

变分框架下时滞微分方程周期解的研究进展

黄舒剑

广东工业大学数学与统计学院, 广东广州

收稿日期: 2026年3月14日; 录用日期: 2026年4月10日; 发布日期: 2026年4月22日

摘要

时滞微分方程是生物数学、控制工程、非线性物理等领域刻画含记忆效应动态系统的核心工具, 其周期解存在性与多解性分析是系统稳定性评估的关键问题。受时滞项带来的解空间拓扑复杂、泛函自伴性缺失等限制, 传统常微分方程分析方法难以直接迁移应用, 临界点理论与变分方法为该类问题提供了新的求解框架, 通过将微分方程的解转化为对应能量泛函极值点或鞍点, 实现解的存在性与多解性判定。本文梳理了该理论从常微分系统到时滞微分方程周期解分析领域的技术演化脉络, 总结了核心研究成果。

关键词

临界点理论, 时滞微分方程, 周期解, 变分框架

Research Progress on Periodic Solutions of Delay Differential Equations under Variational Framework

Shujian Huang

School of Mathematics and Statistics, Guangdong University of Technology, Guangzhou
Guangdong

Received: March 14, 2026; accepted: April 10, 2026; published: April 22, 2026

Abstract

Delay differential equations serve as core tools for characterizing dynamic systems with memory effects in fields such as biomathematics, control engineering, and non-linear physics, where the analysis of the existence and multiplicity of periodic solutions is a critical issue for system stability assessment. Restricted by the complex topology of the solution space and the loss of functional self-adjointness caused by delay terms, traditional analysis methods for ordinary differential equations are difficult to directly migrate and apply. Critical point theory and variational methods provide a new solution framework for such problems: by transforming solutions of differential equations into extreme points or saddle points of the corresponding energy functionals, the existence and multiplicity of solutions can be determined. This paper sorts out the technical evolution context of this theory from ordinary differential systems to periodic solution analysis of delay differential equations, and summarizes the core research achievements.

Keywords

Critical Point Theory, Delay Differential Equation, Periodic Solution, Variational Framework

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



1. 引言

时滞微分方程是刻画具有记忆效应动态系统的核心数学工具，其核心特征为系统演化规律依赖于历史状态，能够更精准地描述信号传输延迟、惯性响应、种群增长滞后等实际现象，目前已成为生物数学、控制工程、非线性物理等领域的基础建模工具。周期解作为时滞动力系统的重要动力学行为，对应实际系统中的稳态振动、周期振荡、节律性响应等现象，其存在性、多解性与稳定性分析是评估系统安全性与可靠性的关键问题。

与常微分方程相比，时滞微分方程属于无限维动力系统，其周期解分析面临诸多本质困难：一

是初值条件为函数段而非单点值，导致解空间的拓扑结构更为复杂；二是时滞项的引入会破坏泛函的自伴性与可微性，传统常微分方程的分析方法难以直接迁移应用。经过数十年的发展，学者们已提出特征值分析法、Lyapunov泛函法、中心流形定理、变分方法等多种分析框架。其中变分方法通过将微分方程的解转化为能量泛函的临界点，将定性分析问题转化为泛函的极值问题，具有几何直观性强、适用范围广等优势，尤其在强非线性、非自治时滞系统的周期解存在性证明中展现出独特优势，是近年该领域发展最快的研究方向之一。

2. 常微分方程周期解分析

1978年，P. H. Rabinowitz [1]首次利用临界点理论证明了二阶哈密顿系统周期解的存在性，系统建立了变分方法结合上同调指标理论求解哈密顿系统周期解的通用框架，在两类核心场景下取得突破：在给定能量的情形下，证明了当能量面与单位球面径向同胚且关于原点星形时，必然存在至少一条周期轨道，突破了传统方法对系统凸性的强限制；在给定周期的情形下，针对满足原点附近二次增长、无穷远超线性增长条件的哈密顿量，证明了任意周期下非平凡周期解的存在性，并进一步将结果推广到时变受迫系统、正定二次型扰动系统以及经典力学二阶哈密顿系统等场景。该工作提出的有限维逼近、极小极大临界点构造与对称群指标结合的技术路线，为后续哈密顿系统周期解研究奠定了方法基础，直接推动了Weinstein猜想、多周期轨道计数等一系列核心问题的研究进展，是哈密顿动力系统领域的里程碑式成果。

2003年，Chunlei Tang与Xingping Wu [2]聚焦带负号的次二次二阶周期系统的周期解存在性问题：

$$\begin{cases} -\ddot{u}(t) = \nabla F(t, u(t)) & \text{a.e. } t \in [0, T], \\ u(0) - u(T) = \dot{u}(0) - \dot{u}(T) = 0 \end{cases}$$

基于临界点理论的极小极大方法，突破了传统最小作用原理无法处理此类上下无界能量泛函的局限：在Rabinowitz次二次增长条件基础上，分别在势能全局一致强制、正测度子集局部强制、 γ -次可加、 (β, γ) -次凸等多组宽松假设下，证明了系统周期解的存在性，极大放宽了已有研究对势能凸性、偶性、周期性、全局强制、梯度有界性的限制，为非自治二阶微分系统周期解问题提供了更具普适性的分析框架，其构造的局部强制转一致强制结合次可加函数估计的紧性验证思路，也为同类上下无界变分问题的研究提供了可复用的技术路径。

2007年，Bo Xu、Chunlei Tang [3]将二阶哈密顿系统周期解研究中的次二次增长条件进一步推广至一般常 p -Laplacian系统场景：

$$\begin{cases} -(|u'(t)|^{p-2}u'(t))' = \nabla F(t, u(t)), \\ u(0) - u(T) = u'(0) - u'(T) = 0 \end{cases}$$

针对带周期边界条件的 p -Laplacian边值问题，在势函数满足基本可测可微性、推广的次二次不等式，存在 $0 < \mu < p$ 使得 $|x|$ 足够大时 $(\nabla F(t, x), x) \leq \mu F(t, x)$ 、下方有界且在正测度时间集上关于 x 强制，或满足积分强制与次凸性假设的两类情形下，通过验证能量泛函满足Cerami条件结合鞍点定理，证明了Sobolev空间中周期解的存在性，其结果覆盖了 $p = 2$ 的经典哈密顿系统情形，拓展了 p -Laplacian系统可解性的理论边界，为非线性弹性、非牛顿流体力学等领域的相关建模问题提

供了变分法框架下的存在性依据。

2009年, Shiwang Ma [4]针对常 p -Laplacian系统周期解存在性问题开展研究:

$$(|u'(t)|^{p-2}u'(t))' + \nabla F(t, u(t)) = 0, \quad \text{a.e. } t \in \mathbb{R}$$

突破了经典Ambrosetti-Rabinowitz条件的限制, 基于临界点理论中的极小极大方法与更弱的Cerami紧性条件, 证明了当势函数满足非负性、零点附近超线性增长、无穷远渐近 p 次增长及梯度与势函数的差的极限条件时, 一般 p -Laplacian系统存在无穷多周期趋于无穷的非平凡次调和解; 在 $p = 2$ 的二阶哈密顿系统情形下, 进一步给出了非平凡基本周期解的存在性判据, 其结果首次将渐近二次情形下的多解结论推广到 p -Laplacian系统, 构造的示例表明该结论可覆盖已有结果无法处理的势函数类, 为非线性振动问题、非牛顿流体力学中相关方程的定性分析提供了新的理论工具。

2011年, Xingyong Zhang [5]的研究聚焦于含 p -Laplacian算子的常微分系统周期解存在问题:

$$(|u'(t)|^{p-2}u'(t))' = \nabla F(t, u(t)), \quad \text{a.e. } t \in [0, T]$$

通过临界点理论中的环绕定理, 将 $p = 2$ 时二阶哈密顿系统的周期解存在性条件推广到一般 $p \geq 2$ 的向量 p -Laplacian系统场景: 论文首先在周期Sobolev空间 $W_T^{1,p}$ 上建立了对应系统的变分框架, 证明了所构造的能量泛函满足更弱的 C 紧性条件, 随后验证了泛函在空间直和分解下的环绕几何结构, 最终在势函数非负、原点次 p 增长、无穷远超 p 增长、次临界增长以及Ambrosetti-Rabinowitz型条件的共同约束下, 得到了非常数 T 周期解的存在性结论, 为 p -Laplacian系统的周期解研究提供了新的变分方法思路, 补充了非二阶哈密顿类非线性微分系统周期解的理论结果。

2015年, Chun Li、Ravi P. Agarwal 和Chunlei Tang [6]聚焦常 p -Laplacian系统的周期解多解性问题:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (|\dot{u}(t)|^{p-2}\dot{u}(t)) + \nabla F(t, u(t)) = 0, \\ u(0) - u(T) = 0, \\ \dot{u}(0) - \dot{u}(T) = 0, \end{cases}$$

利用临界点理论中的极小极大方法, 在两类更具一般性的势函数假设下建立了无穷多周期解的存在性定理: 一类是势函数可分解为次凸项与次线性梯度项的组合, 另一类是势函数梯度满足 $p-1$ 次多项式增长约束, 两类情形下均证明系统同时存在泛函值趋于正无穷和负无穷的两列不同周期解, 该结果推广了此前二阶哈密顿系统和 p -Laplacian系统的相关结论, 为非线性振动问题中多周期解的判定提供了更宽松的理论条件。

2022年, Chungen Liu等学者 [7]针对带周期边界条件的变指数 p -Laplacian微分系统开展研究:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (|\dot{u}(t)|^{p(t)-2}\dot{u}(t)) + \nabla F(t, u(t)) = 0, & u \in \mathbb{R}^N, \\ u(0) - u(T) = \dot{u}(0) - \dot{u}(T) = 0, \end{cases}$$

利用临界点理论中的极小极大方法, 在两类非线性条件下证明了无穷多周期解的存在性: 一是当

势函数可分解为 (λ, μ) -次凸项与 p -次线性项的和、且在大范数区域满足振荡性假设时，系统存在两列能量分别趋于正负无穷的不同周期解；二是当势函数梯度满足 p -线性增长约束、且势函数满足对应的振荡条件时，同样得到了无穷多周期解的存在性结果。该工作突破了 p -Laplacian算子非齐次性带来的经典理论应用限制，将常 p -Laplacian系统与经典哈密顿系统的多解结论推广到了变指数情形，为弹性力学等领域的非标准增长动力学模型提供了周期解分析的理论支撑。

3. 时滞微分方程周期解分析

近二十年来，国内张恭庆、丁伟岳、黄先开、李勇、郭志明、庾建设、郭承军等学者在时滞微分方程周期解领域取得了一系列标志性成果，推动该方向的研究体系逐步完善。1994年，黄先开、向子贵教授运用重合度理论讨论了一类带时滞的泛函微分方程的周期解存在性；2003年，刘文斌、李勇教授利用重合度理论研究了高阶Duffing型微分方程周期解的存在性，在一定程度上改进了已有结果。但这一阶段泛函微分方程多解性方面的研究仍相对匮乏。

直到2005年，Zhiming Guo 和Jianshe Yu [8]首次将临界点理论和变分方法应用于高维时滞微分方程组周期解研究，分析对象为一类一阶泛函微分方程：

$$x'(t) = -f(x(t-r)), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad r > 0,$$

突破了此前变分方法仅能处理标量时滞方程、且需转化为耦合常微分哈密顿系统的局限。该研究针对该 n 维时滞系统，通过在满足反对称平移条件的Sobolev子空间上构造包含时滞项的能量泛函，结合 Z_2 几何指标与Benci伪指标理论，在非线性项为奇函数、渐近线性且满足非共振条件的假设下，给出了系统非平凡 $4r$ 周期解个数的下界估计，其结果与标量情形下的经典Kaplan-Yorke定理完全兼容，为高维时滞系统的周期振荡分析提供了新的变分法框架。

2009年，Chengjun Guo 和Zhiming Guo [9]进一步将临界点理论与 S^1 指标理论直接应用于二阶时滞微分方程的多周期解研究，分析对象为：

$$x''(t) = -f(x(t-\tau)),$$

突破了传统研究需将时滞方程转化为哈密顿系统的限制；该工作通过构造含时滞项的变分泛函，结合渐近线性假设下的算子谱分析，分别给出了无穷远共振(次二次/超二次)和非共振场景下 2τ 非平凡周期解的存在性判据，其解的个数下界可通过渐近极限矩阵 A_0 和 A_∞ 的特征值指标差 ρ 直接计算，为二阶时滞系统周期解的研究提供了全新的变分法框架，拓展了临界点理论在泛函微分方程领域的应用边界。

2024年，Xinjie Ye 与Chengjun Guo等人 [10]针对带时滞的二阶 p -Laplacian系统周期解存在性问题开展了系统性工作：

$$\begin{cases} -(|z'(t)|^{p-2}z'(t))' = f(t, z(t+\tau), z(t), z(t-\tau)), \\ z(\tau) - z(-\tau) = z'(\tau) - z'(-\tau) = 0, \end{cases}$$

该研究突破了传统 p -Laplacian系统研究中无时滞假设的限制, 针对同时包含超前项与滞后项的混合泛函微分方程, 构建了适配时滞特性的 2τ 周期解变分框架, 将临界点理论中的鞍点定理与环绕定理拓展应用到时滞微分方程场景, 分别在次二次、广义次二次、超二次等多种非线性增长条件下得到了5组周期解存在性判据, 并给出了对应算例验证结论的有效性, 填补了带时滞 p -Laplacian系统周期解研究的领域空白, 其结果可直接为晶格动力系统、时滞最优控制、经济周期模型等领域的周期行为分析提供理论支撑。

4. 存在的问题及展望

尽管临界点理论在时滞微分方程领域已经取得了丰富的研究成果, 但仍存在若干待解决的问题: 一是高维非线性时滞系统的变分结构构建仍然存在困难, 现有成果大多集中在低维系统或具有特殊结构的系统; 二是针对带有时变时滞、状态依赖时滞的系统, 目前还没有通用的变分框架构建方法; 三是通过临界点理论得到的解的定性性质分析仍不足, 难以将理论结果与实际工程应用结合。

未来研究可从以下方向展开: 一是结合拓扑度理论、分支分析方法, 拓展临界点理论在复杂时滞系统中的应用范围; 二是针对具体工程领域的时滞系统, 构建对应的专用变分框架, 实现理论结果的落地应用; 三是探索数值计算方法与临界点理论的结合, 实现解的数值求解与定性分析的融合。

参考文献

- [1] Rabinowitz, P.H. (1978) Periodic Solutions of Hamiltonian Systems. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **31**, 157-184. <https://doi.org/10.1002/cpa.3160310203>
- [2] Tang, C. and Wu, X. (2003) Notes on Periodic Solutions of Subquadratic Second Order Systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **285**, 8-16. [https://doi.org/10.1016/s0022-247x\(02\)00417-1](https://doi.org/10.1016/s0022-247x(02)00417-1)
- [3] Xu, B. and Tang, C. (2007) Some Existence Results on Periodic Solutions of Ordinary p -Laplacian Systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **333**, 1228-1236. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.11.051>
- [4] Ma, S. and Zhang, Y. (2009) Existence of Infinitely Many Periodic Solutions for Ordinary p -Laplacian Systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **351**, 469-479. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.10.027>
- [5] Zhang, X. and Zhou, P. (2011) An Existence Result on Periodic Solutions of an Ordinary p -Laplacian System. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **34**, 127-135.
- [6] Li, C., Agarwal, R.P. and Tang, C. (2015) Infinitely Many Periodic Solutions for Ordinary p -Laplacian Systems. *Advances in Nonlinear Analysis*, **4**, 251-261. <https://doi.org/10.1515/anona-2014-0048>

- [7] Liu, C. and Zhong, Y. (2022) Infinitely Many Periodic Solutions for Ordinary $p(t)$ -Laplacian Differential Systems. *Electronic Research Archive*, **30**, 1653-1667.
<https://doi.org/10.3934/era.2022083>
- [8] Guo, Z. and Yu, J. (2005) Multiplicity Results for Periodic Solutions to Delay Differential Equations via Critical Point Theory. *Journal of Differential Equations*, **218**, 15-35.
<https://doi.org/10.1016/j.jde.2005.08.007>
- [9] Guo, C. and Guo, Z. (2009) Existence of Multiple Periodic Solutions for a Class of Second-Order Delay Differential Equations. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **10**, 3285-3297. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2008.10.023>
- [10] Guo, C., Ye, X. and Liu, J. (2024) Existence of Periodic Solutions for a Class of p -Laplacian Systems with Delay. *Mediterranean Journal of Mathematics*, **21**, Article No. 86.
<https://doi.org/10.1007/s00009-024-02629-w>