

人教A版(2019)向量法证明正弦定理的一般性推广

李学章, 侯传燕*

新疆师范大学, 数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐

收稿日期: 2025年3月21日; 录用日期: 2025年4月26日; 发布日期: 2025年5月13日

摘要

新课改背景下,《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》在课程目标中提出明确要求,学生应通过高中数学课程,获得进一步学习以及未来发展所必需的数学基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验(简称“四基”);提高从数学角度发现和提出问题的能力、分析和解决问题的能力(简称“四能”)。本文以人教A版(2019)教科书必修第二册正弦定理证明的一般性推广为例,在学生学习教科书基本证明方法,掌握数学基础知识后,本文通过引导学生从数学角度“发现和提出问题”后,采用类比的思想,使用逻辑推理与严格证明的研究方法,通过对教科书的深度挖掘,锻炼学生的基本技能,以数学的基本思想为基石,完成“分析和解决问题”,总结探究活动经验,使得学生实现“四基”、“四能”的培养,进一步培养学生的数学核心素养。

关键词

四基, 四能, 正弦定理证明推广

The General Extension of the Sine Theorem Proved by Vector Method in People's Education A Version (2019)

Xuezhang Li, Chuanyan Hou*

College of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Mar. 21st, 2025; accepted: Apr. 26th, 2025; published: May 13th, 2025

Abstract

Under the background of the new curriculum reform, the “General High School Mathematics

*通讯作者。

文章引用: 李学章, 侯传燕. 人教A版(2019)向量法证明正弦定理的一般性推广[J]. 理论数学, 2025, 15(5): 27-35.
DOI: 10.12677/pm.2025.155150

Curriculum Standards (2017 Edition, 2020 Revised in 2020)” puts forward clear requirements in the curriculum objectives. Students should obtain the basic knowledge, basic skills, basic ideas and basic activity experience of mathematics necessary for further learning and future development (referred to as the “four bases”) through the high school mathematics curriculum; improve the ability to find and raise problems from a mathematical perspective, analyze and solve problems (referred to as the “four abilities”). This article takes the general promotion of the proof of sine theorem in the second volume of the textbook of People’s Education Edition A (2019) as an example. After students learn the basic proof method of textbooks and master the basic knowledge of mathematics, this article guides students to “discover and ask questions” from a mathematical perspective, adopts analogy, uses the research method of logical reasoning and strict proof, exercises students’ basic skills through in-depth excavation of textbooks, takes the basic ideas of mathematics as the cornerstone, completes “analysis and problem-solving”, and summarizes the experience of exploration activities, so that students can realize the cultivation of “four basics” and “four abilities”, and further cultivate students’ core mathematics literacy.

Keywords

Four Basics, Four Abilities, Promotion of Sine Theorem Proof

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 前言

在数学核心素养导向的课程改革背景下, 如何通过方法论创新促进学生“四基”建构与“四能”发展, 已成为数学教育研究的重要命题。在数学教学落实“四能”目标的过程中, 学生提出问题能力更加受到数学教育工作者的关注[1]。陶哲轩曾言“数学在某方面类似于考古学。你也许会找到某个东西的一角, 并由此判断它是有趣的。于是你开始在别处挖掘, 又找到了非常相似的另一角, 你会想, 是否有更深的联系? 你继续挖掘, 最终发现了地下的结构, 当某些东西最终表明有意义时, 你有一种发现的激动。”其提出的“数学考古学”隐喻启示我们: 当学习者通过局部特征的类比发现潜在关联时, 其认知过程实质是在建立数学对象的概念网络——这种从“经验性猜想”到“结构性证明”的思维跃迁, 恰是培养问题提出能力的关键路径。波利亚在《怎样解题》中亦指出“类比就像一个伟大的引路人”[2]。这就要求教师要引导学生突破传统证明方法的工具局限, 构建具有方法论迁移价值的证明范式。

本文基于对七种主流教材(人教 A 版(2019)、人教 B 版(2019)、北师大版、湘教版、鄂教版、沪教版、苏教版)解三角形单元的对比研究, 发现一个显著的认知失衡现象: 各版本在余弦定理证明中均统一采用向量法, 而正弦定理的证明却呈现多种证明角度与方法。具体如下:

如上图 1 至图 4 分别为沪教版教材必修第二册、湘教版必修第二册、人教 B 版必修第四册以及苏教版必修第二册中正弦定理的证明过程, 都是通过作不同内角所对应的高, 利用对应内角正弦关系表示高线的长, 推导一般三角形中面积与内角正弦等量关系, 以此得到三角形内角与边的正弦数量关系——正弦定理。

如上图 5、图 6 则为鄂教版教材必修第三册、北师大版必修第二册中正弦定理的证明过程, 二者皆采取了从特殊到一般的思想, 从较特殊的直角三角形入手, 在得出三角形正弦定理之后, 自然而然抛出问题, 在一般三角形中是否可以利用以上结论来进行推广? 故而两版教材均采用在一般三角形内做高的方法, 通过构造直角三角形的方式来实现正弦定理证明。

乘积的一半, 即三角形的面积公式为

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}bc \sin A.$$

将上式同时除以 $\frac{1}{2}abc$, 就得到

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c},$$

即

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

角
质

这样, 我们就得到了**正弦定理**: 在 $\triangle ABC$ 中, 若角 A 、 B 及 C 所对边的边长分别为 a 、 b 及 c , 则有

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Figure 1. Shanghai education edition compulsory volume 2 6.3.1 sine theorem proof process

图 1. 沪教版必修第二册 6.3.1 正弦定理证明过程

$$\sin A = \sin B = \sin C.$$

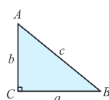


图 1.6-3

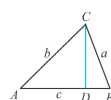


图 1.6-4

若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 如图 1.6-4, 设 CD 为 AB 边上的高, 则 $CD = b \sin A$.

于是, $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}AB \cdot CD = \frac{1}{2}bc \sin A$.

同理可得

$$S = \frac{1}{2}ac \sin B, S = \frac{1}{2}ab \sin \angle ACB.$$

因此

$$\frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}ab \sin \angle ACB,$$



在解决问题的过程中, 还得到了 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B$ 这一面积计算公式.

Figure 2. Hunan education edition compulsory volume 2 1.6.2 sine theorem proof process

图 2. 湘教版必修第二册 1.6.2 正弦定理证明过程

可以看出, 上述求三角形面积的方法在 C 为锐角时都成立; 而当 C 为钝角时, 如图 9-1-3 所示, 仍设 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的高为 AD , 则可知

$$AD = b \sin \angle ACD = b \sin(\pi - C) = \underline{\hspace{1cm}},$$

因此仍有 $S = \frac{1}{2}ab \sin C$; 当 C 为直角时, 由

$\sin 90^\circ = 1$ 可知上述面积公式仍成立.

一般地, 若记 $\triangle ABC$ 的面积为 S , 则

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}bc \sin A.$$

由此可知 $\frac{2S}{abc} = \frac{\sin C}{c} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a}$, 又因为 $\sin A > 0$, $\sin B > 0$, $\sin C > 0$, 因此可得

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

这就是**正弦定理**: 在一个三角形中, 各边的长和它所对角的正弦的比

Figure 3. People's education B edition compulsory volume 4 9.1.1 sine theorem proof process

图 3. 人教 B 版必修第四册 9.1.1 正弦定理证明过程

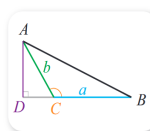


图 9-1-3

在上节中, 我们通过等式 $\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC}$ 两边同时“平方”, 将向量等式转化为数量等式, 进而推出了余弦定理. 为了进一步探索三角形的边角关系,

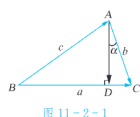


图 11-2-1

● 还有其他途径将向量等式 $\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC}$ 数量化吗?

在 $\triangle ABC$ 中, 不妨设 C 为最大角, 过点 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D , $\vec{AC}$ 与 $\vec{AD}$ 的夹角为 α (图 11-2-1).

因为 $\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC}$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } \vec{BC} \cdot \vec{AD} &= (\vec{BA} + \vec{AC}) \cdot \vec{AD} \\ &= \vec{BA} \cdot \vec{AD} + \vec{AC} \cdot \vec{AD}. \end{aligned}$$

$$\text{即 } 0 = |\vec{BA}| |\vec{AD}| \cos(90^\circ + B) + |\vec{AC}| |\vec{AD}| \cos \alpha,$$

当 C 为锐角或直角时, $\alpha = 90^\circ - C$; 当 C 为钝角时, $\alpha = C - 90^\circ$.

于是有

$$-c \sin B + b \sin C = 0,$$

$$\text{即 } \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

$$\text{同理可得 } \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}.$$

$$\text{所以 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Figure 4. Soviet education edition compulsory volume 2 11.2 sine theorem proof process

图 4. 苏教版必修第二册 11.2 正弦定理证明过程

1. 正弦定理

如图 1-43, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $C = 90^\circ$, 根据正弦函数的定义可得

$$\sin A = \frac{a}{c}, \sin B = \frac{b}{c},$$

$$\text{所以 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = c.$$

又因为 $C = 90^\circ$, 所以 $\sin C = 1$, 故 $\frac{c}{\sin C} = c$, 于是可得

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

那么, 在任意三角形中, 这一关系是否成立呢? 下面, 我们用向量来研究这个问题.

当 $\triangle ABC$ 为锐角三角形时, 如图 1-44, 过点 A 作 $AD \perp BC$, 垂足为 D .

因为 $\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$, 所以

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{AD} &= (\vec{AC} + \vec{CB}) \cdot \vec{AD} \\ &= \vec{AC} \cdot \vec{AD} + \vec{CB} \cdot \vec{AD}. \end{aligned}$$

又因为 $AD \perp BC$, 所以 $\vec{CB} \cdot \vec{AD} = 0$, 所以

$$\vec{AB} \cdot \vec{AD} = \vec{AC} \cdot \vec{AD}.$$

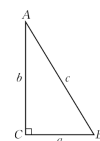


图 1-43

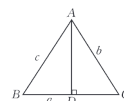


图 1-44

Figure 5. Compulsory E education edition volume 3 1.4.2.1 sine theorem proof process

图 5. 鄂教版必修第三册 1.4.2.1 正弦定理证明过程

无独有偶, 在人教 A 版必修第二册 6.4.3.2 中, 教材采用作于已知向量垂直的单位向量构造等式关系证明的向量法, 如下图 7。

在教材证明过程中, 其中对于“作与 $\vec{AC}$ 垂直的单位向量 $\vec{j}$ ”[3]。其本质皆为利用特殊三角形或特殊角度 90° 转化为特殊三角形来证明一般三角形的正弦定理, 这也解决了一部分同学对于为何要作“垂直”的单位向量的困惑。基于人教 A 版(2019)现有的向量法证明, 却未能更加直观体现衔接“几何直观”与“代数抽象”认知桥梁的普适性。现提出两个关键突破点:

① 构建适用于任意三角形的向量证明通法, 突破现行教材处理锐角三角形证明的局限;

② 开发“猜想 - 验证 - 推广”的教学路径, 实现从特殊到一般的思维进阶。这种推广不仅完善了向量法的理论完备性, 更重要的是为培养学生代数化思维提供了典型范例——当学生经历将几何问题转化为向量运算的过程时, 其实质是在实践菲利克斯·克莱因(F. Klein)倡导的“用代数方法统一几何认知”的数学观——《埃尔朗根纲领》[4]。

如图 2-61, 若 $\triangle ABC$ 是直角三角形, $C=90^\circ$, 则由

116

第二章 | 平面向量及其应用

$$\sin A = \frac{a}{c}, \sin B = \frac{b}{c},$$

$$\text{可知} \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = c,$$

$$\text{因为} \quad C=90^\circ, \sin C=1,$$

$$\text{所以} \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

对等边三角形, 这个等式无疑也成立; 对其他三角形, 它是否仍然成立呢?

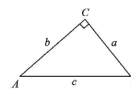


图 2-61

分析理解

如图 2-62, $\triangle ABC$ 是锐角三角形, CD 是边 AB 上的高, 根据三角函数的定义,

$$CD = a \sin B,$$

$$CD = b \sin A,$$

$$\text{所以} \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}.$$

$$\text{同理} \quad \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

$$\text{即} \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

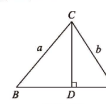


图 2-62

Figure 6. Beijing normal university edition compulsory volume
2 6.1.2 sine theorem proof process

图 6. 北师大版必修第二册 6.1.2 正弦定理证明过程

如图 6.4-10, 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 过点 A 作与 $\overrightarrow{AC}$ 垂直的
单位向量 $\mathbf{j}$, 则 $\mathbf{j}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{2} - A$, $\mathbf{j}$ 与 $\overrightarrow{CB}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{2} - C$.

因为 $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$, 所以

$$\mathbf{j} \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = \mathbf{j} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

由分配律, 得

$$\mathbf{j} \cdot \overrightarrow{AC} + \mathbf{j} \cdot \overrightarrow{CB} = \mathbf{j} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

即

$$|\mathbf{j}| |\overrightarrow{AC}| \cos \frac{\pi}{2} + |\mathbf{j}| |\overrightarrow{CB}| \cos (\frac{\pi}{2} - C) = |\mathbf{j}| |\overrightarrow{AB}| \cos (\frac{\pi}{2} - A),$$

也即

$$a \sin C = c \sin A.$$

所以

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}.$$

同理, 过点 C 作与 $\overrightarrow{CB}$ 垂直的单位向量 $\mathbf{m}$, 可得

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

因此

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

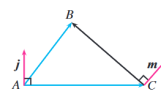


图 6.4-10

Figure 7. People's education A edition compulsory volume 2
6.4.3.2 sine theorem proof process

图 7. 人教 A 版必修第二册 6.4.3.2 正弦定理证明过程

然而平面内单位向量的方向可以是任意方向, 根据新课改的要求, 教师在教学过程中应引导学生不断的培养其“发现问题、提出问题、分析问题与解决问题”[5]的能力, 基于《普通高中数学课程标准(2017年版 2020 年修订)》中“四能”的培养, 教师不妨引导学生独立思考, 关联旧知, 循循善诱, 既然平面内向量与向量直接夹角 α 的范围为 $0 \leq \alpha \leq \pi$, 尝试探究: 若单位向量 $\mathbf{j}$ 与向量 $\overrightarrow{AC}$ 所成角度不局限于 $\langle \mathbf{j}, \overrightarrow{AC} \rangle = \frac{\pi}{2}$, 而是令 $\langle \mathbf{j}, \overrightarrow{AC} \rangle = \alpha$, $\forall \alpha \in [0, \pi]$, 是否仍然可以证得结论?

2. 正弦定理证明

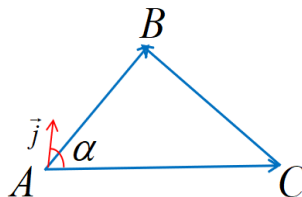


Figure 8. Sharp angled triangle $\triangle ABC$

图 8. 锐角三角形 $\triangle ABC$

不妨也以锐角三角形 $\triangle ABC$ 为例, 如上图 8, 过点 A 作与向量 AC 单位向量 j , 使得 $\langle j, AC \rangle = \alpha$, $\alpha \in [0, \pi]$, 则 j 与向量 AB 夹角 $\langle j, AB \rangle = |\alpha - A|$, 则 j 与向量 CB 夹角 $\langle j, CB \rangle = |\pi - C - \alpha|$, 具体情况讨论如下:

1) 对于 j 与向量 AB 夹角 $\langle j, AB \rangle$ 情况讨论如下图 9、图 10:

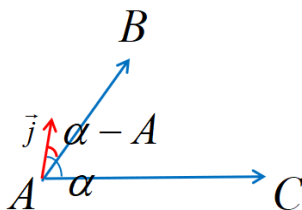


Figure 9. When $\alpha \geq A$, $\langle j, AB \rangle = \alpha - A$ situation

图 9. $\alpha \geq A$ 时 $\langle j, AB \rangle = \alpha - A$ 情形

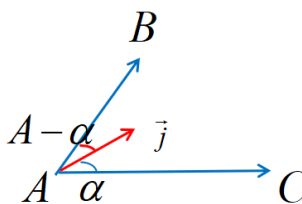


Figure 10. When $\alpha < A$, $\langle j, AB \rangle = -(\alpha - A)$ situation

图 10. $\alpha < A$ 时 $\langle j, AB \rangle = -(\alpha - A)$ 情形

综上所述, 可得出结论 j 与向量 AB 夹角 $\langle j, AB \rangle = |\alpha - A|$ 。

2) 对于 j 与向量 CB 夹角 $\langle j, CB \rangle$ 情况讨论如下图 11、图 12:

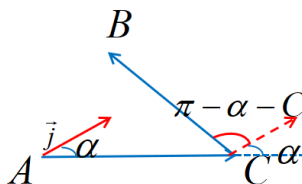


Figure 11. When $\alpha + C \leq \pi$, $\langle j, CB \rangle = \pi - C - \alpha$ situation

图 11. $\alpha + C \leq \pi$ 时 $\langle j, CB \rangle = \pi - C - \alpha$ 情形

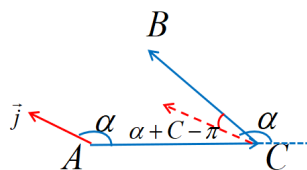


Figure 12. When $\alpha + C > \pi$, $\langle j, CB \rangle = C + \alpha - \pi$ situation

图 12. $\alpha + C > \pi$ 时 $\langle j, CB \rangle = C + \alpha - \pi$ 情形

综上所述, 可得出结论 j 与向量 CB 夹角 $\langle j, CB \rangle = |\pi - C - \alpha|$ 。

分别设 $\triangle ABC$ 的三个内角分别为 A, B, C , 三条对边表示为 a, b, c 。则根据以上条件, 由向量法与余弦定理, 进行以下证明过程:

则由 $AC + CB = AB$, 所以有

$$j \cdot (AC + CB) = j \cdot AB$$

由向量乘法分配律, 可得:

$$j \cdot AC + j \cdot CB = j \cdot AB$$

由向量数量积公式, 可得:

$$|j| \cdot |AC| \cdot \cos \langle j, AC \rangle + |j| \cdot |CB| \cdot \cos \langle j, CB \rangle = |j| \cdot |AB| \cdot \cos \langle j, AB \rangle$$

将向量夹角代入, 可得:

$$|j| \cdot |AC| \cdot \cos \alpha + |j| \cdot |CB| \cdot \cos(\pi - C - \alpha) = |j| \cdot |AB| \cdot \cos(\alpha - A)$$

由诱导公式, 可得:

$$b \cdot \cos \alpha - a \cdot \cos(C + \alpha) = c \cdot \cos(\alpha - A)$$

利用两角和差的余弦公式化简, 可得:

$$b \cdot \cos \alpha - a \cdot (\cos C \cos \alpha - \sin C \sin \alpha) = c \cdot (\cos \alpha \cos A + \sin \alpha \sin A)$$

进一步移项, 合并同类项, 化简可得:

$$\cos \alpha \cdot (b - a \cdot \cos C - c \cdot \cos A) = \sin \alpha \cdot (c \cdot \sin A - a \cdot \sin C) \quad (1)$$

由上①式, 由于 $\forall \alpha \in [0, \pi]$, ①式等式均成立, 故而从 $\sin \alpha$ 、 $\cos \alpha$ 的系数入手进行分析:

由余弦定理可得:

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad (2)$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad (3)$$

将②式③式代入①式, 可得:

$$b - a \cdot \cos C - c \cdot \cos A = 0$$

故而, 可知

$$c \cdot \sin A - a \cdot \sin C = 0$$

即

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \quad (4)$$

同理可得

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad (5)$$

联立④ ⑤, 即证得正弦定理

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

3. 应用

上述证明过程中, 探究了在一般三角形 $\triangle ABC$ 中, 令 $\langle \mathbf{j}, \mathbf{AC} \rangle = \alpha$, $\forall \alpha \in [0, \pi]$, 在人教 A 版教材中单位向量 $\mathbf{j}$ 与向量 $\mathbf{AC}$ 所成角度取特殊角度 $\langle \mathbf{j}, \mathbf{AC} \rangle = \frac{\pi}{2}$, 在 $[0, \pi]$ 中, 除却 $\frac{\pi}{2}$, 还有特殊角 $0, \pi$, 若令 $\langle \mathbf{j}, \mathbf{AC} \rangle = 0$ 或 $\langle \mathbf{j}, \mathbf{AC} \rangle = \pi$ 时, 继续类比上述过程进行探究如下图 13、图 14:

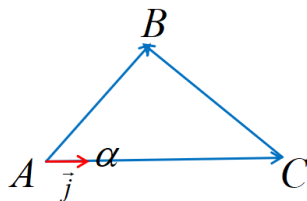


Figure 13. $\langle \mathbf{j}, \mathbf{AC} \rangle = 0$

图 13. $\langle \mathbf{j}, \mathbf{AC} \rangle = 0$

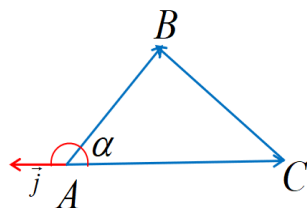


Figure 14. $\langle \mathbf{j}, \mathbf{AC} \rangle = \pi$

图 14. $\langle \mathbf{j}, \mathbf{AC} \rangle = \pi$

以 $\langle \mathbf{j}, \mathbf{AC} \rangle = 0$ 为例, 则此时单位向量 $\mathbf{j}$ 与向量 $\mathbf{AB}$ 的夹角为 $\langle \mathbf{j}, \mathbf{AB} \rangle = A$, 单位向量 $\mathbf{j}$ 与向量 $\mathbf{CB}$ 的夹角 $\langle \mathbf{j}, \mathbf{CB} \rangle = \pi - C$, 则仍由向量加法关系与数量积公式可知:

$$|\mathbf{j}| \cdot |\mathbf{AC}| \cdot \cos \langle \mathbf{j}, \mathbf{AC} \rangle + |\mathbf{j}| \cdot |\mathbf{CB}| \cdot \cos \langle \mathbf{j}, \mathbf{CB} \rangle = |\mathbf{j}| \cdot |\mathbf{AB}| \cdot \cos \langle \mathbf{j}, \mathbf{AB} \rangle$$

即

$$b \cdot \cos 0 + a \cdot \cos(\pi - C) = c \cdot \cos A$$

化简得

$$b - a \cdot \cos C = c \cdot \cos A$$

移项, 可得

$$b = a \cdot \cos C + c \cdot \cos A \quad (6)$$

同理可得其他两式

$$a = b \cdot \cos C + c \cdot \cos B \quad (7)$$

$$c = a \cdot \cos B + b \cdot \cos A \quad (8)$$

以上⑥~⑧三式, 即证得射影定理, 当取 $\langle \mathbf{j}, \mathbf{AC} \rangle = \pi$ 时, 同理可得证。

4. 结语

初等数学中平面正弦定理的证明方法颇多, 证明角度灵活多变。除了有以上教材中所提到的将一般三角形通过作高法转化为直角三角形的化归法, 以及将利用三角形面积恒等关系的不同表示方式证明以外, 也有利用三角形外接圆性质证明三角形正弦定理及其比值的几何法, 以及构造笛卡尔直角坐标系进行坐标运算进行证明的代数法等等。

教师应适应新课改的要求, 为学生创设合理教学情境, 为落实数学学科核心素养、培养创新人才奠定基础[6]。教师可以以课本为蓝本, 通过创设问题情境, 以促进学生对数学知识的理解, 共同发挥激发数学学习兴趣、促进数学知识理解、提供问题解决策略、提供数学应用机会、加深数学价值认识等多种作用[7]。

基金项目

新疆维吾尔自治区一流本科课程(空间解析几何)建设项目; 新疆师范大学本科教学质量工程建设教学研究项目(SDJG2022-17); 新疆师范大学数学与应用数学专业基础课程群教学团队资助。

参考文献

- [1] 温建红. 基于数学核心素养培养学生提出问题能力的意义与策略[J]. 数学教育学报, 2023, 32(3): 13-17.
- [2] 波利亚. 怎样解题数学思维的新方法[M]. 涂泓, 冯承天, 译. 上海: 上海科技教育出版社, 2011.
- [3] 章建跃, 李增沪. 普通高中教科书数学必修第二册人教 A 版[M]. 北京: 人民教育出版社, 2019.
- [4] 邓明立, 王涛. 再论 F. 克莱因的《埃尔朗根纲领》[J]. 自然辩证法通讯, 2015, 37(2): 62-67.
- [5] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[M]. 北京: 人民教育出版社, 2020.
- [6] 唐斌, 聂湘玉. 影响小学生数学问题解决能力发展的原因及对策研究[J]. 基础教育课程, 2020(2): 47-53.
- [7] 李健, 李海东. 数学教科书中设置问题情境的作用与原则[J]. 基础教育课程, 2020(17): 59-66.