dots,m\}$ 的有限子集, $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是一类可测函数. T 的交换子 $T_{\vec{b},S}$ 和它的极大算子 $T^*_{\vec{b},S}$ 定义为

$$T_{\vec{b},S}(\vec{f})(x) = \int_{\mathbb{R}^{nm}} \prod_{(i,j)\in S} \big[b_i(x) - b_i(y_j)\big] K(x,y_1,\dots,y_m) \prod_{j=1}^{m} f_j(y_j)\mathrm{d}\vec{y} \tag{1}$$

和

$$T^*_{\vec{b},S}(\vec{f})(x) = \sup_{\delta>0}\left| \int_{(\sum_{j=1}^{m}|x-y_j|^2)^{1/2}>\delta} \prod_{(i,j)\in S} \big[b_i(x) - b_i(y_j)\big] K(x,y_1,\dots,y_m) \prod_{j=1}^{m} f_j(y_j)\mathrm{d}\vec{y}\right|, \tag{2}$$

$x \notin \bigcap_{j=1}^{m} \mathrm{supp} f_j$ 且 $f_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $j=1,\dots,m$. 如果 $S=\emptyset$, 我们简单地表示 $T_{\vec{b},\emptyset}=T$ 和 $T^*_{\vec{b},\emptyset}=T^*$.

广义交换子是由多线性 Calderón-Zygmund 算子 T 与一类可测函数 $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ 生成的. 其中, S 决定了哪些函数 b_i 参与交换子的构造. 由于集合 S 的灵活性, 广义交换子能够将不同形式的交换子纳入其中. 其中不仅有经典交换子 $T_{\vec{b}}f(x)$ [9], $T^j_{b_j}(\vec{f})(x)$ [10] 和 $T_{\prod\vec{b}}(\vec{f})(x)$ [11], 还涵盖了一些新型交换子的构造. 近几年, 广义交换子的研究也取得了一些新成果, 可参见 [12,13].

随着研究的深入, 学者们逐渐将注意力转向核函数不满足光滑条件的情形. 1985 年, Yabuta [14] 在研究 Coifman 和 Meyer [15] 提出的伪微分算子时, 引入了具有 ω 型核的 Calderón-Zygmund 算子. 2009 年, Maldonado 和 Naibo [16] 对双线性 ω 型 Calderón-Zygmund 算子理论展开深入研究. 2014 年, Lu 和 Zhang [17] 引入了 Dini 型多线性 Calderón-Zygmund 算子, 这类算子比标准多线性 Calderón-Zygmund 算子更具一般性, 适用于更广泛的核函数. 假设 $\omega(t):[0,\infty)\to[0,\infty)$ 是非减函数, 其中 $0<\omega(1)<\infty$. 对于 $a>0$, 如果有

$$|\omega|_{\mathrm{Dini}(a)} := \int_0^1 \frac{\omega^a(t)}{t}\mathrm{d}t < \infty,$$

那么称 $\omega \in \mathrm{Dini}(a)$. 若 $0<a_1<a_2$, 则 $\mathrm{Dini}(a_1)\subset\mathrm{Dini}(a_2)$.

定义1.2. [17] 设 $K(x,y_1,\dots,y_m)$ 是一个局部可积函数, 如果在 $(\mathbb{R}^n)^{m+1}$ 除对角线 $x=y_1=\cdots=y_m$ 之外, K 满足以下三个条件:

(i)如果存在一个常数 $A>0$, 使得对任意 x 与 $y_1,\dots,y_m$ 不全等的 $(x,y_1,\dots,y_m)\in(\mathbb{R}^n)^{m+1}$ 都有

$$|K(x,y_1,\dots,y_m)| \le \frac{A}{(|x-y_1|+\cdots+|x-y_m|)^{mn}}; \tag{3}$$

(ii)当 $|x-x'| \le \frac{1}{2}\max_{1\le j\le m}|x-y_j|$ 时, 有

$$\begin{aligned}&|K(x,y_1,\dots,y_m) - K(x',y_1,\dots,y_m)| \\ &\le \frac{A}{(|x-y_1|+\cdots+|x-y_m|)^{mn}}\omega\left(\frac{|x-x'|}{|x-y_1|+\cdots+|x-y_m|}\right);\end{aligned} \tag{4}$$

(iii)当 $|y_j-y_j'| \le \frac{1}{2}\max_{1\le j\le m}|x-y_j|$ 时, 有

$$
\begin{aligned}
&|K(x,y_1,\ldots,y_j,\ldots,y_m)-K(x,y_1,\ldots,y_j',\ldots,y_m)|\\
&\le \frac{A}{(|x-y_1|+\cdots+|x-y_m|)^{mn}}\omega\left(\frac{|y_j-y_j'|}{|x-y_1|+\cdots+|x-y_m|}\right);
\end{aligned}
\tag{5}
$$

则称 K 为 ω 型 m-线性 Calderón-Zygmund 核.

设 T 是定义在 Schwarz 函数积空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\times\cdots\times\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 上的算子

$$
T(f_1,\ldots,f_m)(x)=\int_{(\mathbb{R}^n)^m}K(x,y_1,\ldots,y_m)f_1(y_1)\cdots f_m(y_m)\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_m, \tag{6}
$$

$x\notin\bigcap_{j=1}^m \mathrm{supp}f_j$ 且 $f_j\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $j=1,\ldots,m$, 称 T 是一个带有 ω 型 m-线性 Calderón-Zygmund 核 $K(x,y_1,\ldots,y_m)$的 m-线性算子.

若存在 $1\le q_1,\ldots,q_m<\infty$ 且 $\frac{1}{q_1}+\cdots+\frac{1}{q_m}=\frac{1}{q}$, T 是从 $L^{q_1}(\mathbb{R}^n)\times\cdots\times L^{q_m}(\mathbb{R}^n)\to L^{q,\infty}(\mathbb{R}^n)$ 的有界多线性算子, 则称 T 为一个 ω 型 m-线性 Calderón-Zygmund算子, 简称为 m-线性 ω-CZO.

显然, 当 $\omega(t)=t^\varepsilon$, $\varepsilon>0$ 时, ω 型 m-线性 Calderón-Zygmund 算子即为 Grafakos 和 Torres 在文 [18] 中研究的多线性 Calderón-Zygmund 算子. 目前关于 Dini 型多线性 Calderón-Zygmund 算子的交换子的研究也取得了许多成果, 可参见 [19–21].

受上述文献启发, 本文将考虑 Dini 型多线性极大奇异积分算子与 Lipschitz 函数生成的广义交换子的有界性问题. 本文的主要结果如下:

定理1.1. 令 T 是一个 $\omega(t)$ 型 m-线性奇异积分算子, $\omega\in\mathrm{Dini}(1)$. 若 $1<q_j<\infty$, $\frac{1}{q}=\frac{1}{q_1}+\cdots+\frac{1}{q_m}-\frac{\sum_{(i,1)\in S}\beta_{i1}}{n}-\cdots-\frac{\sum_{(i,m)\in S}\beta_{im}}{n}$ 且 $\beta=\sum_{(i,1)\in S}\beta_{i1}+\cdots+\sum_{(i,m)\in S}\beta_{im}$ 使得

$$
\frac{1}{q_1}>\frac{\sum_{(i,1)\in S}\beta_{i1}}{n},\ldots,\frac{1}{q_m}>\frac{\sum_{(i,m)\in S}\beta_{im}}{n}.
$$

对于任意的 $(i,j)\in S$, 设 $b_i\in Lip_{\beta_{ij}}$ 且 $0<\beta_{ij}<1$, 则存在常数 $C>0$, 使得

$$
\|T^*_{\vec{b},S}(\vec{f})\|_{L^q}\le C\prod_{(i,j)\in S}\|b_i\|_{Lip_{\beta_{ij}}}\prod_{j=1}^m\|f_j\|_{L^{q_j}},
$$

对于任意的 $f_j\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)(j=1,\cdots,m)$ 成立.

在下文中, 对于 $Z^+\times\{1,\ldots,m\}$ 的有限子集 S, 用 $|S|$ 表示 S 的基数. 字母 C 将代表正的常数, 与主要参数无关且其取值在不同的位置可以不尽相同.

2. 预备知识

本文中, M 表示 Hardy-Littlewood 极大函数. 用 $M^\sharp$ 表示 Fefferman 和 Stein 的 sharp 极大函数, 即, 对任意的局部可积函数 f,

$$
M^\sharp(f)(x)=\sup_{Q\ni x}\inf_{c\in\mathbb{R}}\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(y)-c|dy\approx\sup_{Q\ni x}\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(y)-f_Q|\mathrm{d}y,
$$

其中 f_Q 表示 f 在 Q 上的平均.

对于 $0<\delta<\infty$, 定义极大函数 M_δ 和 $M^\sharp_\delta$ 如下:

$$M_\delta(f)(x)=\sup_{Q\ni x}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(y)|^\delta\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{\delta}},$$

$$M^\sharp_\delta(f)(x)=[M^\sharp(|f|^\delta)(x)]^{\frac{1}{\delta}}.$$

对于 $0<\beta<\frac{n}{r}$, 我们定义

$$M_{r,\beta}f(x)=\sup_{Q\ni x}\left(\frac{1}{|Q|^{1-\frac{r\beta}{n}}}\int_Q|f(y)|^r\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{r}},$$

当 $\beta=0$ 时, 用 M_r 表示 $M_{r,\beta}$, 若 $0<r<q<\infty$, 则我们有

$$\|M_rf\|_{L^q}\le C\|f\|_{L^q}. \tag{7}$$

引理2.1. [22] 令 $0<p,\delta<\infty$, 则存在一个常数 $C>0$, 使得

$$\int_{\mathbb{R}^n}M_\delta(f)(x)^p\mathrm{d}x\le C\int_{\mathbb{R}^n}M^\sharp_\delta(f)(x)^p\mathrm{d}x$$

对所有使上式左端有限的函数 f 成立.

引理2.2. [23] 设 $0<p<q<\infty$, 则存在依赖于 p,q 的常数 $C>0$, 使得对于任意的可测函数 f, 有

$$\|f\|_{L^p(Q,\frac{dx}{|Q|})}\le C\|f\|_{L^{q,\infty}(Q,\frac{dx}{|Q|})}.$$

引理2.3. [24] 如果 $0<\beta<n$, $0<r<p<\frac{n}{\beta}$ 且 $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\beta}{n}$, 则

$$\|M_{r,\beta}f\|_{L^q}\le C\|f\|_{L^p}.$$

引理2.4. [25] 对于 $0<\beta<1$, $1\le q<\infty$, 有

$$\|f\|_{Lip_\beta}\approx\sup_Q\frac{1}{|Q|^{1+\frac{\beta}{n}}}\int_Q|f-f_Q|\approx\sup_Q\frac{1}{|Q|^{\frac{\beta}{n}}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q|f-f_Q|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

引理2.5. [25] 设 $b\in Lip_\beta$, $0<\beta<1$. 对于 $\mathbb{R}^n$ 上的任意方体 Q, Q', 满足 $Q'\subset Q$, 则

$$|b_{Q'}-b_Q|\le C\|b\|_{Lip_\beta}|Q|^{\frac{\beta}{n}}.$$

引理2.6. [8]

令 S 是 $Z^+\times Z^+$ 的子集, x_{ij} 是一个实数序列, 其中 $(i,j)\in S$, 则等式

$$\prod_{(i,j)\in S}(x_{i0}-x_{ij})$$
$$=\prod_{(i,j)\in S}(\lambda_i-x_{ij})+\sum_{D\subset S}(-1)^{|S\setminus D|+1}\Big(\prod_{(i,j)\in D}(x_{i0}-x_{ij})\Big)\Big(\prod_{(i,j)\in S\setminus D}(x_{i0}-\lambda_i)\Big)$$

对任意常数 λ_i 都成立.

引理2.7. [26] 设 $\frac{1}{p}=\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_m}$ 且 $\vec{w}\in A_{\vec{P}}$. 设 T 是一个 m-线性 ω-CZO, $\omega\in\mathrm{Dini}(1)$. (1) 若 $1<p_1,\ldots,p_m<\infty$, 则

$$\|T^*\vec{f}\|_{L^p(\nu_{\vec{w}})}\le C\prod_{j=1}^m\|f_j\|_{L^{p_j}(w_j)}.$$

(2) 若 $1\le p_1,\ldots,p_m<\infty$, 则

$$\|T^*\vec{f}\|_{L^{p,\infty}(\nu_{\vec{w}})}\le C\prod_{j=1}^m\|f_j\|_{L^{p_j}(w_j)}.$$

3. 定理的证明

首先定义一个极大交换子, 对任意 $\eta>0$, 令 K_η 满足 (3), (4), (5). 定义

$$\begin{aligned}W^*_{\vec{b},S}(\vec{f})(x)&=\sup_{\eta>0}\Big|\int_{\mathbb{R}^{nm}}\prod_{(i,j)\in S}\big[b_i(x)-b_i(y_j)\big]K_\eta(x,y_1,\ldots,y_m)\prod_{j=1}^m f_j(y_j)\mathrm{d}\vec{y}\Big|\\&=\sup_{\eta>0}\big|W_{\vec{b},S,\eta}(\vec{f})(x)\big|,\end{aligned}\tag{8}$$

有 $W^*_{\vec{b},\emptyset}(\vec{f})=W^*(\vec{f})$.

为了证明定理, 先来证明一个重要的引理.

引理3.1. 设 W 是一个 $\omega(t)$ 型 m-线性奇异积分算子, $\omega\in\mathrm{Dini}(1)$. 对任意的 $(i,j)\in S$, 设 $b_i\in Lip_{\beta_{ij}}$ 且 $0<\beta_{ij}<1$. 令 $0<\delta<\frac{1}{m}$ 且 $1<p_1,p_2,\ldots,p_m<\infty$, 对任意的 δ_0, $\delta<\delta_0<\infty$, 则存在常数 $C>0$, 使得

$$\begin{aligned}M^\sharp_\delta\big(W^*_{\vec{b},S}(\vec{f})\big)(x)\le{}&C\prod_{(i,j)\in S}\|b_i\|_{Lip_{\beta_{ij}}}\prod_{j=1}^m M_{p_j,\sum_{(i,j)\in S}\beta_{ij}}(f_j)(x)\\&+C\sum_{D\subset S}\prod_{(i,j)\in S\setminus D}\|b_i\|_{Lip_{\beta_{ij}}}M_{\delta_0,\sum_{(i,j)\in S\setminus D}\beta_{ij}}\big(W^*_{\vec{b},D}(\vec{f})\big)(x),\end{aligned}$$

对于任意的 $f_j\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)(j=1,\cdots,m)$ 成立.

证明 对任意的 $x\in\mathbb{R}^n$, 取 $Q(x_Q,l_Q)$ 为任一包含 x 的方体且边长为 l_Q, 设 $\widetilde{Q}=8\sqrt{n}Q=$

$Q(x_Q, 8\sqrt{n}l_Q)$, $c^*_{\widetilde{Q}}$ 为待定常数. 只需证明

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \big||W^*_{\vec{b},S}(\vec{f})(z)|^\delta - |c^*_{\widetilde{Q}}|^\delta\big| \mathrm{d}z\right)^{\frac{1}{\delta}} \le C \prod_{(i,j)\in S} \|b_i\|_{Lip_{\beta_{ij}}} \prod_{j=1}^m M_{p_j,\sum_{(i,j)\in S}\beta_{ij}}(f_j)(x)$$
$$+ C\sum_{D\subset S} \prod_{(i,j)\in S\setminus D} \|b_i\|_{Lip_{\beta_{ij}}} M_{\delta_0,\sum_{(i,j)\in S\setminus D}\beta_{ij}}\big(W^*_{\vec{b},D}(\vec{f})\big)(x),$$

其中 C 与 x 和 Q 无关.

对于 $0<\delta<1$, 有 $|\alpha|^\delta - |\beta|^\delta \le |\alpha-\beta|^\delta$, 则只需证明

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |W^*_{\vec{b},S}(\vec{f})(z) - c^*_{\widetilde{Q}}|^\delta \mathrm{d}z\right)^{\frac{1}{\delta}} \le C \prod_{(i,j)\in S} \|b_i\|_{Lip_{\beta_{ij}}} \prod_{j=1}^m M_{p_j,\sum_{(i,j)\in S}\beta_{ij}}(f_j)(x)$$
$$+ C\sum_{D\subset S} \prod_{(i,j)\in S\setminus D} \|b_i\|_{Lip_{\beta_{ij}}} M_{\delta_0,\sum_{(i,j)\in S\setminus D}\beta_{ij}}\big(W^*_{\vec{b},D}(\vec{f})\big)(x).$$

令 $c^*_{\widetilde{Q}} = \sup\limits_{\eta>0}|c_{\widetilde{Q},\eta}|$, 定义 $I^*(z) := \sup\limits_{\eta>0}|W_{\vec{b},S,\eta}(\vec{f})(z) - c_{\widetilde{Q},\eta}|$, 其中

$$W_{\vec{b},S,\eta}(\vec{f})(z) = \int_{\mathbb{R}^{nm}} K_\eta(z,\vec{y}) \prod_{(i,j)\in S}\big[b_i(z)-b_i(y_j)\big] \prod_{j=1}^m f_j(y_j)\mathrm{d}\vec{y}.$$

对于乘积 $\prod\limits_{(i,j)\in S}\big[b_i(z)-b_i(y_j)\big]$, 由引理 2.6,

$$\prod_{(i,j)\in S}\big[b_i(z)-b_i(y_j)\big]$$
$$= \prod_{(i,j)\in S}\big[(b_i)_{\widetilde{Q}} - b_i(y_j)\big] + \sum_{D\subset S}(-1)^{|S\setminus D|+1} \prod_{(i,j)\in D}\big[b_i(z)-b_i(y_j)\big] \prod_{(i,j)\in S\setminus D}\big[b_i(z)-(b_i)_{\widetilde{Q}}\big].$$

则有

$$I^*(z) \le \sup_{\eta>0}\left|\int_{\mathbb{R}^{nm}} K_\eta(z,\vec{y}) \prod_{(i,j)\in S}\big[(b_i)_{\widetilde{Q}} - b_i(y_j)\big] \prod_{j=1}^m f_j(y_j)\mathrm{d}\vec{y} - c_{\widetilde{Q},\eta}\right|$$
$$+ \sum_{D\subset S} \prod_{(i,j)\in S\setminus D} |b_i(z)-(b_i)_{\widetilde{Q}}| \cdot W^*_{\vec{b},D}(\vec{f})(z),$$

其中 $W^*_{\vec{b},D}(\vec{f})(z) := \sup\limits_{\eta>0}|\int_{\mathbb{R}^{nm}} K_\eta(z,\vec{y}) \prod_{(i,j)\in D}[b_i(z)-b_i(y_j)] \prod_{j=1}^m f_j(y_j)\mathrm{d}\vec{y}|$.

对上述不等式右侧第一项, 分解每个 f_j, 使得 $f_j = f_j^0 + f_j^\infty$, 其中 $f_j^0 = f_j\chi_{\widetilde{Q}}$, $f_j^\infty = f_j\chi_{\mathbb{R}^n\setminus\widetilde{Q}}$, 则有

$$\prod_{j=1}^{m} f_j(y_j) = \prod_{j=1}^{m}(f_j^0 + f_j^\infty)(y_j) = \sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_m \in \{0,\infty\}} \prod_{j=1}^{m} f_j^{\alpha_j}(y_j)$$
$$= \prod_{j=1}^{m} f_j^0(y_j) + \sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_m \in \{0,\infty\}, \exists \alpha_j, \alpha_j=\infty} \prod_{j=1}^{m} f_j^{\alpha_j}(y_j) = \vec{f}^{\vec{0}} + \sum_{\vec{\alpha},\vec{\alpha}\neq\vec{0}} \vec{f}^{\vec{\alpha}}, \tag{9}$$

其中 $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m), \alpha_i = 0$ 或者 ∞, $\vec{f}^{\vec{\alpha}} = \prod_{j=1}^{m} f_j^{\alpha_j}(y_j)$.

为了估计 $I^*(z)$, 令 $c_{\widetilde{Q},\eta} := \sum_{\vec{\alpha},\vec{\alpha}\neq\vec{0}} \int_{\mathbb{R}^{nm}} K_\eta(x_Q, \vec{y}) \prod_{(i,j)\in S} \left[(b_i)_{\widetilde{Q}} - b_i(y_j)\right] \prod_{j=1}^{m} f_j^{\alpha_j}(y_j) \mathrm{d}\vec{y}$.

由 (9) 得到

$$I^*(z) \le \sup_{\eta>0} \left| \int_{\mathbb{R}^{nm}} K_\eta(z, \vec{y}) \prod_{(i,j)\in S} \left[(b_i)_{\widetilde{Q}} - b_i(y_j)\right] \prod_{j=1}^{m} f_j^0(y_j) \mathrm{d}\vec{y} \right|$$
$$+ \sum_{\vec{\alpha},\vec{\alpha}\neq\vec{0}} \sup_{\eta>0} \left| \int_{\mathbb{R}^{nm}} \left[K_\eta(z, \vec{y}) - K_\eta(x_Q, \vec{y})\right] \prod_{(i,j)\in S} \left[(b_i)_{\widetilde{Q}} - b_i(y_j)\right] \prod_{j=1}^{m} f_j^{\alpha_j}(y_j) \mathrm{d}\vec{y} \right|$$
$$+ \sum_{D\subset S} \prod_{(i,j)\in S\setminus D} |b_i(z) - (b_i)_{\widetilde{Q}}| \cdot |W^*_{\vec{b},D}(\vec{f})(z)|.$$

令 $I^*_{\vec{0}}(z) := \sup_{\eta>0} \left| \int_{\mathbb{R}^{nm}} K_\eta(z, \vec{y}) \prod_{(i,j)\in S} \left[(b_i)_{\widetilde{Q}} - b_i(y_j)\right] \prod_{j=1}^{m} f_j^0(y_j) \mathrm{d}\vec{y} \right|$, $I^*_{\vec{\alpha}}(z) := \sup_{\eta>0} \left| \int_{\mathbb{R}^{nm}} \left[K_\eta(z, \vec{y}) - K_\eta(x_Q, \vec{y})\right] \prod_{(i,j)\in S} \left[(b_i)_{\widetilde{Q}} - b_i(y_j)\right] \prod_{j=1}^{m} f_j^{\alpha_j}(y_j) \mathrm{d}\vec{y} \right|$.

由于

$$I^*(z) \le I^*_{\vec{0}}(z) + \sum_{\vec{\alpha},\vec{\alpha}\neq\vec{0}} I^*_{\vec{\alpha}}(z) + \sum_{D\subset S} \prod_{(i,j)\in S\setminus D} |b_i(z) - (b_i)_{\widetilde{Q}}| \cdot |W^*_{\vec{b},D}(\vec{f})(z)|,$$

于是可以得到

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |I^*(z)|^\delta \mathrm{d}z\right)^{\frac{1}{\delta}} \le C\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |I^*_{\vec{0}}(z)|^\delta \mathrm{d}z\right)^{\frac{1}{\delta}} + C\sum_{\vec{\alpha},\vec{\alpha}\neq\vec{0}} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |I^*_{\vec{\alpha}}(z)|^\delta \mathrm{d}z\right)^{\frac{1}{\delta}}$$
$$+ C\sum_{D\subset S} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \prod_{(i,j)\in S\setminus D} |b_i(z) - (b_i)_{\widetilde{Q}}|^\delta \cdot |W^*_{\vec{b},D}(\vec{f})(z)|^\delta \mathrm{d}z\right)^{\frac{1}{\delta}}$$

$$:= C(I^*_{\vec{0}} + \sum_{\vec{\alpha},\vec{\alpha}\neq\vec{0}} I^*_{\vec{\alpha}} + \sum_{D\subset S} I^*_D). \tag{10}$$

令 $\delta_{ij} \ge 1$, $\delta_0 \ge 0$ 且 $\sum_{(i,j)\in D^c} \frac{1}{\delta_{ij}} + \frac{1}{\delta_0} = \frac{1}{\delta}$, 由 Hölder 不等式得

$$
\begin{aligned}
I_D^* &\le \prod_{(i,j)\in S\setminus D}\left(\frac{1}{|\widetilde{Q}|}\int_{\widetilde{Q}}|b_i(z)-(b_i)_{\widetilde{Q}}|^{\delta_{ij}}\mathrm{d}z\right)^{\frac{1}{\delta_{ij}}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q|W^*_{\vec{b},D}(\vec{f})(z)|^{\delta_0}\mathrm{d}z\right)^{\frac{1}{\delta_0}}\\
&\le C\prod_{(i,j)\in S\setminus D}\|b_i\|_{Lip_{\beta_{ij}}}\left(\frac{1}{|Q|^{1-\frac{\delta_0\sum_{(i,j)\in S\setminus D}\beta_{ij}}{n}}}\int_Q|W^*_{\vec{b},D}(\vec{f})(z)|^{\delta_0}\mathrm{d}z\right)^{\frac{1}{\delta_0}}\\
&\le C\prod_{(i,j)\in S\setminus D}\|b_i\|_{Lip_{\beta_{ij}}}M_{\delta_0,\sum_{(i,j)\in S\setminus D}\beta_{ij}}\big(W^*_{\vec{b},D}(\vec{f})\big)(x).
\end{aligned}
\tag{11}
$$

由引理 2.2 和 W^* 的弱端点有界性, 有

$$
\begin{aligned}
I_{\vec{0}}^* &\le C\|W^*\big(f_1^0\prod_{(i,1)\in S}((b_i)_{\widetilde{Q}}-b_i(y_1)),\dots,f_m^0\prod_{(i,m)\in S}((b_i)_{\widetilde{Q}}-b_i(y_m))\big)\|_{L^{\frac{1}{m},\infty}(Q,\frac{dx}{|Q|})}\\
&\le C\|W^*\|_{L^1\times\cdots\times L^1\to L^{\frac{1}{m},\infty}}\prod_{j=1}^m\frac{1}{|\widetilde{Q}|}\int_{\widetilde{Q}}|f_j(y_j)|\prod_{(i,j)\in S}|(b_i)_{\widetilde{Q}}-b_i(y_j)|\mathrm{d}y_j\\
&\le C\prod_{j=1}^m\frac{1}{|\widetilde{Q}|}\int_{\widetilde{Q}}|f_j(y_j)|\prod_{(i,j)\in S}|(b_i)_{\widetilde{Q}}-b_i(y_j)|\mathrm{d}y_j
\end{aligned}
$$

令 $p_{ij}>1$ 且 $\sum_{(i,j)\in S}\frac{1}{p_{ij}}+\frac{1}{p_j}=1$. 由 Hölder 不等式, 得到

$$
\begin{aligned}
&\prod_{j=1}^m\frac{1}{|\widetilde{Q}|}\int_{\widetilde{Q}}|f_j(y_j)|\prod_{(i,j)\in S}|(b_i)_{\widetilde{Q}}-b_i(y_j)|\mathrm{d}y_j\\
&\le C\prod_{j=1}^m\left(\frac{1}{|\widetilde{Q}|}\int_{\widetilde{Q}}|f_j(y_j)|^{p_j}\mathrm{d}y_j\right)^{\frac{1}{p_j}}\prod_{(i,j)\in S}\left(\frac{1}{|\widetilde{Q}|}\int_{\widetilde{Q}}|(b_i)_{\widetilde{Q}}-b_i(y_j)|^{p_{ij}}\mathrm{d}y_j\right)^{\frac{1}{p_{ij}}}\\
&\le C\prod_{j=1}^m\left(\frac{1}{|\widetilde{Q}|^{1-\frac{p_j\sum_{(i,j)\in S}\beta_{ij}}{n}}}\int_{\widetilde{Q}}|f_j(y_j)|^{p_j}\mathrm{d}y_j\right)^{\frac{1}{p_j}}\prod_{(i,j)\in S}\|b_i\|_{Lip_{\beta_{ij}}}\\
&\le C\prod_{(i,j)\in S}\|b_i\|_{Lip_{\beta_{ij}}}\prod_{j=1}^m M_{p_j,\sum_{(i,j)\in S}\beta_{ij}}(f_j)(x).
\end{aligned}
\tag{12}
$$

现估计 $I_{\vec{\alpha}}^*$, $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$. 不失一般性, 假设 $\alpha_{j_1}=\cdots=\alpha_{j_l}=0$ $(0\le l<m)$ 且 $\alpha_j=\infty\big(j\notin\{j_1,\dots,j_l\}\big)$. 由 (4), 有

$$
\begin{aligned}
I_{\vec{\alpha}}^* \le C&\prod_{j\in\{j_1,\dots,j_l\}}\int_{\widetilde{Q}}|f_j(y_j)|\prod_{(i,j)\in S}|(b_i)_{\widetilde{Q}}-b_i(y_j)|\mathrm{d}y_j\\
&\times\sum_{k=1}^\infty\frac{\omega(2^{-k})}{|2^k\widetilde{Q}|^m}\int_{(2^k\widetilde{Q})^{m-l}}\prod_{j\notin\{j_1,\dots,j_l\}}\left(|f_j(y_j)|\prod_{(i,j)\in S}|(b_i)_{\widetilde{Q}}-b_i(y_j)|\right)\mathrm{d}y_j
\end{aligned}
$$

$$\leq C\sum_{k=1}^{\infty}\omega(2^{-k})\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{|2^k\widetilde{Q}|}\int_{2^k\widetilde{Q}}|f_j(y_j)|\prod_{(i,j)\in S}|(b_i)_{\widetilde{Q}}-b_i(y_j)|\mathrm{d}y_j.$$

令

$$S_1=\{(i,j)\in S|j=1\},\ldots,S_m=\{(i,j)\in S|j=m\}$$

及

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_{11}}+\cdots+\frac{1}{p_{|S_1|1}}=1,\ldots,\frac{1}{p_m}+\frac{1}{p_{1m}}+\cdots+\frac{1}{p_{|S_m|m}}=1.$$

由引理 2.5 及 Hölder 不等式, 可得

$$\begin{aligned}
I_{\vec{\alpha}}^{*}&\leq C\sum_{k=1}^{\infty}\omega(2^{-k})\Big(\frac{1}{|2^k\widetilde{Q}|}\int_{2^k\widetilde{Q}}|f_1(y_1)|\prod_{(i,1)\in S}|b_i(y_1)-(b_i)_{2^k\widetilde{Q}}+(b_i)_{2^k\widetilde{Q}}-(b_i)_{\widetilde{Q}}|\mathrm{d}y_1\Big)\\
&\quad\times\cdots\times\Big(\frac{1}{|2^k\widetilde{Q}|}\int_{2^k\widetilde{Q}}|f_m(y_m)|\prod_{(i,m)\in S}|b_i(y_m)-(b_i)_{2^k\widetilde{Q}}+(b_i)_{2^k\widetilde{Q}}-(b_i)_{\widetilde{Q}}|\mathrm{d}y_m\Big)\\
&\leq C\sum_{k=1}^{\infty}\omega(2^{-k})\Big(\frac{1}{|2^k\widetilde{Q}|}\int_{2^k\widetilde{Q}}|f_1(y_1)|^{p_1}\mathrm{d}y_1\Big)^{\frac{1}{p_1}}\\
&\quad\times\Big(\frac{1}{|2^k\widetilde{Q}|}\int_{2^k\widetilde{Q}}|b_1(y_1)-(b_1)_{2^k\widetilde{Q}}+(b_1)_{2^k\widetilde{Q}}-(b_1)_{\widetilde{Q}}|^{p_{11}}\mathrm{d}y_1\Big)^{\frac{1}{p_{11}}}\\
&\quad\times\cdots\times\Big(\frac{1}{|2^k\widetilde{Q}|}\int_{2^k\widetilde{Q}}|b_{|S_1|}(y_1)-(b_{|S_1|})_{2^k\widetilde{Q}}+(b_{|S_1|})_{2^k\widetilde{Q}}-(b_{|S_1|})_{\widetilde{Q}}|^{p_{|S_1|1}}\mathrm{d}y_1\Big)^{\frac{1}{p_{|S_1|1}}}\\
&\quad\times\cdots\times\Big(\frac{1}{|2^k\widetilde{Q}|}\int_{2^k\widetilde{Q}}|f_m(y_m)|^{p_m}\mathrm{d}y_m\Big)^{\frac{1}{p_m}}\\
&\quad\times\Big(\frac{1}{|2^k\widetilde{Q}|}\int_{2^k\widetilde{Q}}|b_1(y_m)-(b_1)_{2^k\widetilde{Q}}+(b_1)_{2^k\widetilde{Q}}-(b_1)_{\widetilde{Q}}|^{p_{1m}}\mathrm{d}y_m\Big)^{\frac{1}{p_{1m}}}\\
&\quad\times\cdots\times\Big(\frac{1}{|2^k\widetilde{Q}|}\int_{2^k\widetilde{Q}}|b_{|S_m|}(y_m)-(b_{|S_m|})_{2^k\widetilde{Q}}+(b_{|S_m|})_{2^k\widetilde{Q}}-(b_{|S_m|})_{\widetilde{Q}}|^{p_{|S_m|m}}\mathrm{d}y_m\Big)^{\frac{1}{p_{|S_m|m}}}\\
&\leq C\sum_{k=1}^{\infty}\omega(2^{-k})\prod_{(i,1)\in S}\|b_i\|_{Lip_{\beta_{i1}}}\Big(\frac{1}{|2^k\widetilde{Q}|^{1-\frac{p_1\sum_{(i,1)\in S}\beta_{i1}}{n}}}\Big)\int_{2^k\widetilde{Q}}|f_1(y_1)|^{p_1}\mathrm{d}y_1\Big)^{\frac{1}{p_1}}\\
&\quad\times\cdots\times\prod_{(i,m)\in S}\|b_i\|_{Lip_{\beta_{im}}}\Big(\frac{1}{|2^k\widetilde{Q}|^{1-\frac{p_m\sum_{(i,m)\in S}\beta_{im}}{n}}}\Big)\int_{2^k\widetilde{Q}}|f_m(y_m)|^{p_m}\mathrm{d}y_m\Big)^{\frac{1}{p_m}}\\
&\leq C\prod_{(i,j)\in S}\|b_i\|_{Lip_{\beta_{ij}}}\prod_{j=1}^{m}M_{p_j,\sum_{(i,j)\in S}\beta_{ij}}(f_j)(x).
\end{aligned}\tag{13}$$

结合 (10) (11) (12) 和 (13), 引理 3.1 得证.

注1. 根据引理 3.1 的证明, 当 $K(x,\vec{y})$ 和 $f_j(y_j)(1\leq j\leq m)$ 都是正函数时, 易证对于

$M_\delta^\sharp(W_{\vec{b},S}^{*,+}\vec{f})(x)$ 有相同的估计, 其中

$$W_{\vec{b},S}^{*,+}\vec{f}(x)=\sup_{\eta>0}\int_{(\mathbb{R}^n)^m}\prod_{(i,j)\in S}|b_i(x)-b_i(y_j)|K_\eta(x,y_1,\ldots,y_m)\prod_{j=1}^m f_j(y_j)\mathrm{d}\vec{y}.$$

为了考虑算子 T^* 和 $T_{\vec{b},S}^*$, 将运用 [27] 中的思想, 粗略地说, 构造了两个极大交换子来控制 $T_{\vec{b},S}^*$. 如 [27] 中所示, 选取两个函数 $u,v\in C^\infty\big([0,\infty)\big)$ 使得 $|u'(t)|\le Ct^{-1}, v'(t)\le Ct^{-1}$, 且满足

$$\chi_{[2,\infty)}\le u(t)\le\chi_{[1,\infty)},\ \ \chi_{[1,2)}\le v(t)\le\chi_{[1/2,3)}.$$

令 $\mathcal{U}_\eta(x,y_1,\ldots,y_m)=K(x,y_1,\ldots,y_m)u(\sqrt{|x-y_1|^2+\cdots+|x-y_m|^2}/\eta)$ 和 $\mathcal{V}_\eta(x,y_1,\ldots,y_m)=|K(x,y_1,\ldots,y_m)v(\sqrt{|x-y_1|^2+\cdots+|x-y_m|^2}/\eta)|$. 定义

$$\mathcal{U}_{\vec{b},S}^*(\vec{f})(x)=\sup_{\eta>0}\left|\int_{(\mathbb{R}^n)^m}\prod_{(i,j)\in S}[b_i(x)-b_i(y_j)]\mathcal{U}_\eta(x,y_1,\ldots,y_m)\prod_{i=1}^m f_i(y_i)\mathrm{d}\vec{y}\right|,$$

$$\mathcal{V}_{\vec{b},S}^*(\vec{f})(x)=\sup_{\eta>0}\int_{(\mathbb{R}^n)^m}\left|\prod_{(i,j)\in S}[b_i(x)-b_i(y_j)]\mathcal{V}_\eta(x,y_1,\ldots,y_m)\prod_{i=1}^m f_i(y_i)\right|\mathrm{d}\vec{y}.$$

如果 $S=\emptyset$, $\mathcal{U}_{\vec{b},S}^*(\vec{f})(x)$ 和 $\mathcal{V}_{\vec{b},S}^*(\vec{f})(x)$ 的定义方式与之前类似.

类似 [27], 易知 $\mathcal{U}_\eta(x,y_1,\ldots,y_m)$ 和 $\mathcal{V}_\eta(x,y_1,\ldots,y_m)$ 满足 (3), (4), (5). 很明显, 对于任意有限集 S, $T_{\vec{b},S}^*(\vec{f})(x)\le\mathcal{U}_{\vec{b},S}^*(\vec{f})(x)+\mathcal{V}_{\vec{b},S}^*(\vec{f})(x)$, 这也意味着 $\|T^*\|\le\|\mathcal{U}^*\|+\|\mathcal{V}^*\|$.

因此不直接估计 $T_{\vec{b},S}^*(\vec{f})(x)$, 而去分别估计 $\mathcal{U}_{\vec{b},S}^*(\vec{f})$ 和 $\mathcal{V}_{\vec{b},S}^*(\vec{f})$ 就足够了. $M_\delta^\sharp\big(\mathcal{U}_{\vec{b},S}^*(\vec{f})\big)$ 的估计来自引理 3.1. 对于 $M_\delta^\sharp\big(\mathcal{V}_{\vec{b},S}^*(\vec{f})\big)$, 我们只考虑正函数 f_j, 则

$$\mathcal{V}_{\vec{b},S}^{*,+}(\vec{f})(x)=\sup_{\eta>0}\int_{(\mathbb{R}^n)^m}\prod_{(i,j)\in S}|b_i(x)-b_i(y_j)|\mathcal{V}_\eta(x,y_1,\ldots,y_m)\prod_{i=1}^m f_i(y_i)\mathrm{d}\vec{y}.$$

而根据注 1, 对 $M_\delta^\sharp\big(\mathcal{V}_{\vec{b},S}^{*,+}(\vec{f})\big)$ 的类似的估计也成立. 为简单起见, 我们将只证明对于 $\mathcal{U}_{\vec{b},S}^*(\vec{f})$ 的估计.

定理1.1的证明 取 $1<p_j<q_j$, 其中 $j=1,\cdots,m$. 令 $b_i\in L^\infty$ 且 $f_1,\cdots,f_m\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. 类似 [10], 知 $\|M_\delta\big(\mathcal{U}_{\vec{b},S}^*(\vec{f})\big)\|_{L^q}<\infty$. 由引理 2.1 以及引理 3.1, 对于任意的 δ 和 δ_0, $0<\delta<\delta_0<\frac{1}{m}$, 有

$$\begin{aligned}\|\mathcal{U}_{\vec{b},S}^*(\vec{f})\|_{L^q}&\le C\|M_\delta(\mathcal{U}_{\vec{b},S}^*(\vec{f}))\|_{L^q}\\&\le C\|M_\delta^\sharp(\mathcal{U}_{\vec{b},S}^*(\vec{f}))\|_{L^q}\\&\le C\prod_{(i,j)\in S}\|b_i\|_{Lip_{\beta_{ij}}}\|M_{p_1,\sum_{(i,1)\in S}\beta_{i1}}(f_1)\cdots M_{p_m,\sum_{(i,m)\in S}\beta_{im}}(f_m)\|_{L^q}\\&\quad+C\sum_{D\subset S}\prod_{(i,j)\in D^c}\|b_i\|_{Lip_{\beta_{ij}}}\|M_{\delta_0,\sum_{(i,j)\in S\setminus D}\beta_{ij}}\big(\mathcal{U}_{\vec{b},D}^*(\vec{f})\big)\|_{L^q}.\end{aligned}$$

令

$$\frac{1}{t_1}:=\frac{1}{q_1}-\frac{\sum_{(i,1)\in S}\beta_{i1}}{n},\cdots,\frac{1}{t_m}:=\frac{1}{q_m}-\frac{\sum_{(i,m)\in S}\beta_{im}}{n}$$

及

$$\frac{1}{q'}:=\frac{1}{q}+\frac{\sum_{(i,j)\in D^c}\beta_{ij}}{n}=\frac{1}{q_1}+\cdots+\frac{1}{q_m}-\frac{\sum_{(i,j)\in D}\beta_{ij}}{n},$$

由 Hölder 不等式及引理 2.3, 我们有

$$\begin{aligned}
&\|M_\delta^\sharp(\mathcal{U}^*_{\vec{b},S}(\vec{f}))\|_{L^q}\\
&\le C\prod_{(i,j)\in S}\|b_i\|_{Lip_{\beta_{ij}}}\|M_{p_1,\sum_{(i,1)\in S}\beta_{i1}}(f_1)\|_{L^{t_1}}\cdots\|M_{p_m,\sum_{(i,m)\in S}\beta_{im}}(f_m)\|_{L^{t_m}}\\
&\quad+C\sum_{D\subset S}\prod_{(i,j)\in S\setminus D}\|b_i\|_{Lip_{\beta_{ij}}}\|\mathcal{U}^*_{\vec{b},D}(\vec{f})\|_{L^{q'}}\\
&\le C\prod_{(i,j)\in S}\|b_i\|_{Lip_{\beta_{ij}}}\|f_1\|_{L^{q_1}}\cdots\|f_m\|_{L^{q_m}}+C\sum_{D\subset S}\prod_{(i,j)\in S\setminus D}\|b_i\|_{Lip_{\beta_{ij}}}\|\mathcal{U}^*_{\vec{b},D}(\vec{f})\|_{L^{q'}}.
\end{aligned}$$

令

$$\frac{1}{t'_1}:=\frac{1}{q_1}-\frac{\sum_{(i,1)\in D}\beta_{i1}}{n},\cdots,\frac{1}{t'_m}:=\frac{1}{q_m}-\frac{\sum_{(i,m)\in D}\beta_{im}}{n}$$

及

$$\frac{1}{q''}:=\frac{1}{q'}+\frac{\sum_{(i,j)\in D_1^c}\beta_{ij}}{n}=\frac{1}{q_1}+\cdots+\frac{1}{q_m}-\frac{\sum_{(i,j)\in D_1}\beta_{ij}}{n}.$$

对于集合 D, 可以分两种情况讨论. (i) D 包含某些 j, 但是不包含所有的 j. (ii) D 包含所有的 j. 假如集合 D 包含所有的 j, 则重复上面的方法.

关于第一种情况, 集合 D 不包含某些 j, 有 $\sum_{(i,j)\in D}\beta_{ij}=0$ 且 $t'_j=q_j$. 因此

$$\|M_{p_j,\sum_{(i,j)\in D}\beta_{ij}}(f_j)\|_{L^{t'_j}}=\|M_{p_j}(f_j)\|_{L^{q_j}}.$$

由于 $p_j<q_j$, 通过 (7), 可得

$$\|M_{p_j}(f_j)\|_{L^{q_j}}\le C\|f_j\|_{L^{q_j}},$$

由引理 2.1 以及引理 3.1, Hölder 不等式则对于任意的 δ 和 δ_1, $0<\delta<\delta_1<\frac{1}{m}$, 有

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{U}^*_{\vec{b},D}(\vec{f})\|_{L^{q'}}&\le C\|M_\delta(\mathcal{U}^*_{\vec{b},D}(\vec{f}))\|_{L^{q'}}\\
&\le C\|M_\delta^\sharp(\mathcal{U}^*_{\vec{b},D}(\vec{f}))\|_{L^{q'}}\\
&\le C\prod_{(i,j)\in D}\|b_i\|_{Lip_{\beta_{ij}}}\|M_{p_1,\sum_{(i,1)\in D}\beta_{i1}}(f_1)\cdots M_{p_m,\sum_{(i,m)\in D}\beta_{im}}(f_m)\|_{L^{q'}}\\
&\quad+C\sum_{D_1\subset D}\prod_{(i,j)\in D_1^c}\|b_i\|_{Lip_{\beta_{ij}}}\|M_{\delta_1,\sum_{(i,j)\in D_1^c}\beta_{ij}}(\mathcal{U}^*_{\vec{b},D_1}(\vec{f}))\|_{L^{q'}}
\end{aligned}$$

$$\leq C\prod_{(i,j)\in D}\|b_i\|_{Lip_{\beta_{ij}}}\|M_{p_1,\sum_{(i,1)\in D}\beta_{i1}}(f_1)\|_{L^{t_1'}}\cdots\|M_{p_m,\sum_{(i,m)\in D}\beta_{im}}(f_m)\|_{L^{t_m'}}$$
$$+C\sum_{D_1\subset D}\prod_{(i,j)\in D_1^c}\|b_i\|_{Lip_{\beta_{ij}}}\|\mathcal{U}^*_{\vec{b},D_1}(\vec{f})\|_{L^{q''}}$$
$$\leq C\prod_{(i,j)\in D}\|b_i\|_{Lip_{\beta_{ij}}}\|f_1\|_{L^{q_1}}\cdots\|f_m\|_{L^{q_m}}+C\sum_{D_1\subset D}\prod_{(i,j)\in D_1^c}\|b_i\|_{Lip_{\beta_{ij}}}\|\mathcal{U}^*_{\vec{b},D_1}(\vec{f})\|_{L^{q''}}.$$

可得

$$\begin{aligned}\|M_\delta^\sharp(\mathcal{U}^*_{\vec{b},S}(\vec{f}))\|_{L^q}&\leq C\prod_{(i,j)\in S}\|b_i\|_{Lip_{\beta_{ij}}}\|f_1\|_{L^{q_1}}\cdots\|f_m\|_{L^{q_m}}+C\sum_{D\subset S}\prod_{(i,j)\in D^c}\|b_i\|_{Lip_{\beta_{ij}}}\\&\quad\times\left[\prod_{(i,j)\in D}\|b_i\|_{Lip_{\beta_{ij}}}\|f_1\|_{L^{q_1}}\cdots\|f_m\|_{L^{q_m}}+\sum_{D_1\subset D}\prod_{(i,j)\in D_1^c}\|b_i\|_{Lip_{\beta_{ij}}}\|\mathcal{U}^*_{\vec{b},D_1}(\vec{f})\|_{L^{q''}}\right]\\&\leq C\prod_{(i,j)\in S}\|b_i\|_{Lip_{\beta_{ij}}}\|f_1\|_{L^{q_1}}\cdots\|f_m\|_{L^{q_m}}\\&\quad+C\sum_{D\subset S}\sum_{D_1\subset D}\prod_{(i,j)\in S\setminus D_1}\|b_i\|_{Lip_{\beta_{ij}}}\|\mathcal{U}^*_{\vec{b},D_1}(\vec{f})\|_{L^{q''}}.\end{aligned}$$

令 $D=D_0$, 对每个子集 $D\subset S$, 每个子集 $D_{k+1}\subset D_k$, $0\leq k\leq|S|-1$. 重复上述分解直到 $|D_k|=0$, 由引理 2.7 可得

$$\begin{aligned}\|M_\delta^\sharp(\mathcal{U}^*_{\vec{b},S}(\vec{f}))\|_{L^q}&\leq C\prod_{(i,j)\in S}\|b_i\|_{Lip_{\beta_{ij}}}\|f_1\|_{L^{q_1}}\cdots\|f_m\|_{L^{q_m}}\\&\quad+C\sum_{D\subset S}\cdots\sum_{D_{|S|-1}\subset D_{|S|-2}}\prod_{(i,j)\in S\setminus D_{|S|-1}}\|b_i\|_{Lip_{\beta_{ij}}}\|\mathcal{U}^*_{\vec{b},D_{|S|-1}}(\vec{f})\|_{L^{q^{|S|}}}\\&\leq C\prod_{(i,j)\in S}\|b_i\|_{Lip_{\beta_{ij}}}\|f_1\|_{L^{q_1}}\cdots\|f_m\|_{L^{q_m}},\end{aligned}$$

由于$|D_{|S|-1}|=0$且$\frac{1}{q^{|S|}}=\frac{1}{q_1}+\cdots+\frac{1}{q_m}$.

定理 1.1 得证.

基金项目

黑龙江省省属本科高校基本科研业务费项目(编号: 1453ZD031)；黑龙江省自然科学基金联合基金重点项目(编号: ZL2024A001)；牡丹江师范学院研究生课程及教改项目(编号: KCSZKC-2022026, KCSZAL-2022013, XKCSZXM-2023007, 2024-004).

参考文献

[1] Calderon, A.P. and Zygmund, A. (1952) On the Existence of Certain Singular Integrals. *Acta Mathematica*, **88**, 85-139. https://doi.org/10.1007/bf02392130

[2] Fefferman, C. and Stein, E.M. (1972) H^p Spaces of Several Variables. *Acta Mathematica*, **129**, 137-193. https://doi.org/10.1007/bf02392215

[3] Buckley, S.M. (1993) Estimates for Operator Norms on Weighted Spaces and Reverse Jensen Inequalities. *Transactions of the American Mathematical Society*, **340**, 253-272. https://doi.org/10.1090/s0002-9947-1993-1124164-0

[4] Segovia, C. and Torrea, J.L. (1991) Weighted Inequalities for Commutators of Fractional and Singular Integrals. *Publicacions Matemàtiques*, **35**, 209-235. https://doi.org/10.5565/publmat_35191_09

[5] Alphonse, A.M. (2000) An End Point Estimate for Maximal Commutators. *The Journal of Fourier Analysis and Applications*, **6**, 449-456. https://doi.org/10.1007/bf02510149

[6] Zhang, P. (2006) Weighted Estimates for Maximal Multilinear Commutators. *Mathematische Nachrichten*, **279**, 445-462. https://doi.org/10.1002/mana.200310370

[7] Xue, Q. (2013) Weighted Estimates for the Iterated Commutators of Multilinear Maximal and Fractional Type Operators. *Studia Mathematica*, **217**, 97-122. https://doi.org/10.4064/sm217-2-1

[8] Xue, Q. and Yan, J. (2016) Generalized Commutators of Multilinear Calderón-Zygmund Type Operators. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, **68**, 1161-118. https://doi.org/10.2969/jmsj/06831161

[9] Pérez, C. and Trujillo-González, R. (2002) Sharp Weighted Estimates for Multilinear Commutators. *Journal of the London Mathematical Society*, **65**, 672-692. https://doi.org/10.1112/s0024610702003174

[10] Lerner, A.K., Ombrosi, S., Pérez, C., Torres, R.H. and Trujillo-González, R. (2009) New Maximal Functions and Multiple Weights for the Multilinear Calderón-Zygmund Theory. *Advances in Mathematics*, **220**, 1222-1264. https://doi.org/10.1016/j.aim.2008.10.014

[11] Pérez, C., Pradolini, G., Torres, R.H. and Trujillo-González, R. (2013) End-Point Estimates for Iterated Commutators of Multilinear Singular Integrals. *Bulletin of the London Mathematical Society*, **46**, 26-42. https://doi.org/10.1112/blms/bdt065

[12] Xue, Q., Yabuta, K. and Yan, J. (2021) Weighted Fréchet-Kolmogorov Theorem and Compactness of Vector-Valued Multilinear Operators. *The Journal of Geometric Analysis*, **31**, 9891-9914. https://doi.org/10.1007/s12220-021-00630-3

[13] Liu, H.H., Si, Z.Y. and Wang, L. (2023) Some Estimates for Generalized Commutators of Multilinear Calderón-Zygmund Operators. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, **60**, 541-560.

[14] Yabuta, K. (1985) Generalizations of Calderón-Zygmund Operators. *Studia Mathematica*, **82**, 17-31. https://doi.org/10.4064/sm-82-1-17-31

[15] Coifman, R.R. and Meyer, Y. (1978) Au delá des opérateurs pseudo-différentiels. *Astérisque*, **57**, 1-185.

[16] Maldonado, D. and Naibo, V. (2008) Weighted Norm Inequalities for Paraproducts and Bilinear Pseudodifferential Operators with Mild Regularity. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, **15**, 218-261. https://doi.org/10.1007/s00041-008-9029-x

[17] Lu, G. and Zhang, P. (2014) Multilinear Calderón-Zygmund Operators with Kernels of Dini's Type and Applications. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **107**, 92-117. https://doi.org/10.1016/j.na.2014.05.005

[18] Grafakos, L. and Torres, R.H. (2002) Multilinear Calderón-Zygmund Theory. *Advances in Mathematics*, **165**, 124-164. https://doi.org/10.1006/aima.2001.2028

[19] Sun, J. and Zhang, P. (2017) Commutators of Multilinear Calderón-Zygmund Operators with Dini Type Kernels on Some Function Spaces. *The Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, **10**, 5002-5019. https://doi.org/10.22436/jnsa.010.09.38

[20] Zhang, P. and Sun, J. (2019) Commutators of Multilinear Calderón-Zygmund Operators with Kernels of Dini's Type and Applications. *Journal of Mathematical Inequalities*, **13**, 1071-1093. https://doi.org/10.7153/jmi-2019-13-76

[21] Sun, J. (2022) Weighted Lipschitz Estimates for Commutators of Multilinear Calderón-Zygmund Operators with Dini Type Kernels. *Journal of Inequalities and Applications*, **2022**, Article No. 149. https://doi.org/10.1186/s13660-022-02888-9

[22] Pérez, C. and Trujillo-González, R. (2003) Sharp Weighted Estimates for Vector-Valued Singular Integral Operators and Commutators. *Tohoku Mathematical Journal*, **55**, 109-129. https://doi.org/10.2748/tmj/1113247449

[23] García-Cuerva, J. and Rubio de Francia, J.L. (1985) Weighted Norm Inequalities and Related Topics. In: *North-Holland Mathematics Studies*, Vol. 116, Elsevier.

[24] Chanillo, S. (1982) A Note on Commutators. *Indiana University Mathematics Journal*, **31**, 7-16. https://doi.org/10.1512/iumj.1982.31.31002

[25] Paluszynski, M. (1995) Characterization of the Besov Spaces via the Commutator Operator of Coifman, Rochberg and Weiss. *Indiana University Mathematics Journal*, **44**, 1-18. https://doi.org/10.1512/iumj.1995.44.1976

[26] Si, Z. and Xue, Q. (2016) A Note on Vector-Valued Maximal Multilinear Operators and Their Commutators. *Mathematical Inequalities & Applications*, **19**, 249-262. https://doi.org/10.7153/mia-19-18

[27] de Francia, J.R., Ruiz, F.J. and Torrea, J. (1986) Calderón-Zygmund Theory for Operator-Valued Kernels. *Advances in Mathematics*, **62**, 7-48. https://doi.org/10.1016/0001-8708(86)90086-1