Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(4), 76-83
Published Online April 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.154111

Fock-Sobolev空间上的复对称加权复合算子

喻思琦

广州大学数学与信息科学学院，广东 广州

收稿日期：2025年2月16日；录用日期：2025年3月17日；发布日期：2025年4月9日

摘 要

伴随不同函数空间上的复对称加权复合算子得到广泛关注，本文致力于研究Fock-Sobolev空间上的复对称加权复合算子 φC_τ。通过引入复对称算子的概念，运用混合偏导相关公式、分类讨论、数学归纳、反证等方法，得到了 $\varphi(z)$ 恒不为零以及 φC_τ 的核空间只含零向量，得到了 φC_τ 的特征值都可表示为 $\varphi(\kappa)(\partial^1\tau)^n(\kappa)$ 形式以及其点谱的具体表达式，并给出了乘法算子 φ 和复合算子 τ 关于共轭算子和再生核函数的关系式。这些发现深化了对Fock-Sobolev空间上的复对称加权复合算子的理解，也为其他函数空间上复对称加权复合算子的研究奠定了理论基础。

关键词

Fock-Sobolev空间，加权复合算子，复对称性

Complex Symmetric Weighted Composition Operators on the Fock-Sobolev Spaces

Siqi Yu

School of Mathematics and Information Science, Guangzhou University, Guangzhou Guangdong

Received: Feb. 16th, 2025; accepted: Mar. 17th, 2025; published: Apr. 9th, 2025

Abstract

Complex symmetric weighted composition operators on different function spaces are widely concerned. In this paper, we study complex symmetric weighted composition operators on Fock-Sobolev spaces. By introducing the concept of complex symmetric operator, using the correlation formula of mixed partial derivative, classification discussion, mathematical induction, inverse proof and other methods, we get $\varphi(z)$ is always non-zero and the kernel space of φC_τ only contains

文章引用：喻思琦. Fock-Sobolev 空间上的复对称加权复合算子[J]. 理论数学, 2025, 15(4): 76-83.
DOI: 10.12677/pm.2025.154111

zero vector, get the eigenvalues of φC_τ can be expressed as $\varphi(\kappa)\left(\partial^1\tau\right)^n(\kappa)$ and the specific expression of its point spectrum, and give the relations of multiplication operator φ and compound operator τ with respect to conjugate operator and the reproducing kernel. These findings deepen the understanding of complex symmetric weighted composition operators on Fock-Sobolev spaces, and also lay a theoretical foundation for the study of complex symmetric weighted composition operators on other function spaces.

Keywords

Fock-Sobolev Space, Weighted Composite Operator, Complex Symmetry

1. 引言

算子理论与复分析、调和分析、函数论、拓扑学等数学分支息息相关，已经深入应用到其他学科领域，如量子物理，控制论。作为算子理论中的重要研究对象之一，加权复合算子反映了算子性质与其符号函数性质之间的密切关系，建立了算子理论和函数论之间的关系，见[1]-[5]。在过去几十年中，有一类特殊的加权复合算子 φC_τ 得到了广泛关注：给定两个整函数 φ 和 τ，定义加权复合算子 φC_τ 使得 $(\varphi C_\tau)f=\varphi(f\circ\tau)$。对于解析函数空间上该类加权复合算子的研究，如有界性，紧性，对称性，本质范数，闭值域等，已有一定的研究成果，见[6]-[12]。本文则讨论此类加权复合算子的复对称性。

复 Hilbert 空间上的有界算子 T 被称为复对称的，是指存在一个共轭线性、等距且对合的算子 $\mathcal{F}$，使得 $T=\mathcal{F}T^*\mathcal{F}$。Garcia，Gilbreath，Putinar 和 Wogen 等人对这些算子进行了一般性研究[13]-[15]。之后，复对称加权复合算子受到越来越多的学者关注。在单位圆盘的 Hardy 空间上，Jung 和 Kim 等人得到了复对称加权复合算子的符号函数的某些性质，并给出了加权复合算子谱的刻画[10]，Garcia 和 Hammond 则通过构造一类共轭算子为 $\mathcal{C}$ 的加权复合算子，利用其复对称性求得了两个符号函数的具体解析式，其中 $\mathcal{C}f(z)=\overline{f(\overline{z})}$ [11]。在 Fock 空间上，Hai 和 Khoi 证明了加权复合算子复对称的判别准则，得到了算子复对称时的谱与点谱[12]。在单位球的 Dirichlet 空间上，Hu，Yang 和 Zhou 证明了复对称的加权复合算子都是正规的[16]。而在 Fock-Sobolev 空间上，Chen 等人介绍了算子复对称的定义，并求出了加权复合算子复对称时符号函数的具体形式[17]。受文献[10]和[12]启发，自然会考虑的一个问题是：如何计算 Fock-Sobolev 空间上复对称加权复合算子的谱？本文的第三节将深入探讨该问题，给出 Fock-Sobolev 空间上复对称加权复合算子的计算公式。通过本研究，期望对 Fock-Sobolev 空间上加权复合算子复对称时的算子结构和性质有更清晰的认识，深化对 Fock-Sobolev 空间的理解，进一步丰富函数空间上的算子理论。

2. 预备知识

用 $\mathbb{C}^n$ 表示 n 维欧式空间，$\mathrm{d}v$ 为 $\mathbb{C}^n$ 上的正规化勒贝格体积测度，即

$$\int_{\mathbb{C}^n}\mathrm{e}^{-|z|^2}\mathrm{d}v(z)=1。$$

对于 $\mathbb{C}^n$ 中的元素 $z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)$ 和 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$，记

$$\langle z,w\rangle=z\overline{w}=\sum_{i=1}^{n}z_i\overline{w_i},\ |z|=\sqrt{\langle z,z\rangle}。$$

用 $\mathbb{N}^n$ 表示由 n 个非负整数组成的多重指标全体所成集合。对 $\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)\in\mathbb{N}^n$，记

$$|\beta|=|\beta_1|+\cdots+|\beta_n|,\ z^\beta=z_1^{\beta_1}\cdots z_n^{\beta_n},\ \partial^\beta=\partial_1^{\beta_1}\cdots\partial_n^{\beta_n}\text{。}$$

对于经典 Fock 空间 $F^2(\mathbb{C}^n)$，其范数为

$$\|f\|_2=\left[\int_{\mathbb{C}^n}|f(z)|^2\mathrm{e}^{-|z|^2}\mathrm{d}v(z)\right]^{\frac{1}{2}}\text{。}$$

定义将 $\mathbb{C}^n$ 上整函数全体组成的集合记为 $H(\mathbb{C}^n)$。对任意非负整数 m，Fock-Sobolev 空间 F_m^2 定义为

$$F_m^2:=\left\{f\,\middle|\,f\in H(\mathbb{C}^n),\sum_{|\beta|\le m}\left\|\partial^\beta f\right\|_2<\infty\right\},$$

其中范数为

$$\|f\|_{F_m^2}=\sum_{|\beta|\le m}\left\|\partial^\beta f\right\|_2\text{。}$$

Cho 和 Zhu 在文献[18]中详细介绍了这些空间，其中一个主要结论是：f 属于 F_m^2 当且仅当对于所有满足 $|\beta|=m$ 的多重指标 β，$z^\beta f$ 属于 $F^2(\mathbb{C}^n)$。因此，空间 F_m^2 中的范数表达式为

$$\|f\|_{F_m^2}=\left[\int_{\mathbb{C}^n}|f(z)|^2\mathrm{e}^{-|z|^2}|z|^{2m}\mathrm{d}v(z)\right]^{\frac{1}{2}}\text{。}$$

对应地，空间 F_m^2 中的内积为

$$\langle f,g\rangle_m=\int_{\mathbb{C}^n}f(z)\overline{g(z)}\mathrm{e}^{-|z|^2}|z|^{2m}\mathrm{d}v(z)\text{。}$$

由 Riesz 表示定理知，F_m^2 是一个再生核的 Hilbert 空间[19]。对 $z\in\mathbb{C}^n$ 和 $m\in\mathbb{N}$，记 F_m^2 上 w 处的再生核为 $K^m(z,w)$，并记 $K_w^m(z)=K^m(z,w)$，且 $k_z^m=\dfrac{K_z^m}{\left\|K_z^m\right\|_{F_m^2}}$ 是空间 F_m^2 上的正规化再生核。注意到多项式全体构成了 F_m^2 的一个稠密子集[20]，并且单项式相互正交，可知 $\left\{\phi_\beta(z)=\dfrac{z^\beta}{\sqrt{\langle z^\beta,z^\beta\rangle_m}}\right\}_{\beta\in\mathbb{N}^n}$ 形成了 F_m^2 的一组标准正交基。直接计算可得

$$K_w^m(z)=\sum_{\beta\in\mathbb{N}^n}\phi_\beta(z)\overline{\phi_\beta(w)}=\sum_{\beta\in\mathbb{N}^n}\frac{1}{\langle z^\beta,z^\beta\rangle_m}z^\beta\overline{w}^\beta\text{。}$$

3. 主要结论及证明

本节研究 Fock-Sobolev 空间上的复对称加权复合算子的谱性质。

首先介绍复对称性的定义。设 $\mathcal{H}$ 是一个可分的复 Hilbert 空间。对于 $\mathcal{H}$ 上的有界算子 T，如果存在一个共轭算子 $\mathcal{F}$，使得 $T=\mathcal{F}T^*\mathcal{F}$，就称 T 是复对称的，也称 T 是 $\mathcal{F}$-对称的。再介绍共轭算子的定义。对于 $\mathcal{H}$ 上的算子 $\mathcal{F}$，如果它是共轭线性的、等距的和对合的，就称其为一个共轭算子。更准确地说，当它满足以下条件时：

(i) 对于任意的 $f,g\in\mathcal{H}$ 和 $\kappa,\nu\in\mathbb{C}$，有 $\mathcal{F}(\kappa f+\nu g)=\overline{\kappa}(\mathcal{F}f)+\overline{\nu}(\mathcal{F}g)$；

(ii) 对于任意的 $f,g\in\mathcal{H}$，有 $\langle\mathcal{F}f,\mathcal{F}g\rangle=\langle g,f\rangle$；

(iii) $\mathcal{F}^2=I$，其中 I 是 $\mathcal{H}$ 上的恒等映射。

以下用 $\sigma_p(T)$ 来表示 T 的点谱。复对称复合算子的核空间与点谱的关系及其谱结构的关系涉及多个

数学分支的理论和技巧。点谱的存在性与核空间是否平凡密切相关，而谱结构的计算往往需要结合算子本身的对称性、紧性及所在函数空间的几何特性。具体方法包括几何域的积分技巧、对称性分解、kato 投影扰动分析以及多项式因子化等。根据谱理论，点谱 $\sigma_p(T)$ 对应算子 T 的特征值集合。对于复对称复合算子 φC_τ，若存在非零函数 f，使得 $\varphi C_\tau f=\lambda f$，则 λ 属于点谱，此时核空间 $\ker(\varphi C_\tau-\lambda I)$ 非空，见[21], [22]。在 Fock 空间中，复对称算子的性质与其谱结构密切相关。例如，当 C_τ 满足某种特定交换关系时，其核空间的结构可能简化，从而更容易确定点谱[21]。复对称性还可能导致谱的对称性，如点谱在复平面上的特殊分布[22]。那么，对于 Fock-Sobolev 空间上的复对称加权复合算子，又该如何计算它的谱呢？这是本文将要回答的问题。

以下用 $K_w^{[\zeta]}$ 表示再生核 K_w^m 在 $\overline{w}$ 处求导 $\zeta=(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)\in\mathbb{N}^n$ 次的混合偏导，即对于每个 $z\in\mathbb{C}^n$ 有

$$K_w^{[\zeta]}(z)=\frac{\left(\partial^{|\zeta|}K_w^m\right)(z)}{\left(\partial\overline{w_1}\right)^{\zeta_1}\cdots\left(\partial\overline{w_n}\right)^{\zeta_n}},$$

并且有 $\left(\partial^\zeta f\right)(w)=\left\langle f,K_w^{[\zeta]}\right\rangle_m, f\in F_m^2$。

引理 3.1 设 $m\in\mathbb{N}$，(φ,τ) 是 $\mathbb{C}^n$ 上一对整函数。若 φC_τ 是空间 F_m^2 上的一个加权复合算子，则对于每一个 $w\in\mathbb{C}^n$，有 $(\varphi C_\tau)^*K_w^m=\overline{\varphi(w)}K_{\tau(w)}^m$。

证明：对于任意的 $w\in\mathbb{C}^n$ 和 $z\in\mathbb{C}^n$，有

$$(\varphi C_\tau)^*K_w^m(z)=\left\langle(\varphi C_\tau)^*K_w^m,K_z^m\right\rangle_m=\overline{(\varphi C_\tau)K_z^m(w)}=\overline{\varphi(w)}K_{\tau(w)}^m(z)。$$

证毕。

引理 3.2 (见推论 3.2 [23])设 $m\in\mathbb{N}$，且 (u,ψ) 是一对整函数，若 $u\neq0$ 且加权复合算子 $uC_\psi:F_m^2\to F_m^2$ 有界，则 $\psi(z)=Az+B$，其中 A 是一个 $n\times n$ 矩阵，算子范数 $\|A\|\le1$，B 是一个 $n\times1$ 矩阵。此时，如果存在 $w\in\mathbb{C}^n$，使得 $|Aw|=|w|$，那么 $\langle Aw,B\rangle=0$。此外，如果 uC_ψ 是紧的，那么矩阵 A 的算子范数 $\|A\|<1$。

证明：

在文献[23]推论 3.2 中取 $p=q=2$ 及 $\alpha=1$ 得到。

证毕。

定理 3.3 设 $m\in\mathbb{N}$，且 (φ,τ) 是 $\mathbb{C}^n$ 上一对整函数，其中 τ 可逆且非常数。假设 φC_τ 是空间 F_m^2 上的一个有界的加权复合算子。若 φC_τ 是 $\mathcal{F}$ -对称的，则有以下断言成立：

(i) $\varphi(z)$ 在 $\mathbb{C}^n$ 上处处不为零；

(ii) 对任意 $z,w\in\mathbb{C}^n$，有

$$\frac{\varphi(w)}{\varphi(z)}=\frac{\left(\mathcal{F}K_w^m\circ\tau\right)(z)}{\mathcal{F}K_{\tau(w)}^m(z)};$$

(iii) $ker(\varphi C_\tau)=\{0\}$，且 $Im(\varphi C_\tau)$ 在 F_m^2 中稠密；

(iv) 点谱 $\sigma_p(\varphi C_\tau)=\left\{\left(\partial^1\tau\right)^k(\kappa)\varphi(\kappa):k\in\mathbb{N}\right\}$，其中 $\kappa=(I-A)^{-1}B$ 是函数 τ 的不动点，$A\neq I$，并且对于 $\beta\in\mathbb{N}^n$ 使得 $|\beta|=1$，记 $\partial^1=\partial^\beta$。

证明：

(i) 假设 φ 在 $u\in\mathbb{C}^n$ 处值为零。根据解析函数零点孤立性，存在 u 的一个邻域 U，使得 $\varphi(z)\neq0,\forall z\in U\setminus\{u\}$。由 φC_τ 是 $\mathcal{F}$ -对称的及引理 3.1，可得

$$(\varphi C_\tau)\left(\mathcal{F}K_u^m\right)=\mathcal{F}(\varphi C_\tau)^*K_u^m=\mathcal{F}\left(\overline{\varphi(u)}K_{\tau(u)}^m\right)=0。$$

这意味着，对任意的 $z\in U\setminus\{u\}$ 有 $\varphi(z)\left(\mathcal{F}K_u^m\right)(\tau(z))=0$。注意到 $\varphi(z)\neq0$，则在 $U\setminus\{u\}$ 上有 $\left(\mathcal{F}K_u^m\right)\circ\tau=0$。

由 τ 是可逆的，知 $\mathcal{F}K_u^m=0$。于是 $K_u^m=\mathcal{F}^2K_u^m=0$，这与再生核定义相矛盾。因此，$\varphi(z)$ 在 $\mathbb{C}^n$ 上处处不为零。

(ii) 因为 φC_τ 是 $\mathcal{F}$ -对称的，结合引理 3.1 简单计算可得

$$\varphi(w)\mathcal{F}K_{\tau(w)}^m(z)=\mathcal{F}\left(\overline{\varphi(w)}K_{\tau(w)}^m\right)(z)=\mathcal{F}(\varphi C_\tau)^*K_w^m(z)=(\varphi C_\tau)\mathcal{F}K_w^m(z)=\varphi(z)\left(\mathcal{F}K_w^m\circ\tau\right)(z),$$

其中 $z\in\mathbb{C}^n$。

(iii) 若 $f\in ker(\varphi C_\tau)$，则对每一个 $z\in\mathbb{C}^n$ 都有 $\varphi(z)f(\tau(z))=0$。结合(i)和 τ 的可逆性，可知 $f=\mathbf{0}$。因此，$ker(\varphi C_\tau)=\{\mathbf{0}\}$。

下证 $Im(\varphi C_\tau)$ 在 F_m^2 中稠密。

考虑到 $F_m^2=\overline{Im(\varphi C_\tau)}\oplus ker\left((\varphi C_\tau)^*\right)$，只需证明 $ker\left((\varphi C_\tau)^*\right)=\{\mathbf{0}\}$。对于 $f\in ker\left((\varphi C_\tau)^*\right)$，根据 φC_τ 是 $\mathcal{F}$ -对称的可知 $\varphi(\mathcal{F}f\circ\tau)=(\varphi C_\tau)\mathcal{F}f=\mathcal{F}(\varphi C_\tau)^*f=\mathbf{0}$。由(i)和 τ 的可逆性，可得 $\mathcal{F}f=\mathbf{0}$。再利用 $\mathcal{F}$ 的对合性可知 $f=If=\mathcal{F}^2f=\mathbf{0}$。因此，$\mathrm{Im}(\varphi C_\tau)$ 在 F_m^2 稠密。

(iv) 设 $\kappa=(I-A)^{-1}B$ 且 $A\neq I$，先证

$$\sigma_p(\varphi C_\tau)\subseteq\left\{\left(\partial^{\mathbf{1}}\tau\right)^k(\kappa)\varphi(\kappa):k\in\mathbb{N}\right\}。\tag{1}$$

对任意的 $\nu\in\sigma_p(\varphi C_\tau)$，存在一个非零函数 $f\in F_m^2$，使得 $(\varphi C_\tau)f=\nu f$。则对每个 $z\in\mathbb{C}^n$ 有

$$\nu f(z)=\varphi(z)f(\tau(z))。\tag{2}$$

将 $z=\kappa$ 代入上式，得 $\nu f(\kappa)=\varphi(\kappa)f(\tau(\kappa))=\varphi(\kappa)f(\kappa)$，这表明 $[\nu-\varphi(\kappa)]f(\kappa)=0$。

如果 $f(\kappa)\neq0$，那么 $\nu=\varphi(\kappa)=\left(\partial^{\mathbf{1}}\tau\right)^0(\kappa)\varphi(\kappa)\in\left\{\left(\partial^{\mathbf{1}}\tau\right)^k(\kappa)\varphi(\kappa):k\in\mathbb{N}\right\}$。

如果 f 在 κ 处有 q 阶零点，那么当 $|s|=0,1,\cdots,q-1$ 时，$\left(\partial^s f\right)(\kappa)=0$，并且当 $|s|=q$ 时，$\left(\partial^s f\right)(\kappa)\neq0$。在(2)式两边同时对 z 求 q 次导，得

$$\partial^s(\nu f(z))=\partial^s\left(\varphi(z)f(\tau(z))\right),$$

其中 $|s|=q$。将 $z=\kappa$ 代入上式后，等式右边只有一项非零，得到

$$\nu\left(\partial^s f\right)(\kappa)=\varphi(\kappa)\left(\partial^s f\right)(\kappa)\left(\partial^{\mathbf{1}}\tau\right)^q(\kappa),$$

其中 $|s|=q$。这表明

$$\nu=\varphi(\kappa)\left(\partial^{\mathbf{1}}\tau\right)^q(\kappa)\in\left\{\left(\partial^{\mathbf{1}}\tau\right)^k(\kappa)\varphi(\kappa):k\in\mathbb{N}\right\},$$

其中 $\partial^{\mathbf{1}}=\partial^\beta$，$\beta\in\mathbb{N}^n$ 且 $|\beta|=1$。因此，(1)式成立。

下证

$$\sigma_p(\varphi C_\tau)\supseteq\left\{\left(\partial^{\mathbf{1}}\tau\right)^k(\kappa)\varphi(\kappa):k\in\mathbb{N}\right\}。\tag{3}$$

在以下证明中，对 $\beta\in\mathbb{N}^n$，当 $|\beta|=n$ 时，将 ∂^β 记作 $\partial^{\boldsymbol{n}}$，将 $K_z^{[\beta]}$ 记作 $K_z^{[\boldsymbol{n}]}$。

对于任意的 $f\in F_m^2$ 和 $z\in\mathbb{C}^n$，有 $(\varphi C_\tau)f(z)=\varphi(z)f(\tau(z))$。两边同时对 z 求 n 次导，得

$$\partial^{\boldsymbol{n}}\left((\varphi C_\tau)f(z)\right)=\partial^{\boldsymbol{n}}\left(\varphi(z)f(\tau(z))\right)。\tag{4}$$

对(4)式左边，有

$$\partial^{\boldsymbol{n}}\left((\varphi C_\tau)f(z)\right)=\left\langle(\varphi C_\tau)f,K_z^{[\boldsymbol{n}]}\right\rangle_m=\left\langle f,(\varphi C_\tau)^*K_z^{[\boldsymbol{n}]}\right\rangle_m。$$

对(4)式右边，由引理 3.2 知 $\tau(z)=Az+B$，其中 A 是一个 $n\times n$ 矩阵，算子范数 $\|A\|\le 1$ 且 B 是一个 $n\times 1$ 矩阵，将 $\tau(z)=Az+B$ 代入(4)式右边，由二项展开式可得

$$\begin{aligned}\partial^{n}\left(\varphi(z)f(\tau(z))\right)&=\sum_{j=1}^{n}\binom{j}{n}\left(\partial^{j}\varphi\right)(z)\partial^{n-j}\left(f(\tau(z))\right)\\&=\sum_{j=1}^{n}\binom{j}{n}\left(\partial^{j}\varphi\right)(z)\left(\partial^{n-j}f\right)(\tau(z))\left(\partial^{1}\tau\right)^{n-j}(z)\\&=\sum_{j=1}^{n}\binom{j}{n}\left(\partial^{j}\varphi\right)(z)\left(\partial^{1}\tau\right)^{n-j}(z)\left\langle f,K_{\tau(z)}^{[n-j]}\right\rangle_{m}\\&=\left\langle f,\sum_{j=1}^{n}\binom{j}{n}\overline{\left(\partial^{j}\varphi\right)(z)\left(\partial^{1}\tau\right)^{n-j}(z)}K_{\tau(z)}^{[n-j]}\right\rangle_{m}.\end{aligned}$$

由 f 的任意性可知

$$\left(\varphi C_{\tau}\right)^{*}K_{z}^{[n]}=\sum_{j=1}^{n}\binom{j}{n}\overline{\left(\partial^{j}\varphi\right)(z)\left(\partial^{1}\tau\right)^{n-j}(z)}K_{\tau(z)}^{[n-j]}。$$

将 $z=\kappa$ 代入上式得

$$\left(\varphi C_{\tau}\right)^{*}K_{\kappa}^{[n]}=\sum_{j=1}^{n}\binom{j}{n}\overline{\left(\partial^{j}\varphi\right)(\kappa)\left(\partial^{1}\tau\right)^{n-j}(\kappa)}K_{\kappa}^{[n-j]}。$$

当 $n=0$ 时，

$$\left(\varphi C_{\tau}\right)^{*}K_{\kappa}^{[0]}=\overline{\varphi(\kappa)\left(\partial^{1}\tau\right)^{0}(\kappa)}K_{\kappa}^{[0]}。$$

用 v_0 表示 $K_{\kappa}^{[0]}$，可知 v_0 是 $\left(\varphi C_{\tau}\right)^{*}$ 关于特征值 $\overline{\varphi(\kappa)\left(\partial^{1}\tau\right)^{0}(\kappa)}$ 的一个特征向量。

当 $n=1$ 时，

$$\left(\varphi C_{\tau}\right)^{*}K_{\kappa}^{[1]}=\overline{\left(\partial^{1}\varphi\right)(\kappa)}K_{\kappa}^{[0]}+\overline{\varphi(\kappa)\left(\partial^{1}\tau\right)^{1}(\kappa)}K_{\kappa}^{[1]}。\tag{5}$$

取一个 $n\times n$ 矩阵 s_0 使得

$$\overline{\left(\partial^{1}\varphi\right)(\kappa)}=s_0\left(\overline{\varphi(\kappa)}-\overline{\varphi(\kappa)\left(\partial^{1}\tau\right)^{1}(\kappa)}\right)。$$

将上式代入(5)式，可得

$$\left(\varphi C_{\tau}\right)^{*}\left(K_{\kappa}^{[1]}-s_0K_{\kappa}^{[0]}\right)=\overline{\varphi(\kappa)\left(\partial^{1}\tau\right)^{1}(\kappa)}\left(K_{\kappa}^{[1]}-s_0K_{\kappa}^{[0]}\right)。$$

用 v_1 表示 $K_{\kappa}^{[1]}-s_0K_{\kappa}^{[0]}$，可知 v_1 是 $\left(\varphi C_{\tau}\right)^{*}$ 关于特征值 $\overline{\varphi(\kappa)\left(\partial^{1}\tau\right)^{1}(\kappa)}$ 的一个特征向量，且有 $K_{\kappa}^{[1]}=v_1+s_0v_0$。

当 $n=2$ 时，

$$\left(\varphi C_{\tau}\right)^{*}K_{\kappa}^{[2]}=\overline{\left(\partial^{2}\varphi\right)(\kappa)}K_{\kappa}^{[0]}+2\overline{\left(\partial^{1}\varphi\right)(\kappa)\left(\partial^{1}\tau\right)^{1}(\kappa)}K_{\kappa}^{[1]}+\overline{\varphi(\kappa)\left(\partial^{1}\tau\right)^{2}(\kappa)}K_{\kappa}^{[2]}。$$

取一个 $n\times n$ 矩阵 s_1 使得

$$\left(\varphi C_{\tau}\right)^{*}\left(K_{\kappa}^{[2]}-s_1v_1-s_0v_0\right)=\overline{\varphi(\kappa)\left(\partial^{1}\tau\right)^{2}(\kappa)}\left(K_{\kappa}^{[2]}-s_1v_1-s_0v_0\right),$$

用 v_2 表示 $K_{\kappa}^{[2]}-s_1v_1-s_0v_0$，可知 v_2 是 $\left(\varphi C_{\tau}\right)^{*}$ 关于特征值 $\overline{\varphi(\kappa)\left(\partial^{1}\tau\right)^{2}(\kappa)}$ 的一个特征向量，且有 $K_{\kappa}^{[2]}=v_2+s_1v_1+s_0v_0$。

若 $\left(\partial^{1}\tau\right)(\kappa)$ 不是单位根，则由归纳法可知 $K_{\kappa}^{[n]}$ 具有以下形式：

$$K_{\kappa}^{[n]} = v_n + s_{n-1}v_{n-1} + \cdots + s_0 v_0\text{，}$$

其中 v_i 是 $(\varphi C_\tau)^*$ 对应于特征值 $\overline{\varphi(\kappa)(\partial^1\tau)^i(\kappa)}$ 的特征向量，s_i 是 $n\times n$ 矩阵，$i\in\{0,1,2,\cdots,n\}$。

若 $(\partial^1\tau)(\kappa)$ 是 p 次单位根，类似讨论可知，当 $0\le n\le p-1$ 时有

$$K_{\kappa}^{[n]} = v_n + s_{n-1}v_{n-1} + \cdots + s_0 v_0\text{，}$$

可知在 $0\le n\le p-1$ 时总有 $\overline{\varphi(\kappa)(\partial^1\tau)^n(\kappa)}$ 是 $(\varphi C_\tau)^*$ 的特征值。于是，对任意非负整数 n，$\overline{\varphi(\kappa)(\partial^1\tau)^n(\kappa)}$ 都是 $(\varphi C_\tau)^*$ 的特征值。

因此，$\overline{\varphi(\kappa)(\partial^1\tau)^n(\kappa)}$ 是 $(\varphi C_\tau)^*$ 的特征值。

对于 $(\varphi C_\tau)^*$ 的任意一个特征值 $\overline{a}$，假设 v 是 $(\varphi C_\tau)^*$ 关于特征值 $\overline{a}$ 的一个特征向量，则有 $(\varphi C_\tau)^* v = \overline{a}\,v$。由 φC_τ 是 $\mathcal{F}$ -对称的，可知 $\mathcal{F}(\varphi C_\tau)\mathcal{F}(v) = \overline{a}\,v$，两边同时左乘 $\mathcal{F}$，由 $\mathcal{F}$ 的对合性和共轭线性，可得 $(\varphi C_\tau)\mathcal{F}(v) = \mathcal{F}(\overline{a}\,v) = a\mathcal{F}(v)$。所以 a 是 φC_τ 的特征值。

因此，$\varphi(\kappa)(\partial^1\tau)^n(\kappa)$ 都是 φC_τ 的特征值，(3)式成立。

证毕。

4. 总结

本文研究 Fock-Sobolev 空间上的复对称加权复合算子。首先，通过反证法，利用解析函数零点孤立性和加权复合算子的复对称性，得到乘法算子恒不为零的结论。其次，由加权复合算子的复对称性和引理 3.1，简单计算可得乘法算子和复合算子关于共轭算子和再生核函数的关系式。再次，在复合算子可逆的条件下，得到了加权复合算子的核空间只包含零向量，再结合加权复合算子的复对称性与共轭算子的对合性，得到了像空间在 Fock-Sobolev 空间上稠密。最后，一方面，利用高阶零点与不动点定义，计算得到了加权复合算子的任意特征值谱点都可表示为 $\varphi(\kappa)(\partial^1\tau)^k(\kappa)$ 形式。另一方面，利用加权复合算子定义和求导运算性质，结合

$$\left(\partial^{\zeta} f\right)(w) = \left\langle f, K_w^{[\zeta]}\right\rangle_m, f\in F_m^2$$

和归纳法，得到了 $\overline{\varphi(\kappa)(\partial^1\tau)^n(\kappa)}$ 都是 $(\varphi C_\tau)^*$ 的特征值，再由加权复合算子的复对称性可知 $\varphi(\kappa)(\partial^1\tau)^n(\kappa)$ 都是 φC_τ 的特征值。以上所得结论加深了对 Fock-Sobolev 空间上的复对称加权复合算子的理解，意识到复对称性在研究算子结构和性质时发挥的重要作用。

参考文献

[1] Kouroupis, A. and Perfekt, K. (2023) Composition Operators on Weighted Hilbert Spaces of Dirichlet Series. *Journal of the London Mathematical Society*, **108**, 837-868. https://doi.org/10.1112/jlms.12771

[2] Gallardo-Gutiérrez, E.A., Siskakis, A.G. and Yakubovich, D. (2022) Generators of C0-Semigroups of Weighted Composition Operators. *Israel Journal of Mathematics*, **255**, 63-80. https://doi.org/10.1007/s11856-022-2389-0

[3] Liu, J., Ponnusamy, S. and Xie, H. (2022) Complex Symmetric Weighted Composition-Differentiation Operators. *Linear and Multilinear Algebra*, **71**, 737-755. https://doi.org/10.1080/03081087.2022.2043816

[4] Stević, S. and Ueki, S. (2023) Polynomial Differentiation Composition Operators from H^p Spaces to Weighted-Type Spaces on the Unit Ball. *Journal of Mathematical Inequalities*, **17**, 365-379. https://doi.org/10.7153/jmi-2023-17-25

[5] Esmaeili, K. and Kellay, K. (2022) Weighted Composition Operators on Weighted Bergman and Dirichlet Spaces. *Canadian Mathematical Bulletin*, **66**, 286-302. https://doi.org/10.4153/s0008439522000297

[6] Hu, Q. and Zhu, X. (2016) Essential Norm of Weighted Composition Operators from the Lipschtiz Space to the Zygmund Space. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **41**, 1293-1307. https://doi.org/10.1007/s40840-016-0391-6

[7] Shaabani, M.H. and Vafaei, N. (2022) Numerical Ranges of Sum of Two Weighted Composition Operators on the Hardy Space H^2. *Journal of Mathematical Inequalities*, **16**, 1399-1412. https://doi.org/10.7153/jmi-2022-16-92

[8] Seyoum, W. and Mengestie, T. (2021) Spectrums and Uniform Mean Ergodicity of Weighted Composition Operators on Fock Spaces. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **45**, 455-481. https://doi.org/10.1007/s40840-021-01203-x

[9] Tien, P.T. and Khoi, L.H. (2018) Weighted Composition Operators between Different Fock Spaces. *Potential Analysis*, **50**, 171-195. https://doi.org/10.1007/s11118-017-9678-y

[10] Jung, S., Kim, Y., Ko, E. and Lee, J.E. (2014) Complex Symmetric Weighted Composition Operators on $H^2(\mathbb{D})$. *Journal of Functional Analysis*, **267**, 323-351. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2014.04.004

[11] Garcia, S.R. and Hammond, C. (2013) Which Weighted Composition Operators Are Complex Symmetric? In: Cepedello Boiso, M., Hedenmalm, H., Kaashoek, M., Montes Rodríguez, A. and Treil, S., Eds., *Operator Theory: Advances and Applications*, Springer, 171-179. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0648-0_10

[12] Hai, P.V. and Khoi, L.H. (2016) Complex Symmetry of Weighted Composition Operators on the Fock Space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **433**, 1757-1771. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.08.069

[13] Garcia, S. and Putinar, M. (2005) Complex Symmetric Operators and Applications. *Transactions of the American Mathematical Society*, **358**, 1285-1315. https://doi.org/10.1090/s0002-9947-05-03742-6

[14] Garcia, S.R. and Putinar, M. (2007) Complex Symmetric Operators and Applications II. *Transactions of the American Mathematical Society*, **359**, 3913-3931. https://doi.org/10.1090/s0002-9947-07-04213-4

[15] Gilbreath, T.M. and Wogen, W.R. (2007) Remarks on the Structure of Complex Symmetric Operators. *Integral Equations and Operator Theory*, **59**, 585-590. https://doi.org/10.1007/s00020-007-1528-7

[16] Hu, X., Yang, Z. and Zhou, Z. (2019) Complex Symmetric Weighted Composition Operators on Dirichlet Spaces and Hardy Spaces in the Unit Ball. *International Journal of Mathematics*, **31**, Article 2050006. https://doi.org/10.1142/s0129167x20500068

[17] Chen, R., Yang, Z. and Zhou, Z. (2022) Unitary, Self-Adjoint and $\mathcal{J}$-Symmetric Weighted Composition Operators on Fock-Sobolev Spaces. *Operators and Matrices*, **16**, 1139-1154. https://doi.org/10.7153/oam-2022-16-74

[18] Cho, H.R. and Zhu, K. (2012) Fock-Sobolev Spaces and Their Carleson Measures. *Journal of Functional Analysis*, **263**, 2483-2506. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2012.08.003

[19] Cho, H.R., Isralowitz, J. and Joo, J. (2015) Toeplitz Operators on Fock-Sobolev Type Spaces. *Integral Equations and Operator Theory*, **82**, 1-32. https://doi.org/10.1007/s00020-015-2223-8

[20] Cho, H.R., Choe, B.R. and Koo, H. (2015) Fock-Sobolev Spaces of Fractional Order. *Potential Analysis*, **43**, 199-240. https://doi.org/10.1007/s11118-015-9468-3

[21] Santhoshkumar, C. (2023) Binormal and Complex Symmetric Weighted Composition Operators on the Fock Space over $\mathbb{C}$. *Matematychni Studii*, **59**, 106-112. https://doi.org/10.30970/ms.59.1.106-112

[22] Malhotra, A. and Gupta, A. (2022) Complex Symmetric Weighted Composition Operators on Weighted Hardy Space. *Advances in Pure and Applied Mathematics*, **13**, 39-49. https://doi.org/10.21494/iste.op.2021.0758

[23] Mengestie, T. (2013) Carleson Type Measures for Fock-Sobolev Spaces. *Complex Analysis and Operator Theory*, **8**, 1225-1256. https://doi.org/10.1007/s11785-013-0321-7