**Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(3), 135-145**
Published Online March 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.163077

# 无延时 $n$ 个不同部件串联可修系统的适定性分析

**来长江[1]，艾合买提江·玉买尔[2*]**

[1]新疆理工职业大学通识学院，新疆 喀什
[2]新疆理工职业大学党委教师工作部，新疆 喀什

收稿日期：2026年2月17日；录用日期：2026年3月12 日；发布日期：2026年3 月20日

## 摘 要

本文研究无延时 $n$ 个不同部件串联可修系统, 该系统的数学模型由有限个带有边界条件的偏微分积分方程组描述。通过选取适当的巴拿赫空间作为状态空间, 将该模型转化为巴拿赫空间中的抽象柯西问题, 随后运用泛函分析中的 $C_0-$半群理论证明该系统具有唯一的、非负的、满足概率性质的时间依赖解。

## 关键词

可修系统，抽象柯西问题，$C_0-$半群，时间依赖解

# Well-Posedness Analysis of an $n$-Component Series-Connected Repairable System without Delay

**Changjiang Lai[1], Aihemaitijiang Yumaier[2*]**

[1]College of General Education, Xinjiang Vocational University of Technology, Kashgar Xinjiang
[2]Faculty Affairs Office of the Party Committee, Xinjiang Vocational University of Technology, Kashgar Xinjiang

[*] 通讯作者。

文章引用: 来长江, 艾合买提江·玉买尔. 无延时 $n$ 个不同部件串联可修系统的适定性分析[J]. 理论数学, 2026, 16(3): 135-145. DOI: 10.12677/pm.2026.163077

Received: February 17, 2026; accepted: March 12, 2026; published: March 20, 2026

## Abstract

**This paper investigates an $n$-component series-connected repairable system without delay. The mathematical model of the system is described by a finite set of partial differential-integral equations with boundary conditions. By selecting an appropriate Banach space as the state space, the model is transformed into an abstract Cauchy problem in the Banach space. Subsequently, employing the $C_0-$semigroup theory in functional analysis, it is proved that the system possesses a unique, non-negative time-dependent solution satisfying probabilistic properties.**

## Keywords

**Repairable System, Abstract Cauchy Problem, $C_0-$Semigroup, Time-Dependent Solution**



## 1. 介绍

可靠性理论 [1]是一门研究系统运行可靠性的普遍定量规律, 并围绕其进行分析、评估、设计和控制的理论与方法体系. 其问题最早起源于第二次世界大战时期, 因应大规模工业化生产的需求以及复杂军事装备的研发与使用而受到广泛关注. 尽管技术不断进步, 设备可靠性已得到大幅提升, 但现代系统日趋复杂的结构及其日益广泛的功能要求, 使得对系统可靠性进行定量评估与持续改进, 依然是一项至关重要且具有挑战性的课题.

在众多系统模型中, 串联系统是一种最基本且常见的逻辑构型: 系统中所有部件均正常工作时, 系统方能正常运行; 任一部件发生故障, 即导致整个系统功能中断. 这种特性使得串联系统对部件可靠性尤为敏感, 也使其成为可靠性理论研究的经典对象 [2–4]. 若系统失效后立即开始维修，则称修理无延时. 文献 [5] 针对无延时可修系统, 假设失效时间服从指数分布、维修时间服从一般分布, 利用补充变量法 [6] 建立了系统的可靠性模型, 并推导出可靠性指标的解析表达式. 文献 [7] 在文献 [5]的基础上, 进一步建立了无延时 $n$ 个不同部件串联可修系统的可靠性模型, 并通过拉普拉斯变换得到了系统的稳态可用度.

已有研究多聚焦于稳态性能分析, 而利用泛函分析方法研究此类系统时间依赖解的适定性仍有待深入. 文献 [8]利用 $C_0-$半群理论, 在修复率为一般函数的条件下, 证明了一类两个相同部件并联的可修系统存在唯一的非负时间依赖解. 文献 [9] 则运用强连续算子半群理论和相应算子的谱特征, 研究了两不同部件并联可修系统解的稳定性. 本文运用文献 [10] 中的概念和方法, 针对文献 [7]所建立的无延时 $n$ 个不同部件串联可修系统模型, 证明其存在唯一的、非负的、满足概率性质的时间依赖解, 为该类系统的动态可靠性分析提供严谨的数学基础.

## 2. 系统模型

根据文献 [7]得到无延时 $n$ 个不同部件串联可修系统的数学模型可以用以下偏微分积分方程组来描述:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_0(t) = -\Lambda P_0(t) + \sum_{i=1}^{n}\int_0^\infty P_i(t,x)\,\mu_i(x)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}P_i(t,x) + \frac{\partial}{\partial x}P_i(t,x) = -\mu_i(x)\,P_i(t,x)\,,\ i=1,2,\cdots,n. \tag{2}$$

$$P_0(0)=1, P_1(0,x)=P_2(0,x)=\cdots=P_n(0,x)=0 \tag{3}$$

$$P_i(t,0)=\lambda_i P_0(t),\ i=1,2,\cdots,n. \tag{4}$$

其中 $(t,x)\in[0,\infty)\times[0,\infty)$, $\quad \Lambda=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$.

$P_0(t)$ 表示在时刻 $t$, $n$ 个部件都正常工作的概率; $P_i(t,x)$ 表示在时刻 $t$, 因第 $i$ 个部件发生故障而使系统驻留, 维修时间为 $x$ 的概率, $i=1,2,\cdots,n$; $P_i(t,0)$ 表示在 $t$ 时刻第 $i$ 个部件刚发生故障, 正准备修理时的概率, $i=1,2,\cdots,n$; 第 $i$ 个部件发生故障的失效时间服从参数为 $\lambda_i$ 的指数分布; $\mu_i(x)$ 为第 $i$ 个部件在修复时间 $x$ 内的修复率, 修复时间服从一般分布. 部件故障后立马进行维修. 部件之间相互独立.

为了方便起见, 记

$$\Gamma=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ \lambda_2 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

选取状态空间为

$$X=\left\{P\ \middle|\ \begin{array}{l} P=(P_0,P_1(x),\cdots,P_n(x))\\ \in\mathbb{R}\times\overbrace{L^1[0,\infty)\times\cdots\times L^1[0,\infty)}^{n}\\ \|P\|=|P_0|+\sum\limits_{i=1}^{n}\|P_i\|_{L^1[0,\infty)}\end{array}\right\}$$

易见 $X$ 是巴拿赫空间.下面定义主算子及其定义域

$$\mathcal{A}P=\begin{pmatrix} -\Lambda & & & \\ & -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\mu_1(x) & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\mu_n(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_0 \\ P_1(x) \\ \vdots \\ P_n(x) \end{pmatrix},$$

$$D(\mathcal{A})=\left\{P\in X\ \middle|\ \begin{array}{l} \frac{\mathrm{d}P_i(x)}{\mathrm{d}x}\in L^1[0,\infty), P_i(x)\ (i=1,\cdots,n) \\ \text{是绝对连续函数并且满足} \\ P(0)=\Gamma P(x). \end{array}\right\}$$

$$\mathcal{F}P=\begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n}\int_0^\infty P_i(x)\mu_i(x)\mathrm{d}x \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, D(\mathcal{F})=X$$

那么上述方程组 (1) – (4) 可以改写为巴拿赫空间 $X$ 上的抽象柯西问题:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t}=(\mathcal{A}+\mathcal{F})P(t), \quad \forall t\in(0,\infty) \\ P(0)=(1,0,\cdots,0) \end{cases} \tag{5}$$

## 3. 系统(5)的适定性

**定理1** 若 $\overline{\mu}=\sup\limits_{x\in[0,\infty)}\mu_i(x)<\infty \quad (i=1,2,\cdots,n)$, 则 $\mathcal{A}+\mathcal{F}$ 生成一个正压缩 $C_0-$ 半群 $T(t)$.

**证** 首先, 对任意给定的 $Y\in X$, 考虑方程 $(\gamma I-\mathcal{A})P=Y$, 即

$$(\gamma+\Lambda)P_0=Y_0 \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}P_i(x)}{\mathrm{d}x}=-[\gamma+\mu_i(x)]P_i(x)+Y_i(x) \quad i=0,1,\cdots,n \tag{7}$$

$$P_i(0)=\lambda_i P_0 \quad i=1,2,\cdots,n \tag{8}$$

解 (6), (7) 得

$$P_0=\frac{1}{\gamma+\Lambda}Y_0 \tag{9}$$

$$P_i(x)=a_ie^{-\gamma x-\int_0^x\mu_i(\tau)\mathrm{d}\tau}+e^{-\gamma x-\int_0^x\mu_i(\tau)\mathrm{d}\tau}\times\int_0^x Y_i(\xi)e^{\gamma\xi+\int_0^\xi\mu_i(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\xi\quad(i=1,2\cdots,n)\tag{10}$$

结合 (8) – (10) 得到

$$a_i=P_i(0)=\lambda_iP_0\tag{11}$$

$$|a_i|\le\frac{\lambda_i}{|\gamma+\Lambda|}|Y_0|\quad i=1,2\cdots,n.\tag{12}$$

运用 (10), (12) 和富比尼定理估计出(不妨设 $\gamma>0$)

$$\begin{aligned}\|P_i\|_{L^1[0,\infty)}&\le\frac{1}{\gamma}|a_i|+\int_0^\infty e^{-\gamma x}\int_0^x|Y_i(\xi)|e^{\gamma\xi}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\gamma}|a_i|+\int_0^\infty|Y_i(\xi)|e^{\gamma\xi}\int_\xi^\infty e^{-\gamma x}\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi\\&=\frac{1}{\gamma}|a_i|+\frac{1}{\gamma}\|Y_i\|_{L^1[0,\infty)}\\&\le\frac{\lambda_i}{\gamma(\gamma+\Lambda)}|Y_0|+\frac{1}{\gamma}\|Y_i\|_{L^1[0,\infty)}\quad i=1,2\cdots,n.\end{aligned}\tag{13}$$

合并 (9), (13) 估计出

$$\begin{aligned}\|P\|=&|P_0|+\sum_{i=1}^n\|P_i\|_{L^1[0,\infty)}\\\le&\frac{1}{\gamma+\Lambda}|Y_0|+\sum_{i=1}^n\left[\frac{\lambda_i}{\gamma(\gamma+\Lambda)}|Y_0|+\frac{1}{\gamma}\|Y_i\|_{L^1[0,\infty)}\right]\\=&\frac{1}{\gamma}|Y_0|+\frac{1}{\gamma}\sum_{i=1}^n\|Y_i\|_{L^1[0,\infty)}\\=&\frac{1}{\gamma}\|Y\|\end{aligned}\tag{14}$$

(14) 说明当 $\gamma>0$ 时，$(\gamma I-A)^{-1}$ 存在并且

$$(\gamma I-\mathcal{A})^{-1}:X\to D(\mathcal{A}),\quad\left\|(\gamma I-\mathcal{A})^{-1}\right\|\le\frac{1}{\gamma}$$

其次, 证明 $D(\mathcal{A})$ 在 $X$ 中是稠密的. 令

$$\mathcal{Z}=\left\{P\;\middle|\;\begin{array}{l}P=(P_0,P_1(x),\cdots,P_n(x))\\P_i(x)\in C_0^1[0,\infty),\text{ 存在}\\c_i>0\text{ 使得对}\forall x\in[0,w_i]\\\text{有}P_i(x)=0,\ i=1,\cdots,n\end{array}\right\}$$

则 $\mathcal{Z}$ 在 $X$ 中稠密, 即 $\overline{\mathcal{Z}} = X$. 若 $\mathcal{Z} \subset \overline{D(\mathcal{A})}$, 那么

$$D(\mathcal{A}) \subset X \Rightarrow \mathcal{Z} \subset \overline{D(\mathcal{A})} \subset X \Rightarrow X = \overline{\mathcal{Z}} \subset \overline{\overline{D(\mathcal{A})}} \subset \overline{X} = X$$

$$\Rightarrow \overline{D(\mathcal{A})} = \overline{\overline{D(\mathcal{A})}} = X$$

因此, 要证明 $D(\mathcal{A})$ 在 $X$ 中的稠密性, 只需证明 $\mathcal{Z} \subset \overline{D(\mathcal{A})}$.

任取$P = (P_0, P_1, \cdots, P_n) \in \mathcal{Z}$, 则存在正数$w_i > 0$, 使得

$$P_i(x) = 0, \quad \forall x \in [0, w_i), \quad i = 1, \cdots, n$$

从而存在常数$s > 0$, 使得

$$P_i(x) = 0, \quad \forall x \in [0, s)$$

其中$0 < s < \min\{w_i \mid i = 1, \cdots, n\}$, 定义

$$f_i^s(0) = \lambda_i P_0, \quad i = 1, \cdots, n$$

$$f^s(x) = (P_0, f_1^s(x), \cdots, f_n^s(x))$$

其中

$$f_i^s(x) = \begin{cases} f_i^s(0)\left(1 - \frac{x}{s}\right)^2, & x \in [0, s) \\ P_i(x), & x \in [s, \infty) \end{cases}, i = 1, \cdots, n$$

则 $f^s \in D(\mathcal{A})$. 此外

$$\begin{aligned} \|P - f^s\| &= \sum_{i=1}^{n} \int_0^\infty |P_i(x) - f_i^s(x)| \mathrm{d}x \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_0^s |f_i^s(0)| \left(1 - \frac{x}{s}\right)^2 \mathrm{d}x \\ &= \sum_{i=1}^{n} |f_i^s(0)| \frac{s}{3} \to 0, \quad s \to 0 \end{aligned}$$

这说明 $\mathcal{Z} \subset \overline{D(\mathcal{A})}$, 即 $D(\mathcal{A})$ 在 $X$ 中稠密. 结合上述两步与希勒–吉田耕作定理 [11] 可知 $\mathcal{A}$ 生成一个 $C_0$–半群.

下面证明算子 $\mathcal{F}$ 是有界线性算子. 对于 $\forall P = (P_0, P_1, \cdots, P_n) \in X, \forall Q = (Q_0, Q_1, \cdots, Q_n) \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 有

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(\alpha P+\beta Q) &= \mathcal{F}\begin{pmatrix}\alpha P_0+\beta Q_0\\ \alpha P_1+\beta Q_1\\ \vdots\\ \alpha P_n+\beta Q_n\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\sum\limits_{i=1}^{n}\int_0^\infty[\alpha P_i(x)+\beta Q_i(x)]\mu_i(x)\mathrm{d}x\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\\
&= \alpha\begin{pmatrix}\sum\limits_{i=1}^{n}\int_0^\infty P_i(x)\mu_i(x)\mathrm{d}x\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}\sum\limits_{i=1}^{n}\int_0^\infty Q_i(x)\mu_i(x)\mathrm{d}x\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\\
&= \alpha\mathcal{F}P+\beta\mathcal{F}Q \qquad (15)\\
\|\mathcal{F}P\| &\leq \sum_{i=1}^{n}\int_0^\infty|P_i(x)\mu_i(x)|\mathrm{d}x\\
&\leq \overline{\mu}\sum_{i=1}^{n}\int_0^\infty|P_i(x)|\mathrm{d}x\\
&= \overline{\mu}\sum_{i=1}^{n}\|P_i\|_{L^1[0,\infty)}\\
&\leq \overline{\mu}\|P\| \qquad (16)
\end{aligned}
$$

(15),(16)表明 $\mathcal{F}$ 是有界线性算子. 因此, 根据 $C_0-$半群的扰动定理, 算子 $\mathcal{A}+\mathcal{F}$ 生成一个 $C_0-$半群 $T(t)$.

最后证明 $\mathcal{A}+\mathcal{F}$ 是一个散列算子.对 $\forall P\in D(\mathcal{A})$, 取

$$
\hbar(x)=\left(\frac{[P_0]^+}{P_0},\frac{[P_1(x)]^+}{P_1(x)},\cdots,\frac{[P_n(x)]^+}{P_n(x)}\right)
$$

其中

$$
[P_0]^+=\begin{cases}P_0, & P_0>0\\ 0, & P_0\leq 0\end{cases},\qquad [P_i(x)]^+=\begin{cases}P_i(x), & P_i(x)>0\\ 0, & P_i(x)\leq 0\end{cases},\quad i=1,\cdots,n
$$

如果定义

$$\phi_i^+ = \{x\in[0,\infty)|P_i(x)>0,\ i=1,\cdots,n\}$$
$$\phi_i^- = \{x\in[0,\infty)|P_i(x)\le 0,\ i=1,\cdots,n\}$$

那么

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}P_i(x)}{\mathrm{d}x}\frac{[P_i(x)]^+}{P_i(x)}\mathrm{d}x &= \int_{\phi_i^+}\frac{\mathrm{d}P_i(x)}{\mathrm{d}x}\frac{[P_i(x)]^+}{P_i(x)}\mathrm{d}x+\int_{\phi_i^-}\frac{\mathrm{d}P_i(x)}{\mathrm{d}x}\frac{[P_i(x)]^+}{P_i(x)}\mathrm{d}x\\ &= \int_{\phi_i^+}\frac{\mathrm{d}P_i(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\,[P_i(x)]^+}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\\ &= -\,[P_i(0)]^+,\quad i=1,\cdots,n \end{aligned}\tag{17}$$

此式中用了 $P_i\in L^1[0,\infty)\Rightarrow P_i(\infty)=0,\quad i=1,\cdots,n.$

对 $\forall P\in D(\mathcal{A})$, 由 (4), (17) 估计出

$$\begin{aligned}&\langle(\mathcal{A}+\mathcal{F})P,\hbar\rangle\\ =&\left\{-\Lambda P_0+\sum_{i=1}^n\int_0^\infty P_i(x)\mu_i(x)\mathrm{d}x\right\}\frac{[P_0]^+}{P_0}\\ &+\sum_{i=1}^n\int_0^\infty\left\{-\frac{\mathrm{d}P_i(x)}{\mathrm{d}x}-\mu_i(x)P_i(x)\right\}\frac{[P_i(x)]^+}{P_i(x)}\mathrm{d}x\\ =&-\Lambda[P_0]^++\frac{[P_0]^+}{P_0}\sum_{i=1}^n\int_0^\infty P_i(x)\mu_i(x)\mathrm{d}x\\ &-\sum_{i=1}^n\left[\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}P_i(x)}{\mathrm{d}x}\frac{[P_i(x)]^+}{P_i(x)}\mathrm{d}x+\int_0^\infty\mu_i(x)[P_i(x)]^+\mathrm{d}x\right]\\ \le&-\Lambda[P_0]^++\frac{[P_0]^+}{P_0}\sum_{i=1}^n\int_0^\infty[P_i(x)]^+\mu_i(x)\mathrm{d}x\\ &+\sum_{i=1}^n\lambda_i[P_0]^+-\sum_{i=1}^n\int_0^\infty[P_i(x)]^+\mu_i(x)\mathrm{d}x\\ =&\left(\frac{[P_0]^+}{P_0}-1\right)\sum_{i=1}^n\int_0^\infty[P_i(x)]^+\mu_i(x)\mathrm{d}x\\ \le&\ 0\end{aligned}\tag{18}$$

由 (18) 可知 $\mathcal{A}+\mathcal{F}$ 是一个散列算子.

综上所述, 由菲利普斯定理 [11]与 $C_0-$半群的唯一性知道 $\mathcal{A}+\mathcal{F}$ 生成一个正压缩 $C_0-$半群 $T(t)$.

不难证明 $X$ 的共轭空间 $X^*$ 为

$$X^* = \left\{ P^* \left| \begin{array}{l} P^* = (P_0^*, P_1^*(x), \cdots, P_n^*(x)) \\ \in \mathbb{R} \times \overbrace{L^\infty[0,\infty) \times \cdots \times L^\infty[0,\infty)}^{n} \\ \|P^*\| = \max\{|P_0^*|, \|P_1^*\|_{L^\infty[0,\infty)}, \cdots, \|P_n^*\|_{L^\infty[0,\infty)}\} \end{array} \right. \right\}$$

$X^*$ 是一个巴拿赫空间. 在 $X$ 中引入集合

$$\mathcal{Y} = \left\{ P \in X \left| \begin{array}{l} P = (P_0, P_1(x), \cdots, P_n(x)), \\ P_0 \geq 0, P_i(x) \geq 0, \\ i = 1, \cdots, n, \quad \forall x \in [0,\infty) \end{array} \right. \right\}$$

则 $\mathcal{Y}$ 是 $X$ 中的锥.对 $P \in D(\mathcal{A}) \bigcap \mathcal{Y}$, 取

$$P^*(x) = \|P\| (1, 1, \cdots, 1)$$

则 $P^* \in X^*$, 且

$$\begin{aligned} &\langle (\mathcal{A}+\mathcal{F})P, P^* \rangle \\ =&\left\{ -\Lambda P_0 + \sum_{i=1}^n \int_0^\infty P_i(x)\mu_i(x)\mathrm{d}x \right\}\|P\| \\ &+ \sum_{i=1}^n \int_0^\infty \left\{ -\frac{\mathrm{d}P_i(x)}{\mathrm{d}x} - \mu_i(x)P_i(x) \right\}\|P\|\mathrm{d}x \\ =& -\Lambda P_0\|P\| + \sum_{i=1}^n \lambda_i P_0 \|P\| \\ =& \, 0 \end{aligned}$$

此式表明 $\mathcal{A}+\mathcal{F}$ 对集合

$$\theta(P) = \{P^* \in X^* | \langle P, P^* \rangle = \|P\|^2 = \|P^*\|^2\}$$

是保守算子. 因为 $P(0) \in D(\mathcal{A}^2) \bigcap \mathcal{Y}$, 所以运用法托里尼定理 [12]得到以下结论.

**定理2** $T(t)$ 对于系统 (5) 的初值是等距算子, 即

$$\|T(t)P(0)\| = \|P(0)\|, \quad \forall t \in [0,\infty)$$

合并定理 1 和定理 2 得到最终结论.

**定理3** 若 $\mu_i(x)$ 满足 $\overline{\mu} = \sup\limits_{x\in[0,\infty)} \mu_i(x) < \infty$, $i = 1, \cdots, n$. 那么系统 (5) 存在唯一的正时间依

赖解 $P(t,x)$, 并满足

$$\|P(t,\cdot)\| = 1, \quad \forall t \in [0,\infty)$$

**证** 由于 $P(0) \in D(\mathcal{A}^2)\bigcap\mathcal{Y}$, 所以由定理 1 与抽象柯西问题的适定性知道系统 (5) 存在唯一的正时间依赖解 $P(t,x)$, 并且可以表示为

$$P(t,x) = T(t)P(0), \quad \forall t \in [0,\infty) \tag{19}$$

(19)与定理 2 结合推出

$$\|P(t,\cdot)\| = \|T(t)P(0)\| = \|P(0)\| = 1, \quad \forall t \in [0,\infty). \tag{20}$$

(20) 恰好反映了 $P(t,x)$ 的实际背景, 即系统总状态概率和为 1.

## 4. 结论

本文以无延时 $n$ 个不同部件串联可修系统为研究对象, 通过选取适当的巴拿赫空间作为状态空间, 定义主算子及其定义域, 将系统的偏微分积分方程组模型转化为巴拿赫空间中的抽象柯西问题. 基于泛函分析中的 $C_0-$半群理论, 严格证明了该模型的主算子生成一个正压缩 $C_0-$半群, 进而推导出: 该模型存在唯一的、非负的、满足概率性质的时间依赖解. 本研究为无延时串联可修系统的动态演化分析提供了泛函分析框架, 验证了模型的合理性, 也为含更复杂约束的可修系统建模与可靠性评估提供了可借鉴的理论方法。

## 参考文献


[1] 曹晋华, 程侃. 可靠性数学引论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.

[2] 徐厚宝, 郭卫华, 于景元, 等. 一类串联可修复系统的稳态解[J]. 应用数学学报, 2006, 29(1): 46-52.

[3] 刘仁彬, 唐应辉, 骆川义. 一种新型的N部件串联可修系统及其可靠性分析[J]. 应用数学, 2007, 20(1): 164-170.

[4] 周天宠, 修春, 翟文娟. 多状态可修系统的可用度计算[J]. 数学的实践与认识, 2020, 50(20): 279-283.

[5] 刘亚春, 王盈, 张娜. 无延时可修系统的可靠性分析与计算[J]. 南华大学学报(自然科学版), 2019, 33(1): 44-46.

[6] Cox, D.R. (1955) The Analysis of Non-Markovian Stochastic Processes by the Inclusion of Supplementary Variables. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **51**, 433-441. https://doi.org/10.1017/S0305004100030437

[7] 王盈. 延时维修对系统可靠性的影响分析[D]: [硕士学位论文]. 衡阳: 南华大学, 2019.

[8] 艾尼·吾甫尔. 一类两个相同部件并联的可修系统的适定性[J]. 应用泛函分析学报, 2001, 3(2): 188-192.

[9] 郭卫华, 许跟起, 徐厚宝. 两不同部件并联可修系统解的稳定性[J]. 应用泛函分析学报, 2003, 5(3): 281-288.

[10] 艾尼·吾甫尔. 可靠性理论中的数学方法[M]. 北京: 科学出版社, 2020.

[11] Arendt, W., Grabosch, A., Greiner, G., *et al.* (1986) One-Parameter Semigroups of Positive Operators. Springer. https://doi.org/10.1007/BFb0074922

[12] Fattorini, H.O. (1983) The Cauchy Problem. Cambridge University Press.