

k步循环图上的追逃博弈策略研究

——k+1名警察的必胜策略

郭修平

青岛大学数学与统计学院, 山东 青岛

收稿日期: 2026年3月7日; 录用日期: 2026年4月22日; 发布日期: 2026年4月30日

摘要

警察与强盗问题(Cops and Robbers Game)是图论与组合博弈论中的经典研究课题, 其中图的警察数描述了保证警察最终能够抓获强盗所需的最少警察数量。已有研究表明, 对于由 k 个生成元构造的 k 步循环图, 其警察数不超过 $k + 1$ 。然而, 相关工作主要从结构性质出发给出了存在性证明, 而未给出具体的追捕策略。本文在已有结果的基础上, 给出一种新的构造性证明方法。通过引入警察与强盗之间的距离表示, 将顶点之间的位置关系表示为生成元的线性组合, 并设计 k 个警察的协同策略, 使其在有限步后能够形成特定的距离组合结构。在该结构下, 强盗的可行动作被完全限制, 只能保持静止, 从而由第 $k + 1$ 个自由警察完成最终捕获。该方法从策略构造的角度解释了 $k + 1$ 名警察能够保证抓获强盗的原因, 为理解循环图上的追逃博弈提供了一种新的分析思路。

关键词

警察与强盗博弈, 警察数, 追捕策略, 循环图

Pursuit Strategies on k -Step Circulant Graph

—A Winning Strategy for $k + 1$ Cops

Xiuping Guo

School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao Shandong

Received: March 7, 2026; accepted: April 22, 2026; published: April 30, 2026

Abstract

The cops and robbers game is a classical topic in graph theory and combinatorial game theory, where the cop number of a graph represents the minimum number of cops required to guarantee the capture of a robber. It is known that for k -step circulant graphs generated by k elements, the cop number is at most $k + 1$. However, existing results mainly provide existential proofs based on structural properties of the graph and do not explicitly describe a concrete capture strategy. In this paper, we present a constructive proof of this result by developing an explicit pursuit strategy. By introducing a distance representation between the cops and the robber, the positional relations among vertices are expressed as linear combinations of the generating steps. Based on this representation, we design a cooperative strategy for k cops such that after finitely many moves their distances to the robber form a specific configuration. Under this configuration, all possible movements of the robber are blocked, forcing the robber to remain stationary, and the $(k + 1)$ -th free cop can eventually capture the robber. This approach provides a strategy-based explanation for why $k + 1$ cops suffice on k -step circulant graphs and offers a new perspective for studying pursuit-evasion games on circulant graphs.

Keywords

Cop and Robber, Cop Number, Capture Strategy, Circulant Graph

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

图上的追逃博弈(Cops and Robbers Game)是图论与组合博弈论中的经典研究问题之一。该模型最早由Nowakowski和Winkler以及Quilliot在20世纪80年代提出 [1, 2]。在这一模型中,若干警察和一个强盗在图的顶点上进行博弈,双方轮流移动,当某个警察与强盗位于同一顶点时,强盗即被捕获。该模型不仅具有丰富的组合结构,还与网络安全、机器人搜索以及多智能体系统等问题存在联系 [3, 4]。

在该领域中, 一个核心概念是图的警察数(Cop Number)。警察数定义为保证警察能够最终抓住强盗所需的最少警察数量, 通常记为 $c(G)$ 。Aigner与Fromme证明了著名结果: 任意连通平面图警察数不超过3 [5]。随后, Frankl研究了大围长图与Cayley图中的警察数问题 [6], Chiniforooshan与Scott等人分别给出了更一般图类中的警察数上界估计 [7, 8], 而Lu与Peng对Meyniel猜想进行了重要推进 [9]。此外, Prałat研究了随机图中警察数的行为 [10], Bollobás等人进一步给出了随机图中的渐近结果 [11]。这些研究表明, 警察数与图的整体结构特性密切相关, 是刻画图复杂性的关键参数。

在更一般的追逃博弈研究中, Alspach与Parsons系统研究了图上的追逃模型 [12], Hahn与MacGillivray则讨论了多警察多强盗模型 [13], Clarke与MacGillivray对 k -cop-win图的结构进行了刻画 [14]。Bonato与Nowakowski的专著 [3]以及Nowakowski与Prałat的综述 [4]对该领域的发展进行了系统总结。

循环图(Circulant Graph)作为定义在循环群上的Cayley图, 是一类具有高度对称性的图结构。由于其顶点传递性, 循环图在研究警察数问题时具有重要意义。Fitzpatrick与Larkin研究了循环图上的警察数问题, 并给出了若干具体结果 [15]。此外, 一些研究从Cayley图的一般结构出发, 对警察数上界进行了分析 [6]。

总体来看, 现有关于循环图警察数的研究主要依赖于图的结构性质给出上界的存在性证明。这类方法通常利用图的对称性、覆盖结构或组合分解等工具, 从整体上分析警察如何控制图的空间, 从而证明存在某种策略使警察能够最终获胜。然而, 这些证明往往不直接给出警察在博弈过程中的具体移动方式, 因此在策略层面上缺乏可操作性。

与此不同, 构造性方法试图直接给出警察的逐轮行动策略, 即在任意强盗移动的情况下, 明确说明警察应如何响应, 从而在有限步内实现抓捕。这类方法能够更直观地揭示警察数上界成立的机制, 并有助于分析捕获时间等更精细的问题。

对于由 k 个生成元构造的 k 步循环图, 已有研究表明其警察数满足 $c(G) \leq k + 1$, 但相关结果主要通过结构性分析给出存在性证明, 而缺乏明确的策略构造。

本文在上述研究基础上, 从策略构造的角度研究 k 步循环图上的追逃博弈问题。通过引入警察与强盗之间的距离表示, 将顶点之间的位置关系表示为生成元的线性组合, 并利用距离向量的动态变化规律, 设计 k 名警察的协同策略, 使其在有限步内形成特定的距离组合结构。在该结构下, 强盗的全部可行动作被完全封锁, 只能保持静止, 从而由第 $k + 1$ 名警察完成最终抓捕。

与已有基于图结构的存在性证明相比, 本文方法的特点在于: 通过显式构造追捕策略, 直接描述警察在每一轮中的行动规则, 从而提供了一种“如何追捕”的解释。这一方法不仅证明了警察数上界的成立, 也为进一步研究循环图上的追逃博弈提供了新的分析工具。

本文结构如下: 第二节介绍循环图及追逃博弈的基本定义; 第三节建立距离向量表示方法; 第四节给出 $k + 1$ 名警察的构造性追捕策略; 第五节给出结论与进一步研究方向。

2. 预备知识与基本定义

2.1. 循环图的定义

循环图(Circulant Graph)是一类具有高度对称性的图结构, 它可以看作定义在循环群上

的Cayley图。设 n 为正整数，记 $Z_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ 为模 n 的整数集合。给定一个生成元集合 $S \subseteq Z_n$ ，且满足 $S = -S$ 且 $0 \notin S$ ，则循环图 $Circ(n, S)$ 定义为一个无向图，其顶点集合为 Z_n ，当且仅当 $j - i \equiv s \pmod{n}$ 对某个 $s \in S$ 成立时，顶点 i 与顶点 j 之间存在一条边。

由于循环图是定义在循环群上的Cayley图，因此该图具有顶点传递性，即对于任意两个顶点 $u, v \in V(G)$ ，都存在一个图自同构将顶点 u 映射到顶点 v 。这种高度对称性使得循环图在图论和组合结构研究中具有重要地位，同时也为研究图上的追逃博弈问题提供了便利条件。

2.2. k 步循环图

在循环图 $Circ(n, S)$ 中，如果生成元集合 S 的大小为 k ，则该图通常被称为 k 步循环图。设生成元集合 $S = \{\pm s_1, \pm s_2, \dots, \pm s_k\}$ ，其中 $1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k < n$ 。此时，图中每个顶点 i 都与顶点 $i \pm s_1, i \pm s_2, \dots, i \pm s_k$ 相邻(模 n 意义下)。因此，每个顶点的度为 $2k$ 。由于生成元数量为 k ，顶点之间的可达路径也具有多种组合形式，这使得 k 步循环图的结构比普通循环图更加复杂。当 k 增大时，图的连通性和局部结构也随之发生变化，从而对图上的追逃策略产生重要影响。因此，研究 k 步循环图上的追逃博弈问题具有一定的理论意义。

2.3. 警察与强盗博弈模型

警察与强盗问题(Cops and Robbers Game)是一种在图结构上进行的追逃博弈模型。设 $G = (V, E)$ 为一简单无向图。在该博弈中，一方控制若干警察，另一方控制一个强盗。博弈按照以下规则进行：

- 1、在博弈开始时，警察首先选择若干顶点作为初始位置；
- 2、随后强盗选择一个顶点作为其初始位置；
- 3、在每一轮中，警察和强盗依次移动，每次可以沿图的一条边移动到相邻顶点，也可以选择保持原地不动；
- 4、若某个警察与强盗位于同一顶点，则强盗被捕获，博弈结束。

在该模型中，一个重要参数是图的警察数(Cop Number)。图 G 的警察数记为 $c(G)$ ，表示保证警察能够最终抓住强盗所需要的最少警察数量。如果存在一个整数 k ，使得 k 名警察能够保证抓获强盗，则称 $c(G) \leq k$ 。

对于不同类型的图结构，警察数可能具有不同的取值。例如，对于某些特殊图结构，可以通过构造追捕策略来给出警察数的上界。对于具有高度对称性的图结构，如循环图，研究警察数及其追捕策略是图上追逃博弈研究的重要方向之一。

3. 警察与强盗之间的距离表示

3.1. 距离向量的定义

在循环图上的追逃博弈中，警察与强盗之间的位置关系是分析追捕策略的重要依据。为了刻画这种关系，本文引入警察与强盗之间的距离表示方法。

设 $G = Circ(n, S)$ 为一个 k 步循环图, 其生成元集合为 $S = \{\pm s_1, \pm s_2, \dots, \pm s_k\}$. 设强盗位于顶点 r , 警察位于顶点 c . 由于循环图定义在循环群 \mathbb{Z}_n 上, 因此两个顶点之间的位置差可以表示为模 n 的整数差 $d = r - c \in \mathbb{Z}_n$, 称 d 为警察与强盗之间的顶点差.

在 k 步循环图中, 每一步移动对应于生成元集合中的某个元素. 因此, 顶点差 d 可以表示为生成元的线性组合. 具体地, 如果存在整数系数 a_1, a_2, \dots, a_k , 使得 $d \equiv a_1 s_1 + a_2 s_2 + \dots + a_k s_k \pmod{n}$, 则称向量 $v = (a_1, a_2, \dots, a_k) \in \mathbb{Z}^k$ 为顶点差 d 关于生成元 s_1, s_2, \dots, s_k 的一个距离向量 (或表示向量).

需要指出的是, 距离向量 v 并不是唯一确定的. 不同的整数向量可能对应同一个顶点差 d . 因此, 在后续分析中, 当讨论距离向量的变化时, 均指在某一固定表示下的向量变化.

基于上述表示方法, 可以利用距离向量来描述警察与强盗之间的相对位置关系. 在后续分析中, 本文将利用距离向量的变化规律来设计警察的协同移动策略, 使多个警察在有限步内形成特定的距离组合结构, 从而限制强盗的移动空间, 并最终实现抓捕.

3.2. 距离组合的性质

设 $G = (n, S)$ 为一个 k 步循环图, 其中生成元集合为 $S = \{\pm s_1, \pm s_2, \dots, \pm s_k\}$. 设第 i 个警察 C_i 与强盗 R 在某一时刻的顶点差为 $d_i = R - C_i \in \mathbb{Z}_n$.

由于图 G 是由生成元 s_1, s_2, \dots, s_k 所生成的循环图, 因此 d_i 可以表示为这些生成元的整数线性组合. 即存在整数向量 $v_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ik}) \in \mathbb{Z}^k$ 使得 $d_i \equiv a_{i1} s_1 + a_{i2} s_2 + \dots + a_{ik} s_k \pmod{n}$. 称该向量 v_i 为警察 C_i 与强盗 R 之间的一个距离组合.

需要指出的是, 这里的各系数 $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ik}$ 并不是固定不变的, 而是随着博弈过程中双方的移动而动态变化的. 事实上, 距离组合的变化可以通过表示向量 v_i 的变化来描述.

设在某一轮中, 强盗沿方向 εs_j 移动一步, 其中 $\varepsilon \in \{+1, -1\}$, 而警察 C_i 保持原地不动, 则新的顶点差为 $d'_i = (R + \varepsilon s_j) - C_i = d_i + \varepsilon s_j$. 在保持同一表示方式的情况下, 对应的距离向量 $v_i = (a_{i1}, \dots, a_{ik})$ 变为 $v'_i = (a'_{i1}, \dots, a'_{ik})$, 其中 $a'_{ij} = a_{ij} + \varepsilon$, 其余各分量保持不变.

同理, 若在某一轮中警察 C_i 沿方向 εs_j 移动一步, 而强盗保持原地不动, 则新的顶点差满足 $d'_i = R - (C_i + \varepsilon s_j) = d_i - \varepsilon s_j$, 此时距离向量变为 v'_i , 其中 $a'_{ij} = a_{ij} - \varepsilon$, 其余分量不变.

由此可见, 在追逃博弈过程中, 警察与强盗之间的顶点差 d_i 始终在 \mathbb{Z}_n 中变化, 而其对应的距离向量 $v_i \in \mathbb{Z}^k$ 则刻画了该顶点差在生成元坐标下的表示. 强盗沿某一生成元方向的移动, 会使表示向量的对应分量发生 ± 1 的变化; 警察沿某一生成元方向的移动, 则会使相应分量发生 ∓ 1 的变化.

因此, 警察可以通过选择适当的响应方式, 对距离向量中的各个分量进行逐步调节. 这一性质说明, 在 k 步循环图中, 警察与强盗之间的相对位置不仅可以用生成元的线性组合来表示, 而且该表示中的各个系数具有明确的动态演化规律. 基于这种可调性, 警察可以在博弈过程中逐步改变距离组合的结构, 使其逼近预先设定的目标形式. 后续将利用这一性质构造警察的协同策略, 在有限步内形成完全封锁型的距离组合结构, 从而限制强盗的全部可行动作并最终实现抓捕.

4. $k + 1$ 名警察的追捕策略

与已有主要依赖图的整体结构性给出警察数上界的证明不同, 本文方法直接跟踪警察与强盗之间的相对位置, 并通过距离组合的动态调节构造逐轮追捕策略。

在上一节中, 我们给出了警察与强盗之间距离向量的表示方法, 并定义了合法的完全封锁型距离组合。当警察与强盗之间的距离满足该组合时, 每名警察可以封锁两个生成元方向, 从而使强盗无法沿任何生成元方向移动, 只能保持静止。本节将说明如何通过警察的协同策略, 在有限步内达到这样的距离组合结构, 并最终完成抓捕。

设 $G = \text{Circ}(n; s_1, s_2, \dots, s_k)$ 为一个 k 步循环图, 其生成元集合为 $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ 。图中有 $k + 1$ 名警察 $C_1, C_2, \dots, C_k, C_{k+1}$, 以及一个强盗 R 。其中前 k 名警察用于构造距离组合结构, 第 $k + 1$ 名警察作为自由警察, 在最终阶段完成抓捕。

4.1. 完全封锁距离结构的构造

设 $G = (n; s_1, s_2, \dots, s_k)$, $D = \{\pm s_1, \pm s_2, \dots, \pm s_k\}$ 。将方向集合 D 划分为 k 个互不相交的二元子集 D_1, D_2, \dots, D_k , $D_i = \{-\alpha_i, -\beta_i\}$, 其中 $\alpha_i, \beta_i \in D$, $\alpha_i \neq -\beta_i$, 并满足 $\bigcup_{i=1}^k D_i = D$ 。设在某一时刻, 强盗位于顶点 R , 第 i 名警察位于顶点 C_i , 定义顶点差 $d_i = R - C_i \in \mathbb{Z}_n$ 。取其生成元表示 $d_i = \sum_{j=1}^k a_{ij} s_j$ 。将该表示按方向划分为 $d_i = u_i \alpha_i + v_i \beta_i + \sum_{\gamma \in E_i} m_{i,\gamma} \gamma$, 其中 $E_i = D \setminus \{-\alpha_i, -\beta_i\}$, 且 $u_i, v_i \in \mathbb{Z}$, $m_{i,\gamma} \in \mathbb{Z}$ 。称前两项为目标分量, 其余为非目标分量。

定义局部势函数 $\Phi_i = \sum_{\gamma \in E_i} |m_{i,\gamma}|$, 总势函数为 $\Phi = \sum_{i=1}^k \Phi_i$ 。当 $\Phi_i = 0$ 且 $u_i \neq 0$, $v_i \neq 0$, 称警察 C_i 达到封锁准备状态。

对于尚未达到封锁准备状态的警察 C_i , 在每一轮中:

若强盗的移动方向属于 $\{-\alpha_i, -\beta_i\}$, 则警察选择沿某个 $\gamma \in E_i$ 且 $m_{i,\gamma} \neq 0$ 的方向移动, 使该系数绝对值减少 1; 若强盗的移动方向不属于 $\{-\alpha_i, -\beta_i\}$, 则警察沿该方向的反方向移动, 使对应系数绝对值减少 1。

引理1 (单步下降). 若 $\Phi_i > 0$, 则存在一种响应策略使得 $\Phi'_i = \Phi_i - 1$ 。

证明. 由于 $\Phi_i > 0$, 存在 $\gamma \in E_i$ 使得 $m_{i,\gamma} \neq 0$ 。根据第 3 节中系数变化规律, 警察可以通过沿适当方向移动, 使该系数的绝对值减少 1, 其余系数不增加, 从而得到 $\Phi'_i = \Phi_i - 1$ 。

引理2 (总势函数下降). 若存在未达到封锁准备状态的警察, 则每一轮都有 $\Phi' \leq \Phi - 1$ 。

证明. 由于方向集合满足 $D = \bigcup_{i=1}^k D_i$, 强盗的任意移动方向必属于某个 D_i 。若对应警察尚未完成, 则由上一个引理可使其 Φ_i 减少 1; 若该警察已完成, 则该方向已被封锁, 强盗无法选择该方向。因此每一轮至少减少 1, 结论成立。

定理1. 前 k 名警察可以在有限步内达到封锁准备状态。

证明. Φ 为非负整数, 且每一轮至少减少 1, 因此在有限步后有 $\Phi = 0$ 。从而对所有 i , 有 $d_i = u_i \alpha_i + v_i \beta_i$, $u_i \neq 0$, $v_i \neq 0$ 。即全部警察达到封锁准备状态。

4.2. 封锁方向的机制

在上一节中, 已得到 $d_i = u_i\alpha_i + v_i\beta_i$, $u_i, v_i \neq 0$.

引理3 (方向封锁). 若 $u_i > 0$, $v_i > 0$, 则警察 C_i 可以永久封锁强盗沿 $-\alpha_i$ 与 $-\beta_i$ 的移动。

证明. 若强盗沿 $-\alpha_i$ 移动, 则警察沿 β_i 移动, 有 $d'_i = d_i - \alpha_i - \beta_i = (u_i - 1)\alpha_i + (v_i - 1)\beta_i$.

若强盗沿 $-\beta_i$ 移动, 则警察沿 α_i 移动, 有 $d'_i = d_i - \beta_i - \alpha_i = (u_i - 1)\alpha_i + (v_i - 1)\beta_i$.

因此结构保持, 两方向均被封锁。

由于 $\{\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_k, \beta_k\} = \{\pm s_1, \pm s_2, \dots, \pm s_k\}$, 全部 $2k$ 个方向均被封锁。因此强盗无法沿任何生成元方向移动, 只能保持原地不动。

定理2. 对于 k 步循环图 $G = Circ(n; s_1, \dots, s_k)$, 有 $c(G) \leq k + 1$.

证明. 由前述结果, 前 k 名警察在有限步后封锁全部方向, 使强盗无法移动。此时第 $k + 1$ 名警察沿最短路径逼近强盗。由于强盗静止, 距离单调减少, 因此在有限步内完成抓捕。故 $c(G) \leq k + 1$.

4.3. 主要结论

由上述分析可以得到如下结论。

定理3. 设 $G = Circ(n; s_1, s_2, \dots, s_k)$ 为一个 k 步循环图, 则 $c(G) \leq k + 1$ 。

证明. 设图中有 $k + 1$ 名警察 $C_1, C_2, \dots, C_k, C_{k+1}$, 以及一个强盗 R 。根据第三节中的距离向量表示方法, 警察与强盗之间的距离可以表示为生成元的线性组合形式。

首先, 由第三节分析可知, 通过适当调整警察的移动策略, 可以在有限步内使前 k 名警察与强盗之间的距离达到一个合法的完全封锁型距离组合。即存在 $\alpha_i, \beta_i \in \{\pm s_1, \pm s_2, \dots, \pm s_k\}$, 使得

$$d_i = x_i(\alpha_i + \beta_i), \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

其中 x_i 为正整数, 并满足

$$\{\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_k, \beta_k\} = \{\pm s_1, \pm s_2, \dots, \pm s_k\},$$

且 $\alpha_i \neq -\beta_i$ 。

在该距离组合结构下, 第 i 个警察能够同时封锁方向 $-\alpha_i$ 和 $-\beta_i$ 。由于 k 名警察所对应的方向集合恰好覆盖全部 $2k$ 个生成元方向, 因此强盗无法沿任何生成元方向移动, 只能保持原地不动。当强盗被迫保持静止时, 第 $k + 1$ 名警察 C_{k+1} 可以沿图中的路径逐步向强盗移动。由于强盗无法改变位置, 警察与强盗之间的距离将逐渐减少, 并最终在有限步内到达同一顶点, 从而完成抓捕。

因此, 在 k 步循环图 $Circ(n; s_1, s_2, \dots, s_k)$ 中, $k + 1$ 名警察总能够保证最终抓获强盗, 即 $c(G) \leq k + 1$ 。

5. 结论与展望

本文研究了 k 步循环图上的警察与强盗博弈问题。首先介绍了循环图与追逃博弈模型的基本概念,并给出了警察与强盗之间的距离向量表示方法。通过分析距离向量在生成元组合下的变化规律,建立了距离组合的表示框架。

在此基础上,本文给出了 k 名警察与强盗之间的一种合法完全封锁型距离组合。当警察与强盗之间的距离满足该组合结构时,每名警察可以同时封锁两个生成元方向,从而使 k 名警察共同封锁全部 $2k$ 个生成元方向。在这种情况下,强盗无法沿任何生成元方向移动,只能保持原地不动。随后,第 $k+1$ 名警察可以在有限步内到达强盗所在顶点,从而完成抓捕。由此证明了在 k 步循环图 $Circ(n; s_1, s_2, \dots, s_k)$ 中, $k+1$ 名警察能够保证最终抓获强盗,即 $c(G) \leq k+1$ 。

本文从策略构造的角度解释了 $k+1$ 名警察能够保证抓获强盗的原因,为理解循环图上的追逃博弈提供了一种新的分析方法。未来的研究可以进一步考虑以下几个方向:一是研究在不同生成元结构下警察数的精确取值;二是分析更一般的Cayley图上的追逃博弈问题;三是探索相关模型在复杂网络和多智能体系统中的潜在应用。

参考文献

- [1] Nowakowski, R. and Winkler, P. (1983) Vertex-to-Vertex Pursuit in a Graph. *Discrete Mathematics*, **43**, 235-239. [https://doi.org/10.1016/0012-365x\(83\)90160-7](https://doi.org/10.1016/0012-365x(83)90160-7)
- [2] Quilliot, A. (1985) A Short Note about Pursuit Games Played on a Graph with a Given Genus. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **38**, 89-92. [https://doi.org/10.1016/0095-8956\(85\)90093-0](https://doi.org/10.1016/0095-8956(85)90093-0)
- [3] Bonato, A. and Nowakowski, R. (2011) The Game of Cops and Robbers on Graphs. American Mathematical Society. <https://doi.org/10.1090/stml/061>
- [4] Baird, W. and Bonato, A. (2012) Meyniel's Conjecture on the Cop Number: A Survey. *Journal of Combinatorics*, **3**, 225-238. <https://doi.org/10.4310/JOC.2012.v3.n2.a6>
- [5] Aigner, M. and Fromme, M. (1984) A Game of Cops and Robbers. *Discrete Applied Mathematics*, **8**, 1-12. [https://doi.org/10.1016/0166-218x\(84\)90073-8](https://doi.org/10.1016/0166-218x(84)90073-8)
- [6] Frankl, P. (1987) Cops and Robbers in Graphs with Large Girth and Cayley Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **17**, 301-305. [https://doi.org/10.1016/0166-218x\(87\)90033-3](https://doi.org/10.1016/0166-218x(87)90033-3)
- [7] Chiniforooshan, E. (2008) A Better Bound for the Cop Number of General Graphs. *Journal of Graph Theory*, **58**, 45-48. <https://doi.org/10.1002/jgt.20291>
- [8] Scott, A. and Sudakov, B. (2011) A Bound for the Cops and Robbers Problem. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **25**, 1438-1442. <https://doi.org/10.1137/100812963>
- [9] Lu, L. and Peng, X. (2012) On Meyniel's Conjecture of the Cop Number. *Journal of Graph Theory*, **71**, 192-205. <https://doi.org/10.1002/jgt.20642>

-
- [10] Prałat, P. (2010) When Does a Random Graph Have Constant Cop Number? *Australasian Journal of Combinatorics*, **46**, 285-296.
- [11] Bollobás, B., Kun, G. and Leader, I. (2013) Cops and Robbers in a Random Graph. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **103**, 226-236. <https://doi.org/10.1016/j.jctb.2012.10.002>
- [12] Bose, P., De Carufel, J.L. and Shermer, T. (1986) Pursuit-Evasion in Graphs: Zombies, Lazy Zombies and a Survivor. *Discrete Mathematics*, **348**, Article ID: 114220. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2024.114220>
- [13] Hahn, G. and MacGillivray, G. (2006) A Note on k -Cop, l -Robber Games on Graphs. *Discrete Mathematics*, **306**, 2492-2497. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2005.12.038>
- [14] Clarke, N. and MacGillivray, G. (2012) Characterizations of k -Copwin Graphs. *Discrete Mathematics*, **312**, 1421-1425. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2012.01.002>
- [15] Fitzpatrick, S.L. and Larkin, J.P. (2017) The Game of Cops and Robber on Circulant Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **225**, 64-73. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2017.03.004>