

有限开覆盖定理及其应用研究

鲁志波, 张启慧, 贾瑞玲

信息工程大学基础部, 河南 郑州

收稿日期: 2025年2月17日; 录用日期: 2025年3月17日; 发布日期: 2025年4月9日

摘要

有限开覆盖定理通过化“无限和运算”为“有限和运算”的方式, 将一个局部成立的性质推广到在一个闭区间上整体成立。本文从整体与局部的关系分析了有限开覆盖定理的内涵, 并给出具体例子分析此定理在实现整体性质与局部性质相互转化方面以及在实际问题中的应用。

关键词

有限开覆盖定理, 实数完备性, 应用研究

Research on the Finite Open Coverage Theorem and Its Application

Zhibo Lu, Qihui Zhang, Ruiling Jia

Department of Fundamental Sciences, Information Engineering University, Zhengzhou Henan

Received: Feb. 17th, 2025; accepted: Mar. 17th, 2025; published: Apr. 9th, 2025

Abstract

The finite open cover theorem extends a property that holds locally to the entire closed interval by transforming “infinite sum operations” into “finite sum operations.” This paper analyzes the essence of the finite open cover theorem from the perspective of the relationship between the global and the local. It provides concrete examples to illustrate how the theorem facilitates the mutual transformation of global and local properties, as well as its applications in practical problems.

Keywords

The Finite Open Coverage Theorem, Completeness of Real Numbers, Application

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

有限覆盖定理, 即 Heine-Borel 定理, 是实数完备性定理中唯一一个反应整体性质的定理, 它揭示了闭区间的一个本质特性: 紧致性, 这在极限理论中特别是连续性问题中发挥着重要作用。

首先回顾开覆盖的概念和有限覆盖定理。

定义 1 [1] [2] 设区间集 $E = \{I: I \text{ 开区间}\}$, 且区间 $I_0 \subset \bigcup_{I \in E} I$, 则称 E 是 I_0 的一个开覆盖。

定理 1 [1] [2] (有限开覆盖定理) 设 E 是闭区间 $[a, b]$ 的一个开覆盖, 则可从 E 中选出有限个开区间 $\{I_1, I_2, \dots, I_k\}$, 使 $[a, b] \subset \bigcup_{i=1}^k I_i$ 。

众所周知, 在高等数学中, 研究的对象从有限推广到无限时, 带来了许多不确定性, 比如极限的四则运算法则就不能推广到无限和的情形; 再比如有有限数集必有最大最小数, 但无限数集不一定存在最大最小数, 等等。有限开覆盖定理针对这类问题给出了解决办法, 将无限的问题转化为有限的问题, 这种质的变化为很多证明和实际应用带来了方便[3]。

事实上, 从直观上看, 有限开覆盖定理也可以这样解读: 闭区间由无限多个点构成, 如果在每个点处成立某个性质, 将这些点累加起来得到整个闭区间, 由于无限和的复杂性, 一般来说, 在整个区间上这个性质不一定成立, 但是, 若能利用有限开覆盖定理, 则将无限和转化为有限和, 而性质对有限和总是成立的, 从而在整个区间上得到此性质。这个定理实现了将无限转化为有限, 然后就可以利用我们熟知的一些有限空间成立的性质和方法解决问题。

另一方面, 从函数性质的成立范围来划分, 我们通常把函数的性质分为两类: 局部性质和整体性质。可以逐点定义的性质是局部性质, 因此, 局部性质可以在某一点处验证是否成立, 如函数在某点的连续性和可微性都是局部性质; 在某一区间上成立的性质称为函数在此区间上的整体性质, 如函数在某个区间上的有界性、一致连续性等都是整体性质。有限开覆盖定理的本质就是在一定条件下, 将局部性质, 即每个开区间 $I \in E$ 上成立的性质, 通过有限开覆盖定理, 把该性质推广到在闭区间 $[a, b]$ 上都成立。因此, 有限开覆盖定理所蕴涵的数学思想就是局部性质到整体性质的转化。在数学分析及优化问题等领域的应用中, 经常要求将局部性质在一定条件下推广成整体性质, 有限开覆盖定理就是实现这一目的的有力工具。

2. 有限开覆盖定理的应用

有限开覆盖定理的作用是将一个局部性质推广到一个闭区间上成立, 使其成为一个整体性质。因此在数学分析、拓扑学等理论研究, 信号处理等工程实际问题和几何建模等实际场景中都有广泛应用。

2.1. 在数学分析中的应用

有限开覆盖定理在数学分析中的常见应用包括证明闭区间上连续函数的性质、证明定积分的充要条件[4]、证明函数级数的一致收敛性等。使用有限开覆盖定理的前提条件是, 必须知道每一点应具备的局部性质 P , 进而才能将其推广到闭区间上, 故利用有限开覆盖定理处理问题的主要步骤为:

- 1) 延拓, 为了使端点处的“局部”不至于跑到区间的外面;

- 2) 确定每一点的局部性质 P ;
 - 3) 通过每一点局部性质成立的条件构造开覆盖集, 应用有限开覆盖定理获得有限覆盖, 即确定有限个点及其相应的局部性质;
 - 4) 通过这有限个点的局部性质, 验证在闭区间上成立相应的性质。
- 本文从以下两个角度来理解有限开覆盖定理在数学分析中的应用。

2.1.1. 利用反证法证明“点”定理

“点”定理的结论是确定一点使得此点与其它点具有不同的性质, 从而将此点与其他点区别开来。是一个由“整体问题的性态”推导“局部问题的性态”的命题, 因此, 借助反证法假设每一点都不是待确定的点, 进而每一点都具有相同的性质, 这正是有限开覆盖定理的出发点。

例 1 用有限覆盖定理证明 Cauchy 收敛定理。

证明: 反证法。设 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 列, 则 $\{a_n\}$ 有界, 设 $c < a_n < d$ 。假设 $\{a_n\}$ 不收敛, 则 $[c, d]$ 中的每一点都不是极限点, 即对 $\forall x \in [c, d]$, $\exists \varepsilon_x > 0$, 对 $\forall N$, 存在 $n > N$, 使

$$|a_n - x| > \varepsilon_x,$$

因此, $(x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x)$ 外含有数列的无穷多项, 这就是每一点所满足的局部性质。

记 $I_x = (x - \frac{\varepsilon_x}{4}, x + \frac{\varepsilon_x}{4})$, 则 I_x 外有 $\{a_n\}$ 的无穷多项。——这将是矛盾焦点。

令 $I = \{I_x : x \in [c, d]\}$, 开区间集 I 覆盖 $[c, d]$, 由有限开覆盖定理, 存在有限个点 $x_1, \dots, x_k$ 和相应的 $\delta_1, \dots, \delta_k$, 使得 $[c, d] \subset \bigcup_{i=1}^k I_{x_i}$, 取 $\delta = \min(\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_k})$, 利用 Cauchy 列性质可知, $\exists N$, 当 $n > m > N$ 时, $|a_n - a_m| < \frac{\delta}{4}$ 。

对 x_{N+1} , 由于 $a_{N+1} \in [c, d] \subset \bigcup_{i=1}^k I_{x_i}$, 则 $\exists j_0$, 使 $a_{N+1} \in I_{x_{j_0}}$, 即 $|a_{N+1} - x_{j_0}| < \frac{\delta_{x_{j_0}}}{4}$, 故当 $n > N+1 > N$ 时,

$$|a_n - x_{j_0}| \leq |a_n - a_{N+1}| + |a_{N+1} - x_{j_0}| < \frac{\delta}{4} + \frac{\delta_{x_{j_0}}}{4} < \frac{\delta_{x_{j_0}}}{2} < \delta_{x_{j_0}},$$

因此, 当 $n > N+1 > N$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 的所有项都落在 $(x_{j_0} - \delta_{x_{j_0}}, x_{j_0} + \delta_{x_{j_0}})$, 这与 x_{j_0} 点的性质矛盾。从而假设不成立, 命题得证。

利用有限开覆盖定理及上述类似的想法和做法可证明 Weierstrass-定理, 闭区间套定理, 确界存在定理, 单调有界收敛定理, 零点定理等等。

2.1.2. 由局部性态证明整体性态

由“局部问题的性态”推导“整体问题的性态”的命题, 适宜用有限开覆盖定理。运用此定理的关键是确定每点成立的局部性质 (P) , 进而构造开覆盖集 E , 使得在每一个开区间上成立局部性质 (P) 。

例 2 设 $\{S_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上等度连续, 即 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 对 $\forall x, y \in [a, b]$, 当 $|x - y| < \delta$ 时, 有 $|S_n(x) - S_n(y)| < \varepsilon$, 对 $\forall n$ 都成立; 又设 $\{S_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上点收敛, 证明: $\{S_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛。

分析: 例题属于抽象函数列 $\{S_n(x)\}$ 一致收敛性的判断。因无法求出和函数, 故可只能用 Cauchy 收敛原理判断一致收敛。即证 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon) > 0$, $\forall n > N$, 成立

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [a, b], \quad \forall p \in \mathbb{N}^+.$$

已知: $\{S_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上等度连续, 即 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 对 $\forall x, y \in [a, b]$, 当 $|x - y| < \delta$ 时, 有

$|S_n(x) - S_n(y)| < \varepsilon$, 对 $\forall n$ 成立; 从而

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| \leq |S_{n+p}(x) - S_{n+p}(x_0)| + |S_{n+p}(x_0) - S_n(x_0)| + |S_n(x_0) - S_n(x)| = I_1 + I_2 + I_3$$

现 $\forall \varepsilon > 0$, 对于 I_1, I_3 , 只要 $x, x_0 \in [a, b]$, 且 $|x - x_0| < \delta$, 则 $I_1 < \frac{\varepsilon}{3}$, $I_3 < \frac{\varepsilon}{3}$ 。

对于 I_2 , 利用 $\{S_n(x)\}$ 在点 $x = x_0 \in [a, b]$ 收敛, 即 $\exists N(x_0, \varepsilon) > 0$, $\forall n > N(x_0, \varepsilon)$, 成立

$$|S_{n+p}(x_0) - S_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall p \in \mathbf{N}^+。$$

即 $I_2 < \frac{\varepsilon}{3}$ 。

例题难点在于: (1) x_0 会随着 x 的变化而变化, 如何选取 x_0 使得满足 $|x - x_0| < \delta$?

(2) 如何使 $N(x_0, \varepsilon)$ 与 x_0 无关。

解决办法:

(1) 通过有限分割将任意动态点的估计转化为有限个点的静态估计[5]。

(2) 下面通过利用有限开覆盖定理来证明。

证明记 $E = \{U(x, \delta) | x \in [a, b]\}$, 则 E 是 $[a, b]$ 的开覆盖, 利用有限开覆盖定理, 存在有限个点 $x_1, x_2, \dots, x_k \in [a, b]$, 使得 $[a, b] \subset \bigcup_{i=1}^k U(x_i, \delta)$ 。于是对 $\forall x \in [a, b]$, 存在 $x_{i_0} (i_0 = 1, 2, \dots, k)$, 使得 $x \in U(x_{i_0}, \delta)$ 。

因 $\{S_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上逐点收敛, 特别地 $\{S_n(x)\}$ 在 $x = x_{i_0}$ 处收敛, 即对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(x_{i_0}, \varepsilon) > 0$, $\forall n > N(x_{i_0}, \varepsilon)$, 有

$$|S_{n+p}(x_{i_0}) - S_n(x_{i_0})| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall x_{i_0} \in [a, b], \quad \forall p \in \mathbf{N}^+。$$

又 $\{S_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上等度连续, 即对上述 $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 对 $\forall x \in U(x_{i_0}, \delta) \cap [a, b]$, 有

$$|S_n(x_{i_0}) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{对 } \forall n \text{ 都成立;}$$

特别地, $|S_{n+p}(x_{i_0}) - S_{n+p}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall p \in \mathbf{N}^+。$

取 $N(\varepsilon) = \max\{N(x_1, \delta), N(x_2, \delta), \dots, N(x_k, \delta)\}$, 则当 $n > N(\varepsilon)$ 时, 下式成立

$$\begin{aligned} |S_{n+p}(x) - S_n(x)| &\leq |S_{n+p}(x) - S_{n+p}(x_{i_0})| + |S_{n+p}(x_{i_0}) - S_n(x_{i_0})| + |S_n(x_{i_0}) - S_n(x)| \\ &< \varepsilon \quad \forall x \in [a, b], \quad \forall p \in \mathbf{N}^+。 \end{aligned}$$

故 $\{S_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛。

2.2. 在优化问题中的应用

有限开覆盖定理在工程优化中的应用主要体现在将复杂的优化问题转化为更易于处理的局部问题, 通过有限开覆盖的方式减少计算复杂度, 并提高优化效率, 主要体现在区间搜索和优化问题的高效求解上[6]。

以单变量函数的优化为例, 利用有限开覆盖定理可以将复杂的无限覆盖问题转化为有限开覆盖问题, 从而提高搜索效率。比如目标函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 需要确定该函数在区间 $[a, b]$ 上的最大值。可以通过以下步骤应用有限开覆盖定理。

① 构造闭区间 $[a, b]$ 的开覆盖 $\{U_i\}$ 。

- ② 从 $\{U_i\}$ 中选择有限个开区间覆盖闭区间 $[a, b]$ 。
- ③ 在每个选定的开区间内，使用局部优化算法找到局部最大值。
- ④ 比较全部有限个局部最大值，确定全局的最大值。

有限开覆盖定理也可以推广到多维空间，通过构造多维闭区域的开覆盖来简化搜索。

2.3. 在金融领域中的应用

有限开覆盖定理虽然是数学领域的理论，但它的数学思想和方法在经济和金融领域也有着广泛的应用[7]。

在投资组合管理中，有限开覆盖定理的思想可用于优化投资组合的构建。金融市场中的资产组合可以被视为一个集合，而不同的投资策略则可以看作是覆盖这个集合的“开集”。通过有限开覆盖定理，投资者可以在众多资产中筛选出最有效的组合，以降低风险并提高收益。例如，通过将资产的风险和收益特征划分为有限个区间，投资者可以更精准地选择符合其风险偏好的资产组合。这种方法有助于在复杂多变的市场中找到相对稳定的投资路径。

有限开覆盖定理可用于风险评估。在分析投资组合的风险时，可以将可能的风险因素范围划分为有限个区间，通过对这些区间的覆盖情况来评估整体风险水平。这种方法可以帮助投资者更好地应对市场的不确定性，提前制定风险管理策略。

在金融市场的价格预测中，有限开覆盖定理的思想可以用来确定若干个可能的价格区间。通过对这些区间的覆盖情况分析，投资者可以更准确地预测股票价格的波动范围，从而为投资决策提供依据。

有限开覆盖定理的思想还可以应用于资产定价理论。在金融资产定价中，市场通常被假设为有限状态或有限时间模型，通过这些模型可以推导出资产的定价规则。例如，在有限状态模型中，资产的未来价值可以用有限维向量表示，定价函数可以通过线性组合的方式定义。这种方法与有限开覆盖定理中“有限覆盖”的思想有相似之处，都强调通过有限的元素来描述和控制复杂系统。

有限开覆盖定理还可以用于优化金融模型的设计。例如，在设计金融产品的定价模型或风险管理模型时，可以通过有限覆盖的方法确定关键的参数区间，从而提高模型的效率和准确性。

在成本控制方面，对于企业的生产成本，可以划分出有限的成本区间，通过覆盖情况来监控和控制成本等。

有限开覆盖定理的核心思想——通过有限的元素覆盖复杂系统——为金融领域提供了重要的方法论，能够帮助投资者和金融机构更高效地管理风险和优化决策。

3. 结束语

有限开覆盖定理是一个非常重要的定理，也是数学分析处理问题的一种重要手段，在诸多实际问题中也有广泛的应用。通过分析有限开覆盖定理的特点并结合相关例题，我们发现，此定理本质是通过化“无限和运算”为“有限和运算”的方式，将一个局部成立(既在开区间集的每一个开区间上成立)的性质推广到在一个闭区间上整体成立，从而借助此定理可以实现整体(即闭区间)性质与局部(即一点)性质的相互转化。

基金项目

信息工程大学教育教学研究项目(JXYJ2025A002)。

参考文献

- [1] 华东师范大学数学系. 数学分析(上册) [M]. 第5版. 北京: 高等教育出版社, 2023.

-
- [2] 崔国忠, 郭从洲, 王耀革, 数学分析[M]. 第2版. 北京: 科学出版社, 2023.
 - [3] 杨小远, 薛玉梅, 孙玉泉, 等. 有限覆盖定理的教学研究与实践[J]. 高等数学研究, 2014, 17(1): 116-119.
 - [4] 戚民驹. 有限覆盖定理与定积分充要条件的证明[J]. 上海电机学院学报, 2010, 13(3): 174-176.
 - [5] 徐丽. 函数列一致连续和一致收敛及等度连续的关系[J]. 上海电力学院学报, 2007, 23(3): 283-285.
 - [6] 郭改慧, 李兵方. 有限覆盖定理的应用[J]. 牡丹江大学学报, 2013, 22(10): 103-104.
 - [7] 和讯网. 如何认识有限覆盖的概念及原理?有限覆盖在实际问题中的应用有哪些? [EB/OL]. <https://funds.hexun.com/2024-11-18/215610953.html>, 2025-04-03.