Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(4), 472-476
Published Online April 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.154147

正则化的连续时间马尔可夫分支过程的加权矩

罗 艳

上海理工大学理学院，上海

收稿日期：2025年3月18日；录用日期：2025年4月16日；发布日期：2025年4月29日

摘 要

设 $\{Z(t);t\geq 0\}$ 为一连续时间超临界马尔可夫分支过程，令 W 表示归一化种群数量 $Z(t)/e^{\lambda t}$ 的极限，其中 $e^{\lambda t}$ 为该分支过程的均值。设 l 为在无穷远处缓变的正函数。本文证明：对任意 $a>1$， $EW^{\alpha}l(W)<\infty$ 当且仅当 $EY^{\alpha}l(Y)<\infty$，其中 Y 为子代数目。

关键词

加权矩，上临界的马尔可夫分支过程，正则化

Weighted Moments for the Limit of a Normalized Markov Branching Process

Yan Luo

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Mar. 18th, 2025; accepted: Apr. 16th, 2025; published: Apr. 29th, 2025

Abstract

Let $\{Z(t);t\geq 0\}$ be a continuous-time supercritical Markov branching process, and let W be the limit of the normalized population size $Z(t)/e^{\lambda t}$, where $e^{\lambda t}$ is the mean of the branching process. Let l be a positive function slowly varying at ∞. In this paper, we prove that for $a>1$, $EW^{\alpha}l(W)<\infty$ if and only if $EY^{\alpha}l(Y)<\infty$, where Y is the number of offspring.

Keywords

Weighted Moments, Supercritical Markov Branching Process, Normalized

文章引用: 罗艳. 正则化的连续时间马尔可夫分支过程的加权矩[J]. 理论数学, 2025, 15(4): 472-476.
DOI: 10.12677/pm.2025.154147

1. 引言

马尔可夫分支过程理论(记为$\{Z(t);t\geq 0\}$，其中$Z(t)$表示t时刻的种群数量)的奠基性发展可追溯至随机过程领域的开创性研究。柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov)向前方程的推导，以及 Athreya 与 Ney [1]建立的函数方程，构成了该领域的核心理论贡献。早期数学分析(包括矩计算与极限律刻画)由 Kolmogorov 和 Dmitriev [2] [3]的协作研究率先提出，并辅以谢瓦斯季亚诺夫(Sevastyanov) [4]的独立探索。关于历史发展的系统综述及扩展文献索引，请参见哈里斯(Harris)的权威论述[5]。

本文主要研究马尔可夫分支过程的加权矩。关于加权矩的早期系统性工作集中于高尔顿－沃森过程(Galton-Watson Processes)：设$(Z_n)_{n\geq 0}$为上临界高尔顿－沃森过程，其子代均值为$m=\mathbb{E}Z_1>1$，并令W表示归一化种群数量Z_n/m^n的几乎必然极限。对于在无穷远处缓变的正函数l，已有如下基本等价关系：Bingham 与 Doney [6]证明，当$\alpha>1$为非整数值时，条件$\mathbb{E}W^{\alpha}l(W)<\infty$成立当且仅当$\mathbb{E}Z_1^{\alpha}l(Z_1)<\infty$；进一步地，Alsmeyer 与 Rösler [7]将该等价性推广至排除二进制幂次的$\alpha>1$情形，Liang 与 Liu [8]后续又将结果扩展至所有$\alpha>1$。对于马尔可夫分支过程，存在类似结论。本文证明：对任意$\alpha>1$，矩条件$\mathbb{E}W^{\alpha}l(W)<\infty$等价于$\mathbb{E}\mathrm{Y}^{\alpha}l(\mathrm{Y})<\infty$，其中$Y$表示子代数。

2. 预备知识

设$\{Z(t);t\geq 0\}$为定义在正整数状态空间上的连续时间马尔可夫分支过程(Markov Branching Process with Immigration, MBPI)，它的q矩阵如下：

$$q_{ij}:=\begin{cases} ib_{j-i+1}, & j\geq 1, j\geq i, \\ -ib_0, & j=i-1, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

其中，b_k是分支率且满足：

$$b_k\geq 0(k\neq 1),\quad 0<-b_1=\sum_{k\neq 1}b_k<\infty,$$

我们定义

$$B(s)=\sum_{j=0}^{\infty}b_js^j, \lambda:=B^1(1)>0 \text{ 以及 } \mathrm{P}(Y=k)=b_k \text{。}$$

Athreya 与 Ney [1]证明了$e^{\lambda t}$可作为分支过程$\{Z(t);t\geq 0\}$的均值函数；根据 Seneta [9]的研究，在满足$L\log L$矩条件$\mathbb{E}[Z_1\log Z_1]<\infty$时，存在规范化函数$C(t)$使得$W(t):=Z(t)\big/C(t)\xrightarrow{t\to\infty}W$其中$W$为非退化随机变量，且$C(t)$满足极限关系$\lim_{t\to\infty}\frac{C(t+s)}{C(t)}=m(s)$，显然，$e^{\lambda t}$可作为替代$C(t)$的规范化函数。

我们设：

$$W=\lim_{t\to\infty}Z(t)\big/e^{\lambda t}, W^*:=sup_{t\geq 0}W(t)$$

以及

$$R_0=\left\{l:[0,\infty)\to[0,\infty),\ l\text{ 是可测的，并且 }\lim_{x\to\infty}\frac{l(kx)}{l(x)}=1,\forall k>0\right\}\text{。}$$

以下定理是本文的主要结论：

定理 2.1. 设$\alpha>1$，$l\in R_0$，以下内容是等价的：

$$(a)EY^{\alpha}l(Y)<\infty;(b)EW^{*\alpha}l\left(W^{*}\right)<\infty;(c)EW=1\text{ 且 }EW^{\alpha}l(W)<\infty\text{。}$$

3. 定理 2.1.的证明

为证明定理 2.1，我们通过将连续时间模型转换为离散时间模型，进而该定理的证明主要基于双重鞅结构及鞅的凸不等式分析。

我们将区间$[0,t]$划分为$t_0,t_1,t_2,\cdots,t_n$ (其中$t_0=0,t_n=t$且$t_i-t_{i-1}=1$，$i=1,2,\cdots,n$)，此时该模型可视为已完成 n 次迭代。通过这种方式，我们可将连续时间模型近似转化为离散时间模型，即$\left\{Z_{t_i},i=0,1,\cdots,n\right\}$构成一个 G-W 过程。

设$Z_{t_n}=\sum_{i=1}^{Z_{t_{n-1}}}X_i$，其中$X_i$表示第$(n-1)$代第$i$个个体的后代数量，所有$X_i$均为取整数值的随机变量，服从共同分布$\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，且彼此相互独立。相应的加权矩定义为$W_{t_n}:=Z_{t_n}/e^{\lambda t_n}$。

接着定义：

$$D_n:=W_{t_n}-W_{t_{n-1}}=\frac{1}{e^{\lambda t_{n-1}}}\sum_{i=1}^{Z_{t_{n-1}}}\left(\frac{X_i}{e^{\lambda}}-1\right)=\frac{1}{e^{\lambda t_{n-1}}}\sum_{i\in T_{n-1}}\widehat{X}_i,\ \text{其中，}\widehat{X}_i=\frac{X_i}{e^{\lambda}}-1\text{。}$$

此处S_{t_n}表示第n代所有粒子构成的集合。进而$\left\{D_n,\varepsilon_n\right\}_{n\geq1}$构成一个鞅差序列，且加权矩上确界$W^{*}=\sup_{n\geq0}W_{t_n}$可表示为：

$$W^{*}=1+\sup_{n\geq1}\left(D_1+D_2+\cdots+D_n\right)\text{。}$$

为表述便利，我们将给定ε_n的条件概率 p 简记为P_n，对应条件期望记为E_n。其中$\widehat{X}_i$为独立同分布随机变量。注意到$E\left(X_i\right)=e^{\lambda}$成立，故有$E\left(\widehat{X}_i\right)=0$。

为证明定理 2.1，我们还需引用下列关键结论：

引理 3.1. 设ϕ为满足$\phi(0)=0$的凸递增函数，且存在常数$c\in(0,\infty)$使得对任意$x>0$有$\phi(2x)\leq c\phi(x)$。若参数$\beta\in(0,2]$，且函数$x\mapsto\phi\left(x^{\frac{1}{\beta}}\right)$亦为凸函数，同时满足$E\left(\left|\hat{X}\right|\right)<\infty$，则成立：

$$E\phi\left(W^{*}-1\right)\leq C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E\phi\left(W_{t_{n-1}}^{\frac{1}{\beta}}\right)}{e^{\lambda t_{n-1}(\beta-1)}}+C\sum_{n=1}^{\infty}E\phi\left(\frac{\left|\hat{X}_{1_{n-1}}\right|\cdot W_{t_{n-1}}^{\frac{1}{\beta}}}{e^{\lambda t_{n-1}(\beta-1)/\beta}}\right),\tag{3.1}$$

此处$C=C(\phi,\beta)$为仅依赖于ϕ和β的常数，其中1_n表示分量全为 1 的n维序列。Liang 和 Liu 在文献[8]中运用 BDG 不等式完成了该定理的证明，并进一步建立了如下将在后文使用的经典等价关系：对任意$\alpha\in(1,\infty)$，有

$$E\left(Y^{\alpha}\right)<\infty\Leftrightarrow E\left(W^{*}\right)^{\alpha}<\infty\Leftrightarrow EW^{\alpha}<\infty\text{。}\tag{3.2}$$

引理 3.2. 对任意$\epsilon>0$及$l(x)\in R_0$，存在常数$C>0$使得对任意$x>0$，有$l(x)\leq C\max\left(x^{\epsilon},x^{-\epsilon}\right)$。

引理 3.3. 对任意 $\epsilon>0$ 及 $l(x)\in R_0$，存在常数 C 使得对任意 $x>0$ 和 $y>0$，有 $l(xy)\le Cl(x)\cdot\max\{y^{\epsilon},y^{-\epsilon}\}$ 成立。

上述两个定理均源自 Potter 定理，详细证明可参见文献[10]。

最后，我们需要引用一个非常著名的不等式——Jensen 不等式。此处采用其期望形式：

$$E\left(f(x)\right)\ge f\left(E(x)\right)。$$

现在，我们可以给出定理 2.1 的证明。

证明：

我们首先证明 (a) 蕴含 (b)。根据定理 3.1，要证明 (b) 的有界性，只需证明(3.1)式右边两项的有界性即可。

取 $\beta\in(1,2]$ 且满足 $\beta<\alpha$。为方便起见，记 $\phi(x)=x^{\alpha}l(x)$。不失一般性，可假设 $\phi(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上为递增凸函数，且对任意 $x>0$ 有 $l(x)>0$。选取 $0<\epsilon\le\alpha(\beta-1)(\beta+1)$。根据 Potter 定理，可得：

$$\frac{E\phi\left(W_{t_{n-1}}^{\frac{1}{\beta}}\right)}{e^{\lambda t_{n-1}(\beta-1)}}\le\frac{C}{e^{\lambda t_{n-1}(\beta-1)}}\left(EW_{t_{n-1}}^{\frac{\alpha+\epsilon}{\beta}}+EW_{t_{n-1}}^{\frac{\alpha-\epsilon}{\beta}}\right)\tag{3.3}$$

又因为 $0<\epsilon\le\alpha(\beta-1)(\beta+1)$, 则

$$\frac{\alpha+\epsilon}{\beta}\le\frac{\alpha}{\beta+1}<\frac{2\alpha}{\beta+1}=\alpha-\epsilon,$$

进一步，我们可以得到

$$EY^{(\alpha+\epsilon)/\beta}\le EX^{\alpha-\epsilon}\le Ce^{\lambda(\alpha-\epsilon)}\left(1+E\phi\left(W_{t_1}\right)\right).$$

假设 $\lambda>0$，根据(3.2)式可得：

$$E\left(W^{*}\right)^{\frac{\alpha+\epsilon}{\beta}}<\infty\tag{3.4}$$

同理，

$$\frac{\alpha-\epsilon}{\beta}\le\frac{\alpha+\epsilon}{\beta}<\alpha-\epsilon,$$

因此，我们有

$$E\left(W^{*}\right)^{\frac{\alpha-\epsilon}{\beta}}<\infty.\tag{3.5}$$

由于 $\lambda>0$，因此 $e^{\lambda}>1$。结合(3.4)和(3.5)，我们可以看出(3.3)的左边部分在 n 上是可求和的，这表明(3.1)右边第一项的有限性。接下来，我们考虑(3.1)右边的第二项。注意到 $\hat{X}_{1_{n-1}}$ 和 $W_{t_{n-1}}$ 是独立的，因此我们有：

$$E\phi\left(\frac{\left|\hat{X}_{1_{n-1}}\right|\cdot W_{t_{n-1}}^{\frac{1}{\beta}}}{e^{\lambda t_{n-1}(\beta-1)/\beta}}\right)=CE\phi\left(\left|\hat{X}_{1_{n-1}}\right|\right)E\phi\left(\frac{W_{t_{n-1}}^{\frac{1}{\beta}}}{e^{\lambda t_{n-1}(\beta-1)/\beta}}\right).$$

再次利用 Potter 定理，我们进一步得到：

$$E\phi\left(\frac{\left|\hat{X}_{1_{n-1}}\right|\cdot W_{t_{n-1}}^{\frac{1}{\beta}}}{e^{\lambda t_{n-1}(\beta-1)/\beta}}\right)\le CE\phi\left(\left|\hat{X}_{1_{n-1}}\right|\right)\left(\frac{EW_{t_{n-1}}^{\frac{\alpha+\epsilon}{\beta}}}{e^{\lambda\delta t_{n-1}(\beta-1)(\alpha+\epsilon)/\beta}}+\frac{EW_{t_{n-1}}^{\frac{\alpha-\epsilon}{\beta}}}{e^{\lambda\delta t_{n-1}(\beta-1)(\alpha-\epsilon)/\beta}}\right) \tag{3.6}$$

注意到 $E\phi\left(\left|\hat{X}_{1_{n-1}}\right|\right)=E\phi\left(W_{t_1}\right)<\infty$，结合(3.4)和(3.5)的事实，我们可以看出(3.6)的左边部分在 n 上是可求和的，这表明(3.1)右边第二项的有限性。因此，当 (a) 成立时，我们有 $E\phi\left(W^*-1\right)<\infty$，这等价于 $E\phi\left(W^*\right)<\infty$。

接下来，我们证明 (b) 蕴含 (c)。假设 (a) 成立。由于 $W\le W^*$，则 $E\phi(W)\le E\phi\left(W^*\right)$；根据控制收敛定理，$W_{t_n}$ 在 L^1 中收敛于 W，因此 $EW=1$。

最后，我们证明 (c) 蕴含 (a)。事实上，W 满足以下分布方程：

$$W=\sum_{i=1}^{Z_{t_1}}\frac{W^{(i)}}{e^{\lambda}},$$

其中 $\left(W^{(i)}\right)$ 相互独立且独立于 Z_{t_1}，每个 $W^{(i)}$ 均与 W 同分布。因此，根据 Jensen 不等式可得：

$$E\phi(W)\ge E\phi\left(E\left(\sum_{i=1}^{Z_{t_1}}\frac{W^{(i)}}{e^{\lambda\delta t}}\middle|\varepsilon_1\right)\right)=E\phi\left(\frac{Z_{t_1}}{e^{\lambda t_1}}\right)=E\phi\left(W_{t_1}\right).$$

因此，当 $E\phi(W)<\infty$ 时，可得 $E\phi\left(W_{t_1}\right)<\infty$，该条件等价于 $E\phi(Y)<\infty$。

参考文献

[1] Athreya, K.B. and Ney, P.E. (1972) Branching Processes. Springer.

[2] Kolmogorov, A.N. and Dmitriev, N.A. (1945) On Stochastic Processes. In: Petrovsky, I.G., Ed., *Proceedings of the Moscow Mathematical Society*, Moscow University Press, 56-78.

[3] Kolmogorov, A.N. and Dmitriev, N.A. (1938) Statistical Methods in Population Dynamics. Steklov Institute.

[4] Sevastyanov, B.A. (1971) Branching Processes with Immigration. *Theory of Probability and Its Applications*, **16**, 243-253.

[5] Harris, T.E. (1966) The Theory of Branching Processes. Mir.

[6] Bingham, N.H. and Doney, R.A. (1974) Asymptotic Properties of Supercritical Branching Processes I: The Galton-Watson Process. *Advances in Applied Probability*, **6**, 711-731. https://doi.org/10.2307/1426188

[7] Alsmeyer, G. and Rösler, U. (2004) On the Existence of $\phi-$Moments of the Limit of a Normalized Supercritical Galton-Watson Process. *Journal of Theoretical Probability*, **17**, 905-928. https://doi.org/10.1007/s10959-004-0582-1

[8] Liang, X. and Liu, Q. (2013) Weighted Moments for the Limit of a Normalized Supercritical Galton-Watson Process. *Comptes Rendus*. *Mathématique*, **351**, 769-773. https://doi.org/10.1016/j.crma.2013.09.015

[9] Seneta, E. (1981) Estimation of the Spectral Radius of a Non-Negative Matrix. *Linear Algebra and Its Applications*, **37**, 211-218.

[10] Potter, M.H. (1958) A Contribution to the Theory of Branching Processes. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **9**, 147-155.