

# 拟阵约束下正则化次模最大化的参数化惩罚随机贪心算法

韩先帅, 郭修平\*

青岛大学数学与统计学院, 山东 青岛

收稿日期: 2026 年 2 月 10 日; 录用日期: 2026 年 3 月 11 日; 发布日期: 2026 年 3 月 25 日

## 摘要

在大数据分析、机器学习特征选择与传感器网络优化等应用中, 常需要在结构化约束 (如拟阵约束) 下, 从大量候选元素中选取一个子集以最大化收益并控制成本。该类问题可表述为正则化次模最大化:  $g(S) = f(S) - c(S)$ , 其中  $f$  为非负次模函数,  $c$  为非负模函数。由于正则化项的引入可能使目标值为负, 传统乘性近似比不再适用, 因而需要采用双准则近似框架。本文提出一种参数化惩罚随机贪心算法: 在每轮迭代中构造一个最大化  $\sum_{u \in M} (f_u(S) - \lambda c(u))$  的拟阵基, 并从中均匀随机选择元素加入解集, 其中  $\lambda \geq 1$  为可调惩罚参数。我们给出严格的概率演化分析与完整推导, 证明在假设  $c(N) \leq 2c(OPT)$  下, 算法输出  $S_k$  满足标准双准则保证  $\mathbb{E}[f(S_k) - c(S_k)] \geq \alpha f(OPT) - \beta(\lambda)c(OPT)$ ,  $\alpha = \frac{1+e^{-2}}{4}$ ,  $\beta(\lambda) = \lambda(1 - e^{-2})$ 。刻画了惩罚强度对成本系数的线性影响; 通过求解  $\lambda$  的最优, 我们得到  $(0.283, 1)$  的近似比保证。

## 关键词

次模优化, 拟阵约束, 正则化, 随机贪心, 双准则近似, 参数化分析

\* 通讯作者。

# Parameterized Penalty Stochastic Greedy Algorithm for Regularized Submodular Maximization under Matroid Constraint

Xianshuai Han, Xiuping Guo\*

School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao Shandong

Received: February 10, 2026; accepted: March 11, 2026; published: March 25, 2026

## Abstract

In applications such as big data analysis, machine learning feature selection, and sensor network optimization, it is often necessary to select a subset from a large set of candidate elements under structural constraints (e.g., matroid constraints) to maximize the profit while controlling the cost. This kind of problem can be formulated as regularized submodular maximization:  $g(S) = f(S) - c(S)$ , where  $f$  is a nonnegative submodular function and  $c$  is a nonnegative modular function. Since the introduction of the regularization term may cause the objective value to be negative, the traditional multiplicative approximation ratio is no longer applicable, thus a bi-criteria approximation framework is required. This paper proposes a parameterized penalty stochastic greedy algorithm: in each round, it constructs a matroid basis that maximizes  $\sum_{u \in M} (f_u(S) - \lambda c(u))$ , and then uniformly selects an element from this basis to add to the solution set, where  $\lambda \geq 1$  is an adjustable penalty parameter. We provide a rigorous probabilistic evolution analysis and complete derivation, proving that under the assumption  $c(N) \leq 2c(OPT)$ , the output  $S_k$  satisfies the standard bi-criteria guarantee:  $\mathbb{E}[f(S_k) - c(S_k)] \geq \alpha f(OPT) - \beta(\lambda)c(OPT)$ ,  $\alpha = \frac{1+e^{-2}}{4}$ ,  $\beta(\lambda) = \lambda(1 - e^{-2})$ . This characterizes the linear influence of the penalty strength on the cost coefficient; by solving for the optimal  $\lambda$ , we obtain an approximation guarantee of  $(0.283, 1)$ .

## Keywords

Submodular Optimization, Matroid Constraint, Regularization, Stochastic Greedy, Bi-Criteria Approximation, Parametric Analysis

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



## 1. 引言

在人工智能、数据挖掘与运筹优化的实际应用中, 从海量候选项中选取高价值子集是一类核心问题。无论是传感器网络的覆盖优化、社交网络的影响力最大化, 还是机器学习中的特征选择, 其目标函数通常表现出“边际效益递减”的特性, 即次模性 (Submodularity) [1]。然而, 在实际决策中, 单纯追求效用最大化往往会导致模型过拟合或资源超支。因此, 正则化次模最大化——即最大化“收益减成本”的目标函数  $g(S) = f(S) - c(S)$  ——成为了更具实际意义的研究课题 [2]。

与此同时, 现实世界的决策空间往往受到复杂的结构化限制。拟阵作为组合优化中描述“独立性”的高度抽象工具, 能够统一刻画线性独立性、匹配、生成树等多种约束结构 [3]。因此, 研究拟阵约束下的正则化次模最大化问题, 不仅具有实际应用价值, 也为一类复杂的组合优化问题提供了通用的理论框架。

然而, 正则化次模最大化问题面临理论与算法的双重挑战。在理论层面, 正则化项的引入导致目标函数不再具有非负性的保证, 使得传统的乘性近似比衡量标准失效 [4]。在算法层面, 现有针对复杂约束的高效算法多基于随机贪心策略, 其输出结果的不确定性与高方差难以满足离线关键任务系统对结果稳定性与可复现性的严格要求 [5]。

针对上述挑战, 本文聚焦于拟阵约束下的正则化次模最大化问题, 借鉴 Distorted Greedy 的思想, 提出一种基于参数化惩罚机制的随机贪心算法。我们将固定的惩罚系数推广为可调参数  $\lambda$ , 通过严格的概率分析证明了该算法在期望意义下的双准则近似性能。这一工作不仅为正则化次模最大化问题提供了清晰的理论基准, 也通过参数  $\lambda$  的引入, 允许决策者在收益保证与成本控制之间进行灵活权衡。

## 2. 预备知识

### 2.1. 次模函数与模函数

令  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  为大小为  $n$  的基础集,  $f: 2^N \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  为非负集合函数。

**定义 1 (次模性).** 集合函数  $f$  被称为次模函数, 当且仅当对于任意的集合  $S, T \subseteq N$ , 满足:

$$f(S) + f(T) \geq f(S \cup T) + f(S \cap T).$$

等价地, 对于任意的  $S \subseteq T \subseteq N$  和元素  $u \in N \setminus T$ , 有:

$$f(S \cup \{u\}) - f(S) \geq f(T \cup \{u\}) - f(T).$$

**定义 2 (边际收益).** 元素  $u$  对集合  $S$  的边际收益定义为:

$$f_u(S) \triangleq f(S \cup \{u\}) - f(S).$$

进一步地, 对于集合  $A \subseteq N \setminus S$ , 定义  $f_A(S) \triangleq f(S \cup A) - f(S)$ 。

**定义 3 (模函数).** 集合函数  $c: 2^N \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  被称为模函数, 若其满足线性可加性:

$$c(S) = \sum_{u \in S} c(\{u\}).$$

在本文中, 模函数  $c(S)$  用于表示选取集合  $S$  所需支付的成本。

## 2.2. 拟阵理论

**定义 4 (拟阵).** 一个拟阵系统  $\mathcal{M} = (N, \mathcal{I})$  由基础集  $N$  和独立集族  $\mathcal{I} \subseteq 2^N$  组成, 满足以下三条公理:

- 1) 非空性:  $\emptyset \in \mathcal{I}$ ;
- 2) 传递性: 若  $B \in \mathcal{I}$  且  $A \subseteq B$ , 则  $A \in \mathcal{I}$ ;
- 3) 交换性: 若  $A, B \in \mathcal{I}$  且  $|A| < |B|$ , 则存在元素  $u \in B \setminus A$ , 使得  $A \cup \{u\} \in \mathcal{I}$ 。

**定义 5 (基与秩).** 拟阵中极大的独立集称为基, 所有基具有相同的大小, 称为拟阵的秩, 记为  $k$ 。本文假设约束条件为拟阵约束, 秩为  $k$ 。

**定理 1 (强基交换定理).** 设  $B_1$  和  $B_2$  是拟阵  $\mathcal{M}$  的两个基, 则存在一个双射  $\phi: B_1 \setminus B_2 \rightarrow B_2 \setminus B_1$ , 使得对于任意  $x \in B_1 \setminus B_2$ , 集合  $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{\phi(x)\}$  是  $\mathcal{M}$  的一个基。

## 2.3. 正则化次模最大化问题

**定义 6 (正则化目标函数).** 正则化次模最大化问题的目标函数形式为:

$$g(S) = f(S) - c(S),$$

其中  $f$  为非负次模函数,  $c$  为非负模函数。

由于  $g(S)$  可能取负值, 传统的乘性近似比定义失效, 因此引入双准则近似比:

**定义 7 (双准则近似比).** 设  $S^*$  为全局最优解。对于给定的常数  $\alpha, \beta \geq 0$ , 若算法输出的解  $S$  满足:

$$f(S) - c(S) \geq \alpha \cdot f(S^*) - \beta \cdot c(S^*),$$

则称该算法具有  $(\alpha, \beta)$ -双准则近似比。通常为了控制成本, 我们希望  $\beta$  尽可能小 (接近 1)。

**引理 1 (随机采样的期望下界).** 设  $A(p)$  为集合  $A$  的一个随机子集, 其中每个元素以概率  $p$  独立出现 ( $0 \leq p \leq 1$ )。若  $f$  为次模函数, 则其期望值满足:

$$\mathbb{E}[f(A(p))] \geq (1 - p)f(\emptyset) + pf(A).$$

**推论 1.** 对于任意集合  $T$  和服从分布  $\mathcal{D}$  的随机集合  $S$ , 若满足  $\min_{u \in N} \Pr_{S \sim \mathcal{D}}[u \notin S] \geq q$ , 则有:

$$\mathbb{E}_{S \sim \mathcal{D}}[f(T \cup S) - c(T \cup S)] \geq q \cdot f(T) - c(T) - \mathbb{E}_{S \sim \mathcal{D}}[c(S)].$$

在正则化次模最大化问题中, 目标函数  $g(S) = f(S) - c(S)$  可能取负值。直接应用确定性贪心策略容易陷入局部最优。为此, 我们提出一种参数化惩罚随机贪心算法, 其核心思想是在贪心选择阶段将成本项的权重放大至  $\lambda$  倍, 以抑制高成本元素过早被选入解集。

### 3. 参数化惩罚随机贪心算法及其近似比分析

#### 3.1. 算法设计

本算法的基本框架源自经典的随机贪心思想: 在每一轮迭代中, 并不直接选择单个边际收益最大的元素, 而是首先在当前解的基础上构造一个满足拟阵可行性的候选基, 然后从该基中均匀随机选择一个元素加入当前解。

针对正则化目标中特有的成本控制需求, 算法在候选基的构造阶段引入了参数化成本惩罚机制。具体而言, 引入惩罚参数  $\lambda \geq 1$ , 在每一轮迭代中, 候选基通过最大化线性化的惩罚增益

$$\sum_{u \in M} (f_u(S) - \lambda c(u))$$

来选取。通过调整  $\lambda$ , 可以更灵活地平衡收益与成本的控制力度。

---

**算法 1.** 拟阵约束下参数化惩罚随机贪心算法

**输入:** 基础集  $N$ , 次模收益函数  $f$ , 模成本函数  $c$ , 拟阵  $\mathcal{M} = (N, \mathcal{I})$ , 秩  $k$ , 惩罚参数  $\lambda \geq 1$

**输出:** 独立集  $S_k$

- 1: **初始化:** 令  $S_0$  为包含  $k$  个虚拟元素的任意基, 其中虚拟元素具有零收益和零成本。
- 2: **for**  $i = 1$  to  $k$  **do**
- 3:   **生成候选基:** 寻找一个基  $M_i \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$ , 使其最大化当前的线性化参数化惩罚增益:

$$M_i \in \arg \max_{M \in \mathcal{B}(\mathcal{M})} \sum_{u \in M} (f_u(S_{i-1}) - \lambda c(u)).$$

- 4:   **随机选择:** 从  $M_i$  中均匀随机选择一个元素  $u_i$ 。
  - 5:   **基交换操作:** 根据拟阵的强基交换性质, 存在元素  $g(u_i) \in S_{i-1}$ , 使得  $S_{i-1} \cup \{u_i\} \setminus \{g(u_i)\} \in \mathcal{I}$ 。
  - 6:   **更新解:**  $S_i \leftarrow S_{i-1} \cup \{u_i\} \setminus \{g(u_i)\}$ 。
  - 7: **end for**
  - 8: **return**  $S_k$
- 

#### 3.2. 概率演化分析

令  $p_{i,u}$  表示真实元素  $u$  在第  $i$  次迭代后属于集合  $S_i$  的概率。

**引理 2** (概率上界). 对于任意  $0 \leq i \leq k$  和真实元素  $u$ , 有

$$p_{i,u} \leq \frac{1}{2} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{2}{k} \right)^i \right].$$

证明. 用归纳法.

1) **基础步:**  $i = 0$  时  $S_0$  只含虚拟元素, 故  $p_{0,u} = 0$ , 等式右侧亦为 0, 成立.

2) **归纳步:** 假设对  $i - 1$  成立. 考虑第  $i$  步: 元素  $u$  在  $S_i$  中要么是“原来就在  $S_{i-1}$  且没被删掉”, 要么是“本轮被加入”.

由于本轮从大小为  $k$  的集合  $M_i$  中均匀抽取  $u_i$ , 且随后会执行一次基交换删除某个元素, 因此对任意固定元素  $u$ ,

$$\Pr(u \text{ 在本轮被选为加入元素}) \leq \frac{1}{k}, \quad \Pr(u \text{ 在本轮被删除}) \leq \frac{1}{k}.$$

于是由全概率公式,

$$\begin{aligned} p_{i,u} &= \Pr(u \in S_i) \\ &\leq \Pr(u \in S_{i-1}) \left( 1 - \frac{1}{k} \right) + \Pr(u \notin S_{i-1}) \frac{1}{k} \\ &= p_{i-1,u} \left( 1 - \frac{1}{k} \right) + (1 - p_{i-1,u}) \frac{1}{k} \\ &= p_{i-1,u} \left( 1 - \frac{2}{k} \right) + \frac{1}{k}. \end{aligned} \tag{1}$$

将归纳假设代入并化简即可得到结论:

$$p_{i,u} \leq \frac{1}{2} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{2}{k} \right)^i \right].$$

□

### 3.3. 混合集合期望界

定义辅助函数

$$h_\lambda(S) f(S \cup OPT) - \lambda c(S \cup OPT).$$

由于  $f$  次模且  $c$  模,  $h_\lambda$  为次模函数.

**命题 1** (混合集合期望界). 对任意  $0 \leq i \leq k$ ,

$$\mathbb{E}[h_\lambda(S_i)] = \mathbb{E}[f(S_i \cup OPT) - \lambda c(S_i \cup OPT)] \geq \frac{1}{2} \left[ 1 + \left( 1 - \frac{2}{k} \right)^i \right] f(OPT) - \lambda c(OPT) - \frac{\lambda}{2} c(N). \tag{2}$$

证明. 由引理 2,  $\max_u p_{i,u} \leq \frac{1}{2} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{2}{k} \right)^i \right]$ , 故

$$1 - \max_u p_{i,u} \geq \frac{1}{2} \left[ 1 + \left( 1 - \frac{2}{k} \right)^i \right]. \quad (3)$$

由次模随机下界,

$$\mathbb{E}[f(OPT \cup S_i)] \geq (1 - \max_u p_{i,u})f(OPT).$$

将 (3) 代入上式得收益项下界:

$$\mathbb{E}[f(OPT \cup S_i)] \geq \frac{1}{2} \left[ 1 + \left( 1 - \frac{2}{k} \right)^i \right] f(OPT). \quad (4)$$

成本项: 由模性与非负性

$$c(OPT \cup S_i) \leq c(OPT) + c(S_i).$$

且

$$\mathbb{E}[c(S_i)] = \sum_{u \in N} p_{i,u} c(u) \leq (\max_u p_{i,u}) \sum_{u \in N} c(u) \leq \frac{1}{2} c(N).$$

故

$$\mathbb{E}[c(OPT \cup S_i)] \leq c(OPT) + \frac{1}{2} c(N). \quad (5)$$

将 (4)(5) 合并并乘以  $-\lambda$ , 即得 (2). □

### 3.4. 单步增益与损失

**命题 2** (期望增益). 第  $i$  步加入元素满足

$$\mathbb{E}[f_{u_i}(S_{i-1}) - \lambda c(u_i)] \geq \frac{1}{k} \mathbb{E}[h_\lambda(S_{i-1})] - \frac{1}{k} \mathbb{E}[f(S_{i-1}) - \lambda c(S_{i-1})]. \quad (6)$$

证明. 与原稿命题 2 同构: 因  $u_i$  在  $M_i$  上均匀,

$$\mathbb{E}[f_{u_i}(S_{i-1}) - \lambda c(u_i)] = \frac{1}{k} \sum_{u \in M_i} (f_u(S_{i-1}) - \lambda c(u)).$$

由  $M_i$  的最优性,

$$\sum_{u \in M_i} (f_u(S_{i-1}) - \lambda c(u)) \geq \sum_{u \in OPT} (f_u(S_{i-1}) - \lambda c(u)).$$

次模性给出  $\sum_{u \in OPT} f_u(S_{i-1}) \geq f(S_{i-1} \cup OPT) - f(S_{i-1})$ , 模性给出  $\sum_{u \in OPT} c(u) = c(OPT)$ , 从而

$$\sum_{u \in OPT} (f_u(S_{i-1}) - \lambda c(u)) \geq f(S_{i-1} \cup OPT) - f(S_{i-1}) - \lambda c(OPT).$$

注意恒等式

$$h_\lambda(S_{i-1}) - (f(S_{i-1}) - \lambda c(S_{i-1})) = f(S_{i-1} \cup OPT) - f(S_{i-1}) - \lambda c(OPT),$$

代入并除以  $k$  即得结论。 □

**命题 3** (期望损失). 第  $i$  步移除元素满足

$$\mathbb{E}[f_{g(u_i)}(S_{i-1} \setminus g(u_i)) - c(g(u_i))] \leq \frac{1}{k} \mathbb{E}[f(S_{i-1}) - c(S_{i-1})]. \quad (7)$$

证明. 由强基交换性质, 可将本轮从  $M_i$  选取  $u$  后被移除的元素记作  $g(u) \in S_{i-1}$ ; 并且可选取交换映射使得  $u \mapsto g(u)$  在  $M_i$  与  $S_{i-1}$  之间为双射 (每轮删掉的元素在  $S_{i-1}$  中“均摊”).

因此

$$\mathbb{E}[f_{g(u_i)}(S_{i-1} \setminus g(u_i)) - c(g(u_i))] = \frac{1}{k} \sum_{u \in M_i} (f_{g(u)}(S_{i-1} \setminus g(u)) - c(g(u))). \quad (7.1)$$

由于  $u \mapsto g(u)$  为双射, 上式等于

$$\frac{1}{k} \sum_{v \in S_{i-1}} (f_v(S_{i-1} \setminus v) - c(v)). \quad (7.2)$$

对任意集合  $S$ , 由次模性可得“最后边际和不超过总值”: 取任意排列  $S = \{v_1, \dots, v_k\}$ , 令  $S_t = \{v_1, \dots, v_t\}$ , 则

$$f(S) - f(\emptyset) = \sum_{t=1}^k f_{v_t}(S_{t-1}) \geq \sum_{t=1}^k f_{v_t}(S \setminus v_t),$$

其中不等号来自  $S \setminus v_t \supseteq S_{t-1}$  与边际递减. 因此

$$\sum_{v \in S_{i-1}} f_v(S_{i-1} \setminus v) \leq f(S_{i-1}) - f(\emptyset) = f(S_{i-1}). \quad (7.3)$$

又  $\sum_{v \in S_{i-1}} c(v) = c(S_{i-1})$ , 联立 (7.2)(7.3) 得到

$$\frac{1}{k} \sum_{v \in S_{i-1}} (f_v(S_{i-1} \setminus v) - c(v)) \leq \frac{1}{k} (f(S_{i-1}) - c(S_{i-1})).$$

代回 (7.1) 即得结论。 □

### 3.5. 总体递推、求和展开与最终双准则

记

$$\Phi_i \mathbb{E}[f(S_i) - c(S_i)], \quad r1 - \frac{2}{k}.$$

一步变化:

$$\Phi_i = \Phi_{i-1} + \mathbb{E}[f_{u_i}(S_{i-1}) - c(u_i)] - \mathbb{E}[f_{g(u_i)}(S_{i-1} \setminus g(u_i)) - c(g(u_i))]. \quad (8)$$

由于  $\lambda \geq 1$ ,

$$f_{u_i}(S_{i-1}) - c(u_i) = (f_{u_i}(S_{i-1}) - \lambda c(u_i)) + (\lambda - 1)c(u_i) \geq f_{u_i}(S_{i-1}) - \lambda c(u_i). \quad (8.1)$$

将 (8.1)、命题 2 与 3 代入 (8.0), 并用

$$-\mathbb{E}[f(S_{i-1}) - \lambda c(S_{i-1})] = -\Phi_{i-1} + (\lambda - 1)\mathbb{E}[c(S_{i-1})] \geq -\Phi_{i-1},$$

可得

$$\Phi_i \geq r \Phi_{i-1} + \frac{1}{k} \mathbb{E}[h_\lambda(S_{i-1})]. \quad (8.2)$$

再由命题 1 (将  $i$  替换为  $i - 1$ ):

$$\mathbb{E}[h_\lambda(S_{i-1})] \geq \frac{1}{2}(1 + r^{i-1})f(OPT) - \lambda c(OPT) - \frac{\lambda}{2}c(N). \quad (9)$$

代入 (8) 得到

$$\Phi_i \geq r \Phi_{i-1} + \frac{1}{2k}(1 + r^{i-1})f(OPT) - \frac{\lambda}{k}c(OPT) - \frac{\lambda}{2k}c(N). \quad (10)$$

展开求和: 将 (10) 两边乘  $r^{k-i}$  并对  $i = 1, \dots, k$  求和, 用望远镜结构与  $\Phi_0 = 0$ , 得到

$$\Phi_k \geq \sum_{i=1}^k r^{k-i} \left[ \frac{1}{2k}(1 + r^{i-1})f(OPT) - \frac{\lambda}{k}c(OPT) - \frac{\lambda}{2k}c(N) \right]. \quad (11)$$

计算几何级数

$$\sum_{i=1}^k r^{k-i} = \frac{1 - r^k}{1 - r} = \frac{k}{2}(1 - r^k), \quad \sum_{i=1}^k r^{k-i} r^{i-1} = k r^{k-1},$$

代回得

$$\Phi_k \geq \left[ \frac{1 - r^k}{4} + \frac{r^{k-1}}{2} \right] f(OPT) - \frac{\lambda}{2}(1 - r^k)c(OPT) - \frac{\lambda}{4}(1 - r^k)c(N). \quad (12)$$

令  $k \rightarrow \infty$ , 用  $r^k = (1 - \frac{2}{k})^k \rightarrow e^{-2}$  与  $r^{k-1} \rightarrow e^{-2}$ , 得到

$$\mathbb{E}[f(S_k) - c(S_k)] \geq \frac{1 + e^{-2}}{4} f(OPT) - \frac{\lambda}{2} (1 - e^{-2}) c(OPT) - \frac{\lambda}{4} (1 - e^{-2}) c(N). \quad (13)$$

消去  $c(N)$ : 在假设  $c(N) \leq 2c(OPT)$  下,

$$-\frac{\lambda}{4} (1 - e^{-2}) c(N) \geq -\frac{\lambda}{4} (1 - e^{-2}) \cdot 2c(OPT) = -\frac{\lambda}{2} (1 - e^{-2}) c(OPT).$$

代入 (13) 得最终不含  $c(N)$  的双准则保证:

$$\mathbb{E}[f(S_k) - c(S_k)] \geq \frac{1 + e^{-2}}{4} f(OPT) - \lambda (1 - e^{-2}) c(OPT). \quad (14)$$

### 3.6. 参数 $\lambda$ 的理论最优选取

由上一小节的推导, 在假设  $c(N) \leq 2c(OPT)$  下, 我们已经得到对任意  $\lambda \geq 1$  的保证:

$$\mathbb{E}[f(S_k) - c(S_k)] \geq \alpha f(OPT) - \beta(\lambda) c(OPT), \quad \alpha = \frac{1 + e^{-2}}{4}, \beta(\lambda) = \lambda(1 - e^{-2}). \quad (15)$$

将右端视为关于  $\lambda$  的下界函数

$$L(\lambda) \alpha f(OPT) - \lambda (1 - e^{-2}) c(OPT).$$

由于  $c(OPT) \geq 0$  且  $1 - e^{-2} > 0$ , 有

$$\frac{d}{d\lambda} L(\lambda) = -(1 - e^{-2}) c(OPT) \leq 0,$$

因此  $L(\lambda)$  在  $\lambda \geq 1$  上单调不增, 从而可得理论最优参数。

**命题 4** (理论最优参数). 在约束  $\lambda \geq 1$  下, 使下界  $L(\lambda)$  最大的参数为

$$\lambda^* = 1, \quad \max_{\lambda \geq 1} L(\lambda) = L(1) = \alpha f(OPT) - (1 - e^{-2}) c(OPT).$$

命题 4 仅从最坏情形理论下界角度给出  $\lambda$  的最优选取。在实际应用中, 取更大的  $\lambda$  会更强地抑制高成本元素, 可能带来更低的实际成本或更稳定的输出, 但相应地, 理论双准则中成本系数  $\beta(\lambda)$  会随  $\lambda$  线性增大。

**定理 2** (双准则近似比). 令  $\lambda \geq 1$ . 若满足  $c(N) \leq 2c(OPT)$ , 则算法 1 输出  $S_k$  满足

$$\mathbb{E}[f(S_k) - c(S_k)] \geq \alpha f(OPT) - c(OPT),$$

其中

$$\alpha = \frac{1 + e^{-2}}{4} \approx 0.283.$$

## 4. 结论

本文研究了拟阵约束下的正则化次模最大化问题  $g(S) = f(S) - c(S)$ 。针对正则化导致目标值可能为负从而使经典乘性近似比失效的困难, 我们采用双准则近似框架, 并提出参数化惩罚随机贪心算法: 在候选基构造阶段以  $f_u(S) - \lambda c(u)$  作为惩罚增益进行选择, 从而用参数  $\lambda$  调节成本抑制强度。在严格的概率演化与拟阵基交换分析下, 我们证明在假设  $c(N) \leq 2c(OPT)$  时算法满足

$$\mathbb{E}[f(S_k) - c(S_k)] \geq \frac{1 + e^{-2}}{4} f(OPT) - c(OPT),$$

从而得到双准则近似比的理论保证。

## 参考文献

- [1] Nemhauser, G.L., Wolsey, L.A. and Fisher, M.L. (1978) An Analysis of Approximations for Maximizing Submodular Set Functions—I. *Mathematical Programming*, **14**, 265-294.  
<https://doi.org/10.1007/BF01588971>
- [2] Sviridenko, M., Vondrák, J. and Ward, J. (2017) Optimal Approximation for Submodular and Supermodular Optimization with Bounded Curvature. *Mathematics of Operations Research*, **42**, 1197-1218. <https://doi.org/10.1287/moor.2016.0842>
- [3] Calinescu, G., Chekuri, C., Pál, M. and Vondrák, J. (2011) Maximizing a Monotone Submodular Function Subject to a Matroid Constraint. *SIAM Journal on Computing*, **40**, 1740-1766.  
<https://doi.org/10.1137/080733991>
- [4] Ene, A. (2020) A Note on Maximizing the Difference between a Monotone Submodular Function and a Linear Function. <https://arxiv.org/abs/2002.07782v1>
- [5] Buchbinder, N. and Feldman, M. (2018) Deterministic Algorithms for Submodular Maximization Problems. *ACM Transactions on Algorithms*, **14**, Article No. 32.  
<https://doi.org/10.1145/3184990>