

色散冲击波的研究

张彩丽

上海理工大学理学院, 上海

收稿日期: 2025年2月17日; 录用日期: 2025年3月12日; 发布日期: 2025年4月9日

摘要

我们将构建色散冲击波结构。波形由初始参数剖面生成, 以高阶CLL方程为例具体给出几种基本波形。

关键词

色散冲击波, 高阶CLL方程

Research on Dispersed Shock Waves

Caili Zhang

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Feb. 17th, 2025; accepted: Mar. 12th, 2025; published: Apr. 9th, 2025

Abstract

We will construct dispersive shock wave structures. The waveforms are generated from the initial parameter profiles, and several basic waveforms are specifically given as examples for the higher order CLL equations.

Keywords

Dispersive Shock Waves, Higher Order CLL Equations

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

文章引用: 张彩丽. 色散冲击波的研究[J]. 理论数学, 2025, 15(4): 46-52.

DOI: 10.12677/pm.2025.154107

1. 色散冲击波

色散冲击波的形成机制是在具有高阶效应的系统中，冲击波和色散波动的形成通常是由以下机制引起的，非线性耦合即非线性力项 $f(x)$ 的引入会导致系统的波动形式变得复杂。非线性项使得波的传播不再是简单的线性波，而是可能形成波形急剧变化的冲击波。例如，某些类型的势能函数可能导致局部波速的变化，从而产生波前的剧烈变化。色散效应即由于不同频率的波成分具有不同的传播速度，色散效应会导致波形随着传播时间的推移发生畸变，波的形状逐渐扩展或压缩，甚至会分裂成多个波包。噪声影响即噪声项 $\eta(t)$ 引入了随机性，使得系统的行为更加复杂。在某些情况下，噪声可以导致系统形成类似于随机共振的效应，从而在特定条件下形成稳定的波动结构，表现为色散冲击波。高阶惯性项即高阶惯性项可以引入额外的波动模式，并与非线性和噪声相互作用，进一步增强系统的复杂性和波动传播的多样性。在许多物理系统中，波的不同频率会以不同的速度传播，导致波形在时间和空间中扩展。色散项通常是由高阶导数引入的，它描述了波传播过程中不同波长成分的传播速度差异。冲击波是一种强烈的非线性波，通常由突然的压力或速度扰动引发。在常规的线性波中，波动的幅度和形状随时间平滑变化；而在冲击波中，波形会突然跳跃，波速常常大于声速。对于高阶 CLL 方程中的色散冲击波，在高阶 CLL 方程中，色散项与冲击波相互作用，影响冲击波的传播特性。传统的冲击波理论通常基于简单的线性或弱非线性波动模型，而在高阶 CLL 方程中，由于色散的存在，冲击波的传播和特性可能出现不同的现象 [1]-[5]。

色散冲击波(Dispersive Shock Waves, DSWs)是具有色散效应的非线性波动现象，通常出现在包含色散和非线性效应的介质中。其物理背景源于两个关键的物理现象：非线性和色散。为了理解色散冲击波，我们需要深入分析这两个因素对波动的影响。

非线性效应是指波动方程中的波幅与波动的传播速度之间的关系不再是线性的。具体来说，当介质的响应与输入信号的幅度呈非线性关系时，波的传播会出现自调节的特性。例如，在流体动力学中，非线性效应可能导致波的增幅或波形变形，使波的传播速度不再均匀。

色散是指不同频率的波动成分以不同的速度传播。色散通常由介质的性质或波的特性(例如波长、频率等)引起。在色散介质中，不同频率的成分会产生不同的相速度，导致波形随时间变化，发生扩展或变形。

当一个含有非线性特性和色散特性的波在介质中传播时，可能会经历类似于经典冲击波的现象，但由于色散效应，冲击波的形态与传统的冲击波有所不同。特别是在一维和多维系统中，非线性波动与色散效应的相互作用可以产生复杂的波形，包括锐利的波峰和波谷。具体地，当一种扰动在色散介质中传播时，局部的非线性效应往往导致波形在时空中不断变宽，而色散效应则抑制了波形的锐化。这样就会形成一种特殊的结构，称为色散冲击波，它常常由不同频率的波的组合作用构成。

色散冲击波通常具有以下特征：局部尖锐波形：色散冲击波虽然不是传统意义上的锐利冲击波，但它可以表现出类似的强烈波动，通常表现为一组波脉冲或“阶梯”状的结构。传播速度变化：由于色散效应的影响，波的传播速度随着波的频率或波长的变化而变化，这种不均匀性使得色散冲击波与传统冲击波有所不同。波的分散：在色散介质中，波的不同频率分量可能会因色散效应而相互分离，从而导致波形的变形。

色散冲击波在很多领域中有着重要的应用，特别是在物理学、工程学和地球科学中。例如：等离子体物理：色散冲击波在等离子体中的传播、波与粒子相互作用等方面有着重要的影响。光纤通信：在长距离光纤传输中，由于色散效应，光脉冲的传播会出现波形的变宽或分散，而色散冲击波可以用于设计更高效的信号传输方案。非线性光学：在光学材料中，色散与非线性效应的结合会导致一系列的波动现

象,包括色散冲击波,可以用于激光束的控制与调制。色散冲击波的理论研究通常基于 Korteweg-de Vries 方程(KdV 方程)、非线性薛定谔方程(NLS 方程)等模型,这些方程能够描述非线性波和色散效应的相互作用,并预测色散冲击波的形成与演化。KdV 方程:描述了在弱非线性和弱色散条件下,波动的传播和形成孤立波的过程。NLS 方程:描述了在非线性介质中,波的演化过程,尤其是在强非线性或强色散条件下,能够产生类似色散冲击波的现象。

色散冲击波是由于非线性效应与色散效应相互作用形成的一种波动现象。在许多物理系统中,这种波动现象对系统的动态行为有着深刻的影响,且在许多实际应用具有重要意义,如光纤通信、等离子体物理和非线性光学等领域。

2. 高阶 CLL 方程

$$q_t + q_{xxx} + \frac{3}{2}i|q|^2 q_{xx} - \frac{3}{4}|q|^4 q_x + \frac{3}{2}iq_x^2 q^* = 0$$

其 LAX 对是

$$\Psi_x = \begin{pmatrix} F & G \\ H & -F \end{pmatrix} \Psi$$

$$\Psi_t = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix} \Psi$$

高阶 CLL 方程中的色散冲击波是一种结合了色散效应和冲击波特征的波动模式。这种波动模式通常出现在具有强非线性效应、噪声驱动和高阶惯性项的系统中。色散冲击波具有不连续性、波速依赖性和振幅变化等特点,通常需要通过数值方法或近似解析方法来描述和理解。它们在流体力学、气体动力学、以及更广泛的物理学和生物物理学中有着重要的应用。

高阶 CLL 方程(Corrected Landau-Lifshitz 方程)常被用于研究色散冲击波,主要原因包括多个方面,包含高阶色散效应:在描述色散冲击波时,高阶 CLL 方程考虑了比传统方程更高阶的色散项。例如,在光纤通信等领域,它能更精确地描述光脉冲在介质中传播时由于不同频率成分具有不同传播速度而产生的色散现象,比一些只考虑低阶色散的方程更符合实际物理情况。若考虑非线性效应:实际物理系统中,色散冲击波的形成和演化往往伴随着非线性效应。高阶 CLL 方程包含了合适的非线性项,能够准确描述波与波之间、波与介质之间的非线性相互作用,如在等离子体物理中,对离子声波等色散冲击波的描述更为准确。它有丰富的解的结构:高阶 CLL 方程具有多种形式的解析解和数值解,如孤子解、周期解等。这些解能够对应色散冲击波在不同条件下的各种物理形态,为研究提供了理论基础。通过对这些解的分析,可以深入了解色散冲击波的特性和演化规律。可积性与守恒律:高阶 CLL 方程通常具有可积性,这意味着它存在一些守恒量,如能量、动量等。利用这些守恒律,可以更方便地研究色散冲击波在演化过程中的物理量变化,为理论分析和数值计算提供约束条件,保证结果的合理性和准确性。实验验证:高阶 CLL 方程的理论结果与许多实验观测结果相符。在水波、光波等实验中,通过该方程预测的色散冲击波的特征,如波形、传播速度等,都能与实际测量结果较好地吻合,这验证了其在研究色散冲击波方面的有效性和可靠性。它有许多实际应用价值:在通信工程、等离子体物理、流体力学等多个领域,色散冲击波现象普遍存在且具有重要影响。高阶 CLL 方程为这些领域中与色散冲击波相关的问题提供了有效的理论工具,有助于优化通信系统设计、理解等离子体中的物理过程、解决流体力学中的复杂问题等[6]。

3. 高阶 CLL 方程的色散冲击波

高阶 CLL 方程(或 C-L-L 方程)通常指的是具有某种非线性和色散效应的方程,常用于描述流体动力

学、光学或其他物理场景中的波动现象。CLL 方程的具体形式可以变化，但通常具有如下的一般特征。方程中的某些项是非线性的，意味着系统的响应会随着波的强度或某些参数的变化而变化。对于色散，方程中包含了描述波动传播速度依赖于频率或波数的项，这就是色散效应。色散可以导致不同频率的波成分以不同的速度传播，从而影响波形。色散冲击波是指在色散效应下，波动会表现出类似冲击波的行为。在这种情况下，冲击波不仅由非线性效应引起，还会受到色散的影响，使得波形在传播过程中发生变化。

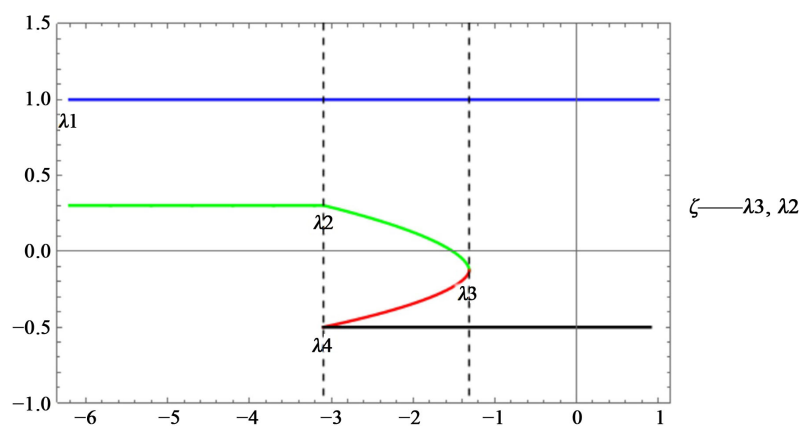
对于高阶 CLL 方程中的色散冲击波问题，通常需要考虑以下几个方面：我们对于非线性效应，在这种方程中，非线性项可能导致波的局部放大或压缩。当波幅达到一定程度时，波形可能发生剧烈变化，形成类似于冲击波的结构。我们考虑对于色散效应，色散是指波在传播过程中不同频率的成分以不同的速度传播。色散效应往往会导致波形的扩展和形状的变化，可能会影响冲击波的稳定性和传播速度。高阶 CLL 方程中的高阶导数项可能对色散冲击波的形成和演化产生重要影响。这些项会引入更复杂的波动模式，包括对波形的进一步细化，或者改变冲击波的速度和形态。

色散冲击波的形成通常由以下过程驱动：非线性效应可能会产生波形的尖锐结构，而色散效应通过不同频率成分的传播速度差异，使得这些尖锐结构可以保持稳定或发生变化。冲击波的速度、形状和稳定性在这种方程中可能会由于色散的不同而有所不同。通常需要通过数值方法来分析这种高阶方程中的波动行为。

由于高阶方程的复杂性，通常通过数值模拟来研究其色散冲击波的性质。这涉及到选择合适的数值方案(例如有限差分法或谱方法)，并通过数值实验来探讨波动的演化、稳定性及其与色散的相互作用。借助这种方法，可以深入理解色散冲击波的形成和演变过程，从而帮助我们解决相关的物理问题。使其物理意义更加丰富。

4. 高阶 CLL 方程的二种色散冲击波分析

当稀疏波断裂时，一个振荡区会取代相应的多值区。多值区。方程的解受两个黎曼不变式的控制，但在破波后，平均惠特曼方程的解会发生变化。方程的求解受两个黎曼不变式支配，但在破波之后，平均惠特曼方程受四个黎曼不变式支配。DSW 的区域包括四个黎曼不变式，分别是 λ_1 和 λ_2 以及 λ_3 和 λ_4 。现在让我们列举一下 DSW 的基本结构。在本小节中。在本小节中，我们将分析可能出现的 DSW 结构。我们将讨论。通过改变一个黎曼不变式 λ_2 或 λ_3 可以得到 DSW 的四种基本结构。 λ_3 变化，其他三个黎曼不变式为常数，如第一种(图 1)。后四种类型的 DSW 如下，满足两个黎曼不变式为常数，另外两个黎曼不变式发生变化的解，如第二种所示(图 2)。



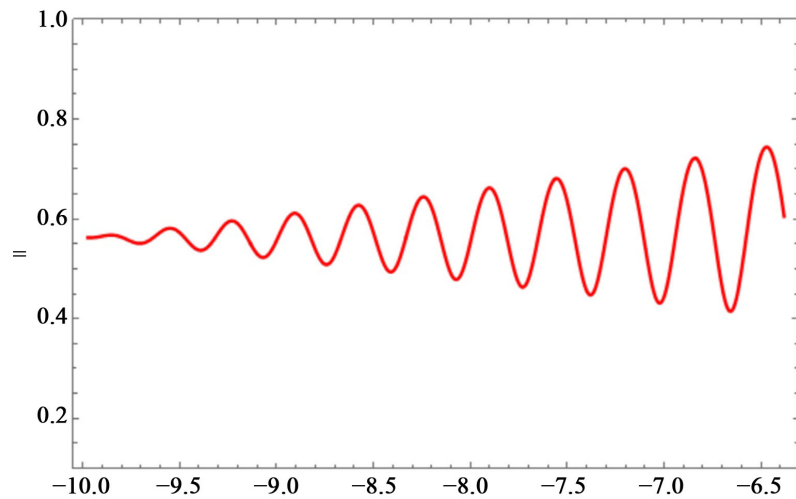


Figure 1. The first one: dispersive shock wave Riemann invariant map as well as waveforms
图 1. 第一种：色散冲击波黎曼不变量图以及波形图

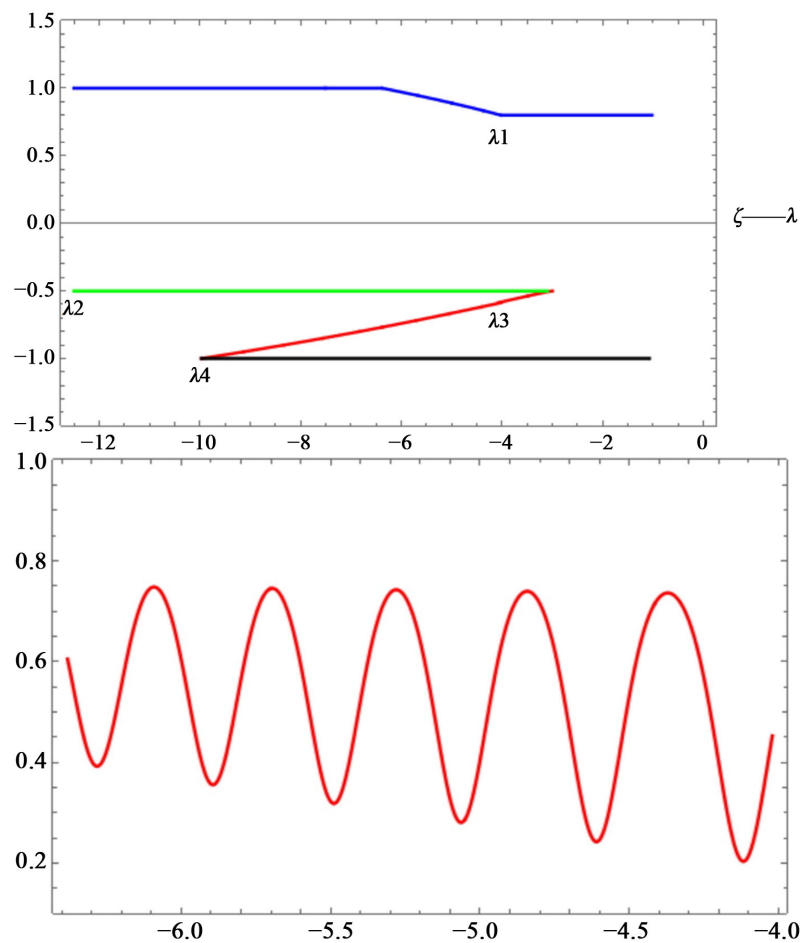


Figure 2. The second one: dispersive shock wave Riemann invariant map as well as waveforms
图 2. 第二种：色散冲击波黎曼不变量图以及波形图

高阶 CLL 方程中的色散冲击波，作为一种涉及非线性和色散效应相互作用的波动现象，在许多领域

中都有广泛的应用。主要应用领域在于各个方面。光纤中的色散冲击波：在光纤通信中，光信号的传输往往受到色散效应的影响，尤其是在长距离传输时。色散会导致信号的脉冲展宽，影响通信质量。通过分析和控制色散冲击波，研究人员可以优化光纤传输中的信号保持和传输效率。例如，在光纤网络中，适当的色散管理可以防止脉冲失真，减少误码率。非线性光学效应：高阶 CLL 方程中的色散冲击波也适用于非线性光学介质中的波传播，特别是对于超快激光脉冲的传播和压缩。色散冲击波能够影响激光脉冲的形状，从而影响激光的聚焦和传播，广泛应用于激光雷达、光学成像等领域。超声波与声学波传播：在材料的检测与探伤中，超声波常用于无损检测。超声波在不同材料中传播时可能受到非线性和色散效应的影响。色散冲击波的研究帮助理解超声波信号在复杂介质中的传播特性，提高了声学探测的精度和有效性。波速的调控：在一些特殊的材料(如光电材料或复合材料)中，色散冲击波的特性有助于研究材料的力学特性和声学行为。通过调控这些波的传播，可以改善材料的性能或增强声波传输。大气波动与气象预测：在大气波动和气象模型中，色散冲击波的研究有助于解释和预测气象现象，如热带风暴、气旋等。通过应用高阶 CLL 方程，可以模拟和理解不同波长的气象波动如何在大气中传播，并如何通过色散效应影响天气模式。气象探测：色散冲击波也被应用于气象探测技术中，尤其是在使用激光雷达(LIDAR)和雷达系统的领域，能够帮助研究大气中的波动传播，并提供精确的气象数据。等离子体波动与能量传输：在等离子体物理中，色散冲击波的研究有助于理解高能粒子如何在等离子体中传播，并通过非线性和色散效应与等离子体相互作用。这对于激光与等离子体相互作用、粒子加速器设计等领域至关重要。激光与等离子体相互作用：在激光与等离子体的相互作用中，色散冲击波能够影响激光脉冲的传播特性，影响能量的传输效率和波的聚焦效应，具有重要的应用价值。脉冲压缩与光学孤立子：在激光物理中，研究色散冲击波可以用来优化脉冲压缩技术，特别是在高功率激光脉冲的应用中，避免由于色散而导致的脉冲展宽。色散冲击波的理论帮助设计更精确的光学孤立子或孤立波，这些波在无失真传播的情况下能够携带大量信息或能量，广泛应用于精密测量和激光雷达。非线性光学材料的设计：通过理解色散冲击波的特性，可以设计出具有特殊光学性质的非线性光学材料，这些材料在光学通信、激光源设计等方面有着重要应用。数值模拟与波动研究：高阶 CLL 方程中的色散冲击波为数学物理和计算流体力学提供了重要的理论工具。通过数值模拟，研究人员能够更好地理解复杂的波动现象，尤其是那些同时涉及非线性与色散效应的复杂系统。高维非线性波动研究：高阶 CLL 方程还在更高维度(例如在二维或三维空间中的波动传播)中发挥作用，为解决多维波动问题提供了数学框架，特别是在模拟高能物理现象、等离子体行为等方面。无线通信中的波形控制：在现代无线通信中，色散和非线性效应可以影响信号的传播，导致失真。通过控制色散冲击波的特性，可以优化信号的传输，降低失真，提高信号的质量和可靠性。这在现代 5G 网络和未来 6G 技术中具有潜在的应用价值。

高阶 CLL 方程中的色散冲击波在许多科学技术领域都有重要的应用，尤其是在光通信、材料科学、气象学、等离子体物理、非线性光学和激光物理等领域。它帮助我们理解和控制复杂波动现象，进而推动这些领域的技术发展。

参考文献

- [1] Wang, D.S., Xu, L. and Xuan, Z.X. (2021) The Complete Classification of Solutions to the Riemann Problem of the Defocusing Complex Modified Kdv Equation. *Journal of Nonlinear Science*, **32**, 3. <https://doi.org/10.1007/s00332-021-09766-6>
- [2] Kong, L., Wang, L., Wang, D., Dai, C., Wen, X. and Xu, L. (2019) Evolution of Initial Discontinuity for the Defocusing Complex Modified KDV Equation. *Nonlinear Dynamics*, **98**, 691-702. <https://doi.org/10.1007/s11071-019-05222-z>
- [3] Menikoff, R. and Plohr, B.J. (1989) The Riemann Problem for Fluid Flow of Real Materials. *Reviews of Modern Physics*, **61**, 75-130. <https://doi.org/10.1103/revmodphys.61.75>

-
- [4] El, G.A., Geogjaev, V.V., Gurevich, A.V. and Krylov, A.L. (1995) Decay of an Initial Discontinuity in the Defocusing NLS Hydrodynamics. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **87**, 186-192. [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(95\)00147-v](https://doi.org/10.1016/0167-2789(95)00147-v)
 - [5] Gong, R. and Wang, D. (2022) Whitham Modulation Theory of the Defocusing AB System and Its Application. *Applied Mathematics Letters*, **126**, 107795. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2021.107795>
 - [6] Zhang, J., Liu, W., Qiu, D., Zhang, Y., Porsezian, K. and He, J. (2015) Rogue Wave Solutions of a Higher-Order Chen-Lee-Liu Equation. *Physica Scripta*, **90**, Article ID: 055207. <https://doi.org/10.1088/0031-8949/90/5/055207>