Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(4), 68-75
Published Online April 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.154110

Hurwitz连分数中误差和函数的若干性质

曹子昂，罗　玉，沈陆明*

湖南农业大学信息与智能科学技术学院，湖南　长沙

收稿日期：2025年2月21日；录用日期：2025年3月20日；发布日期：2025年4月9日

摘　要

对各类展式的误差和函数的研究从21世纪初就开始了，研究人员不断深入探讨其各种性质，如连续性、周期性、有界性、介值性等，同时给出函数图像的Hausdorff维数。在本文中，我们将探讨Hurwitz连分数的误差和函数，提出一些相关的性质，并研究其图像。

关键词

Hurwitz连分数，误差和函数，正则连分数，图像维数

Some Properties of the Error-Sum Function of Hurwitz Continued Fractions

Zi'ang Cao, Yu Luo, Luming Shen*

College of Information and Intelligence, Hunan Agricultural University, Changsha Hunan

Received: Feb. 21st, 2025; accepted: Mar. 20th, 2025; published: Apr. 9th, 2025

Abstract

The study of error-sum functions of expansions has been ongoing since the beginning of the 21st century, and researchers have been delving into various properties such as continuity, periodicity, boundedness, median, etc., along with giving the Hausdorff dimension of the graphs of the functions. In this paper, we will explore the error-sum function of Hurwitz continued fractions, present some related properties, and study their graphs.

Keywords

Hurwitz Continued Fractions, Error-Sum Function, Regular Continued Fractions, Graph Dimension

*通讯作者。

文章引用: 曹子昂, 罗玉, 沈陆明. Hurwitz 连分数中误差和函数的若干性质[J]. 理论数学, 2025, 15(4): 68-75.
DOI: 10.12677/pm.2025.154110

1. 引言

对各类展式的误差和函数的研究从 21 世纪初就开始了，研究人员不断深入探讨其各种性质，如连续性、周期性、有界性，介值性等，同时给出函数图像的 Hausdorff 维数。

在 2000 年，J.N. Ridley 和 G. Petruska 首次提出连分数误差和函数的概念[1]，证明它的周期等一些基本性质。同时证明了其在无理点连续，在有理点半连续。在图像维数方面，证明了其有上界，最后也提出来的介值性定理及积分值等一系列有趣的性质。

在此之后，2005 年，沈陆明和王保伟展开了对 Lüroth 展式的误差和函数的研究[2]，给出了连续与半连续的条件、介值性定理和积分值。在 2007 年，Shen Lu-Ming 和 Jun Wu 对其性质进行了补充[3]，证明了 Lüroth 展式的误差和函数是有界的，同时给出了图像的维数。2006 年，Shen Lu-Ming、Chao Ma 和 Jihong Zhang 研究了交错 Lüroth 展式的误差和函数，并研究了相关的性质。

2008 年，沈陆明、张继宏和周建军对 Engel 展式的误差和函数的若干性质展开了研究[4]，给出了其连续性情况、介值性定理，最后判断函数图像是分形的。在 2010 年，李伟等人对 Engel 展式的误差和函数进行了进一步研究[5]，给出其积分值，和图像的维数。

后续有研究人员对 p 展式[6]、β 展式[7]、交替 Sylvester 展式[8]、α-Lüroth 展式[9]等的误差和函数性质进行研究，也得出类似的结论。

直到 2023 年，仍有人对各类展式的误差和函数进行研究，如 Min Woong Ahn 展开对 Pierce 展式[10]误差和函数的相关研究

在本文中，我们将给出赫尔维茨(Hurwitz)复连分数的误差和函数，并讨论其性质。在深入探讨该内容之前，我们先简要介绍一下赫尔维茨复连分数。

对于任意实数 m，令 $\lfloor m \rfloor$ 为小于或等于 m 的最大整数。对于每一个复数 $z \in \mathbb{C}$，我们通过如下方式定义它的最近高斯整数 $[z]$：

$$[z] = \left\lfloor \Re + \frac{1}{2} \right\rfloor + i \left\lfloor \Im + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

对于任意一个复数 $z \in \mathfrak{F} := \{x + iy : x, y \in [-1/2, 1/2)\}$，我们定义 Hurwitz 映射：$T : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$

$$T(z) = \begin{cases} z^{-1} - [z^{-1}] & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases} \tag{1}$$

其中，T^0 表示 $\mathfrak{F}$ 上的恒等映射，并且对于所有的自然数 n，都有 $T^n := T^{n-1} \circ T$。对于任意复数 $z \in \mathcal{F} \setminus \{0\}$，我们定义 $a_1(z) := [z^{-1}]$，并且如果 $T^{n-1}(z) \neq 0$，那么 $a_n(z) := a(T^{n-1}(z))$。表达式

$$[0; a_1(z), a_2(z), \cdots] := \cfrac{1}{a_1(z) + \cfrac{1}{a_2(z) + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

就是 z 的 Hurwitz 连分数(HCF)。z 也可以表示为

$$[0; a_1(z), a_2(z), \cdots] := [0; a_1(z), a_2(z), \cdots, a_n + z_n] \tag{2}$$

当 $z_n = 0$ 时，我们有 $z = \frac{p_n}{q_n}$，并且对于所有的非负整数 $n\left(n \in \mathbb{N}_0\right)$，存在如下的递推关系：

$$\begin{pmatrix} p_{-1} & p_{-2} \\ q_{-1} & q_{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_{n-2} \\ q_{n-1} & q_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

与正则连分数等展式类似，当 z 的实部和虚部不同时为有理数，即 $z \in \mathfrak{F} \setminus \mathbb{Q}(i)$ 时，Hurwitz 连分数的项数是无限的，如需了解赫尔维茨连分数的更多基本性质，请参考文献[11]。

我们定义 Hurwitz 连分数的误差函数：

$$S(z) = \sum_{i=0}^{\infty}\left(q_i z - p_i\right) \quad z \in \mathfrak{F} \tag{4}$$

$q_i z - p_i$ 是 z 与渐近分数 $\frac{p_i}{q_i}$ 的误差。对于 $z \in \mathfrak{F} \setminus \mathbb{Q}(i)$，该复级数有无限项；对于 $z \in \mathfrak{F} \cap \mathbb{Q}(i)$，存在 n，使得 $q_n z - p_n = 0$，其下一项是没有被定义的，但我们取其为 0，并写成正常的无限项级数，同时记

$$S^*(x) = \left|S(x)\right|$$

在本文中，我们将结合正则连分数的一些性质讨论 $S(z)$ 的一些基本性质及其图像。

2. 一些基本性质

性质 1. 对于 $z \in \mathfrak{F}$，我们有

$$S(z) = \sum_{i=0}^{\infty}(-i)^i z_0 z_2 \cdots z_i = z_0 - z_0 z_1 + z_0 z_1 z_2 - z_0 z_1 z_2 z_3 + \cdots \tag{5}$$

证明. 从定义可知，我们有

$$z = \left[0; a_1(z), a_2(z), \cdots, a_n + z_n\right] = \left[0; a_1(z), a_2(z), \cdots, a_n, z_n^{-1}\right]$$

并且从(3)我们得到

$$z = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{p_n z_n^{-1} + p_{n-1}}{q_n z_n^{-1} + q_{n-1}}$$

即

$$-z_n = \frac{q_n z - p_n}{q_{n-1} - p_{n-1}}$$

所以

$$\begin{aligned} q_n z - p_n &= \frac{q_n z - p_n}{q_{n-1} z - p_{n-1}} \cdot \frac{q_{n-1} z - p_{n-1}}{q_{n-2} z - p_{n-2}} \cdots \frac{q_0 z - p_0}{q_{-1} z - p_{-1}} \cdot \left(q_{-1} z - p_{-1}\right) \\ &= \left(-z_n\right) \cdots \left(-z_1\right)\left(-z_0\right)(-1) = (-1)^{n+2} z_0 z_1 \cdots z_n = (-1)^n z_0 z_1 \cdots z_n \end{aligned}$$

因此，$S(z) = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i z_0 z_2 \cdots z_i$。

性质 2. 如果 $z \in \mathfrak{F} \setminus \partial\mathfrak{F}$，$T(\bar{z}) = \overline{T(z)}$。

证明. 令 $z = x + yi$，则 $\bar{z} = x - yi$。当 $z = 0$ 时，性质 2 是显然的，当 $z \neq 0$ 时，我们有

$$T(z) = \frac{1}{x+yi} - \left\lfloor \frac{1}{x+yi} \right\rfloor = \frac{x-yi}{x^2+y^2} - \left\lfloor \frac{x-yi}{x^2+y^2} \right\rfloor$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}i - \left(\left\lfloor \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{-y}{x^2+y^2} + \frac{1}{2} \right\rfloor i \right) \\
&= \frac{x}{x^2+y^2} - \left\lfloor \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{1}{2} \right\rfloor + \left(\frac{-y}{x^2+y^2} - \left\lfloor \frac{-y}{x^2+y^2} + \frac{1}{2} \right\rfloor \right) i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T(\overline{z}) &= \frac{1}{x-yi} - \left\lfloor \frac{1}{x-yi} \right\rceil = \frac{x+yi}{x^2+y^2} - \left\lfloor \frac{x+yi}{x^2+y^2} \right\rceil \\
&= \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{y}{x^2+y^2}i - \left(\left\lfloor \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y}{x^2+y^2} + \frac{1}{2} \right\rfloor i \right) \\
&= \frac{x}{x^2+y^2} - \left\lfloor \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{1}{2} \right\rfloor + \left(\frac{y}{x^2+y^2} - \left\lfloor \frac{y}{x^2+y^2} + \frac{1}{2} \right\rfloor \right) i
\end{aligned}
$$

对于函数 $f(x) = x - \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$，显然是关于原点对称的，图像见图 1

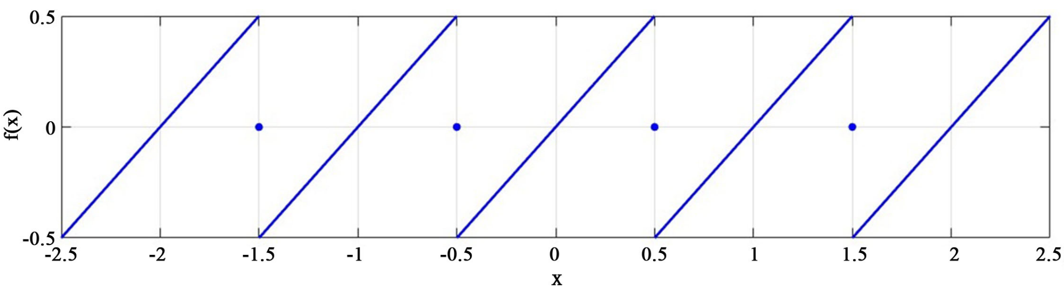

Figure 1. The graph of $f(x)$

图 1. 函数 $f(x)$ 图像

因此，$T(\overline{z}) = \overline{T(z)}$ 成立。

推论 3. 如果 $z \in \mathfrak{F} \setminus \partial\mathfrak{F}$，则有 $T(-z) = -T(z)$、$T(-\overline{z}) = -\overline{T(z)}$。

性质 4. 如果 $z \in \mathfrak{F}$，有如下性质：

1. $S(z) = z\left(1 - S\left(T(z)\right)\right)$。
2. 对于 $z \in \mathfrak{F} \setminus \partial\mathfrak{F}$，则有

$$
S(-z) + S(z) = -2\left(z_0 z_1 + z_0 z_1 z_2 z_3 + \cdots\right)
$$

$$
S(z) - S(-z) = 2\left(z_0 + z_0 z_1 z_2 + \cdots\right)
$$

3. 对于 $z \in \mathfrak{F} \setminus \partial\mathfrak{F}$，则有 $T(\overline{z}) = \overline{T(z)}$。
4. $S^*(x)$ 有界，并且 $0 \le S^*(x) \le \sqrt{2} + 1$。

证明. 1、由(5)和定义可知 $z_0 = z$，我们有

$$
\begin{aligned}
S(z) &= z_0 - z_0 z_1 + z_0 z_1 z_2 - z_0 z_1 z_2 z_3 + \cdots \\
&= z_0\left(1 - \left(z_1 - z_1 z_2 + z_1 z_2 z_3 - \cdots\right)\right) = z\left(1 - S\left(T(z)\right)\right)
\end{aligned}
$$

2、由推论 3，我们不难得出

$$
S(z) = -\left(z_0 + z_0 z_1 + z_0 z_1 z_2 + z_0 z_1 z_2 z_3 + \cdots\right)
$$

结合性质 1 即可证明。

3、根据性质 2，我们有 $z_{i+1}=T(z_i)$，并且不难得出 $\overline{z}_{i+1}=T(\overline{z}_i)$，故

$$S(\overline{z})=\overline{z_0}-\overline{z_0z_1}+\overline{z_0z_1z_2}-\overline{z_0z_1z_2z_3}+\cdots$$
$$=\overline{z_0-z_0z_1+z_0z_1z_2-z_0z_1z_2z_3+\cdots}=\overline{S(z)}$$

从图 2 中也不难看出其对称性：

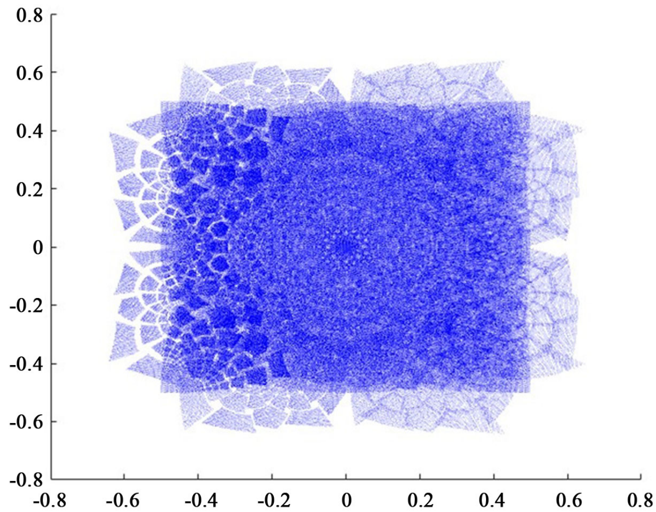

Figure 2. The scatterplot of error-sum function $S(x)$

图 2. 误差和函数 $S(x)$ 的散点图

4、从其定义出发，对于 $\forall n\in\mathbb{N}$，有 $|z_n|\le 2^{-\frac{1}{2}}$。因此

$$S^*(z)=|S(z)|\le\sum_{i=0}^{\infty}|q_iz-p_i|=|z_0|+|z_0z_1|+|z_0z_1z_3|+\cdots\le\sqrt{2}+1$$

所以，$S^*(z)$ 是有界的。

3. 误差和函数的图像

关于各类展式的误差函数图像维数，Lüroth 展式、β-展式等的误差和函数图像维数均为 1，而在文章[1]中定义的正则连分数的误差和函数的图像还没有具体的维数，只知道其维数小于 $\frac{3}{2}$。如果我们按照其他展式的方法定义其误差函数，则其维数也为 1，下面简单给出证明。

3.1. 正则连分数的误差和函数图像维数

对于任意的 $x\in[0,1)$，$[a_1,a_2,\cdots]$ 是它的连分数表达式。对于所有的 $n\ge 1$，我们定义 $p_n/q_n:=[a_1,a_2,\cdots,a_n]$ 为 x 的第 n 阶渐近分数，并且 $p_{-1}(x)=1$，$q_{-1}=0$，$p_0=0$，$q_0=1$，我们有

$$p_{n+1}(x)=a_{n+1}p_n(x)+p_{n-1}(x)$$
$$q_{n+1}(x)=a_{n+1}q_n(x)+q_{n-1}(x)$$

对于所有的 $n\ge 1$，$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\in\mathbb{N}^n$，记柱集

$$I_n\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)=cl\left\{x\in[0,1):a_1(x)=a_1,\cdots,a_n(x)=a_n\right\}$$

我们有

$$I_n\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)=\begin{cases}\left[\dfrac{p_n}{q_n},\dfrac{p_n+p_{n-1}}{q_n+q_{n-1}}\right] & \text{如果 } n \text{ 是奇数}\\ \left[\dfrac{p_n+p_{n-1}}{q_n+q_{n-1}},\dfrac{p_n}{q_n}\right] & \text{如果 } n \text{ 是偶数}\end{cases} \tag{6}$$

$$\left|I_n\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)\right|=\frac{1}{q_n\left(q_n+q_{n-1}\right)} \tag{7}$$

如果在没有争议的情况下，我们可以用$\left|I_n\right|$代替$\left|I_n\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)\right|$。

$$\frac{1}{q_n\left(q_n+q_{n+1}\right)}<\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{q_nq_{n+1}} \tag{8}$$

我们定义正则连分数的误差和函数为$S(x)$，从(7)我们得

$$S_{CF}(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\left(x-\frac{p_n}{q_n}\right)$$

对于 $x,y\in[0,1)$：

$$\begin{aligned}\sup_{x,y\in[0,1)}\left(S_{CF}(x)-S_{CF}(y)\right)&=\sup_{x,y\in[0,1)}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\left(x-\frac{p_n}{q_n}\right)-\sum_{i=0}^{\infty}\left(y-\frac{p_n}{q_n}\right)\right)\\&<\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{q_nq_{n+1}}-\frac{1}{q_n\left(q_n+q_{n+1}\right)}\right)\\&=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{q_{n+1}\left(q_n+q_{n+1}\right)}=\sum_{i=1}^{\infty}\left|I_i\right|\end{aligned}$$

同时，我们定义 $S_{CF}(x)$ 的图像：

$$Gr\left(S_{CF}(x)\right)=\left\{\left(x,S_{CF}(x)\right),x\in(0,1]\right\}$$

定理 5. $\dim_H Gr\left(S_{CF}\right)=1$。

证明：对于任意 $n\geq 1$，$\left\{I_n\times S_{CF}\left(I_n\right)\right\}$ 是 $Gr\left(S_{CF}\right)$ 的一个覆盖。$I_n\times S_{CF}\left(I_n\right)$ 可以被 $\left|\dfrac{\sum_{i=1}^{\infty}\left|I_i\right|}{\left|I_n\right|}\right|$ 个边长为 $\left|I_n\right|$ 的正方形覆盖。对于 $\epsilon>0$，

$$\begin{aligned}H^{1+\epsilon}\left(Gr\left(S_{CF}\right)\right)&\leq\lim_{n\to\infty}\inf\sum_{\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)\in D_n}\left\lceil\frac{\sum_{i=1}^{\infty}\left|I_i\right|}{\left|I_n\right|}\right\rceil\left(\sqrt{2}\right)^{1+\epsilon}\left|I_n\right|^{1+\epsilon}\\&\leq\lim_{n\to\infty}\inf\sum_{\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)\in D_n}\frac{\sum_{i=1}^{\infty}\left|I_i\right|}{\left|I_n\right|}\left(\sqrt{2}\right)^{1+\epsilon}\left|I_n\right|^{1+\epsilon}+\lim_{n\to\infty}\inf\sum_{\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)\in D_n}\left(\sqrt{2}\right)^{1+\epsilon}\left|I_n\right|^{1+\epsilon}\\&\leq\lim_{n\to\infty}\inf\sum_{\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)\in D_n}\frac{\sum_{i=1}^{\infty}\left|I_i\right|+\sum_{i=n+1}^{\infty}\left|I_i\right|}{\left|I_n\right|}\left(\sqrt{2}\right)^{1+\epsilon}\left|I_n\right|^{1+\epsilon}\\&\quad+\lim_{n\to\infty}\inf\left(\sqrt{2}\right)^{1+\epsilon}2^{-n\epsilon}\sum_{\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)\in D_n}\left|I_n\right|\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \lim_{n\to\infty}\inf \sum_{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in D_n} \frac{\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|+|I_n|\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{i}}{|I_n|}\left(\sqrt{2}\right)^{1+\epsilon}|I_n|^{1+\epsilon} \\
&= \lim_{n\to\infty}\inf \sum_{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in D_n} \left(\sum_{i=1}^{n}|I_i|+|I_n|\right)\left(\sqrt{2}\right)^{1+\epsilon}|I_n|^{\epsilon} \\
&\le \lim_{n\to\infty}\inf \left(\sqrt{2}\right)^{1+\epsilon}\left(\frac{1}{2}\right)^{n\epsilon} \sum_{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in D_n} \left(\sum_{i=1}^{n}|I_i|+|I_n|\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\inf \left(\sqrt{2}\right)^{1+\epsilon}\left(\frac{1}{2}\right)^{n\epsilon} \sum_{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in D_n} \left(|I_1|+|I_2|+\cdots+|I_{n-1}|+2|I_n|\right)
\end{aligned}
$$

$$
= \lim_{n\to\infty}\inf \left(\sqrt{2}\right)^{1+\epsilon}(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n\epsilon} = 0
$$

因此

$$
\dim_H Gr\left(S_{CF}\right) \le 1
$$

显然 $\dim_H Gr\left(S_{CF}\right) \ge 1$，所以 $\dim_H Gr\left(S_{CF}\right) = 1$。

3.2. Hurwitz 连分数的误差和函数

在[12]中，我们易知由于 Hurwitz 连分数柱集的复杂性，其误差和函数的图像维数的研究较为困难。我们通过 Matlab 实现 Hurwitz 连分数的误差和函数的可视化。

从图 3 中，我们不难看出该函数具有较强的对称性和分形的特性。如果我们像 3.1 节正则连分数一样重新定义 Hurwitz 连分数的误差函数 $S_{HCF}(z)$：

$$
S_{HCF}(z) = \sum_{i=0}^{\infty}\left(z-\frac{p_n}{q_n}\right)
$$

然后定义 $S_{CF}^{*}(z)$ 的图像

$$
Gr\left(S_{HCF}^{*}(x,y)\right) = \left\{\left(x,y,S_{HCF}^{*}(x,y)\right), x+yi\in\mathfrak{F}\right\}
$$

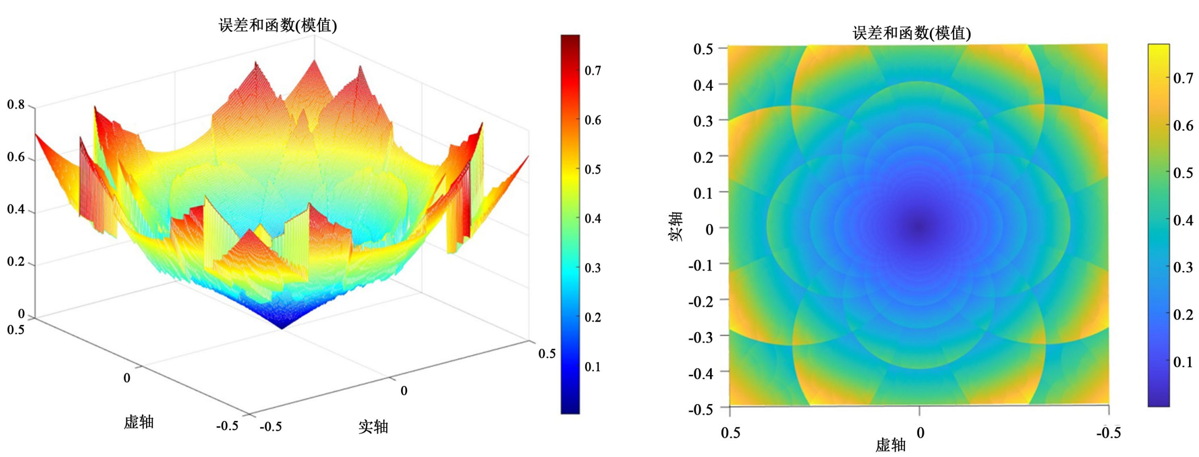

Figure 3. The graph of error-sum function $S^{*}(x)$

图 3. 误差和函数 $S^{*}(x)$ 的图像

基金项目

这项工作得到了国家级大学生创新性实验计划项目(编号 s202410537124)的支持。

参考文献

[1] Ridley, J.N. and Petruska, G. (2000) The Error-Sum Function of Continued Fractions. *Indagationes Mathematicae*, **11**, 273-282. https://doi.org/10.1016/s0019-3577(00)89083-7

[2] 沈陆明, 王保伟. Lüroth 误差和函数的若干性质[J]. 数学杂志, 2005, 25(3): 317-319.

[3] Shen, L. and Wu, J. (2007) On the Error-Sum Function of Lüroth Series. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **329**, 1440-1445. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.07.049

[4] 沈陆明, 张继宏, 周建军. Engel 展式误差和函数的若干性质(英文) [J]. 数学杂志, 2008, 28(1): 15-20.

[5] 李伟, 周玉元, 桑宝祥, 等. Engel 序列的误差和函数性质研究[J]. 四川理工学院学报(自然科学版), 2010, 23(6): 657-659.

[6] Qiao, F. and Dai, M.F. (2010) On the Error-Sum Function of Expansion in Base P. *International Journal of Nonlinear Science*, **9**, 330-334.

[7] 马超, 谢启伟, 韩华. β 展式的误差和函数[J]. 数学的实践与认识, 2011, 41(7): 235-238.

[8] Jing, H. and Shen, L. (2012) Some Properties on the Error-Sum Function of Alternating Sylvester Series. *Advances in Pure Mathematics*, **2**, 459-463. https://doi.org/10.4236/apm.2012.26070

[9] Chen, H., Wang, W. and Yu, M. (2014) Hausdorff Dimension of the Graph of the Error-Sum Function of \Alpha-Lüroth Series. *Turkish Journal of Mathematics*, **38**, 803-811. https://doi.org/10.3906/mat-1309-63

[10] Ahn, M.W. (2023) On the Error-Sum Function of Pierce Expansions. *Journal of Fractal Geometry*, *Mathematics of Fractals and Related Topics*, **10**, 389-421. https://doi.org/10.4171/jfg/142

[11] Robert, G.G. (2018) Complex Continued Fractions: Theoretical Aspects of Hurwitz's Algorithm. Aarhus University.

[12] Bugeaud, Y., Robert, G.G. and Hussain, M. (2023) Metrical Properties of Hurwitz Continued Fractions.