

二维环面上能量次临界非线性薛定谔方程低正则整体适定性研究

刘大洲

重庆师范大学重庆国家应用数学中心, 重庆

收稿日期: 2026年3月20日; 录用日期: 2026年4月22日; 发布日期: 2026年4月30日

摘要

本文研究二维环面 \mathbb{T}^2 上能量次临界非线性薛定谔方程(NLS)的低正则整体适定性问题。考虑初值问题 $(i\partial_t + \Delta)u = |u|^{2k}u$ (其中 $k \geq 1$, 非线性项为 $2k + 1$ 次幂), 初值 $u_0 \in H^s(\mathbb{T}^2)$ 。利用I方法构造修正能量, 结合Littlewood-Paley投影、双线性Strichartz估计及几乎守恒律技巧, 建立方程解的长时间行为估计。本文的主要结论为: 对任意 $k \geq 1$, 当正则性指标 $s > 1 - \frac{2}{5k}$ 时, 该初值问题在 $H^s(\mathbb{T}^2)$ 空间中整体适定。该结果将I方法在周期NLS方程中的应用推广到一般能量次临界幂次情形, 补充了二维环面背景下低正则整体适定性的理论成果。

关键词

非线性薛定谔方程, 二维环面, 整体适定性, 低正则, I方法, 几乎守恒律

Low-Regularity Global Well-Posedness of the Energy-Subcritical Nonlinear Schrödinger Equation on the 2D Torus

Dazhou Liu

National Center for Applied Mathematics in Chongqing, Chongqing Normal University, Chongqing

Received: March 20, 2026; accepted: April 22, 2026; published: April 30, 2026

Abstract

This paper investigates the low-regularity global well-posedness of the energy-subcritical nonlinear Schrödinger equation (NLS) on the two-dimensional torus \mathbb{T}^2 . We consider the initial-value problem $(i\partial_t + \Delta)u = |u|^{2k}u$, where $k \geq 1$ and the nonlinearity is of order $2k + 1$, with initial data $u_0 \in H^s(\mathbb{T}^2)$. By constructing a modified energy via the I-method, combined with Littlewood-Paley projections, bilinear Strichartz estimates, and almost conservation laws, we establish estimates for the long-time behavior of solutions to the equation. The main result of this paper is as follows: for any integer $k \geq 1$, the initial-value problem is globally well-posed in $H^s(\mathbb{T}^2)$ whenever the regularity index satisfies $s > 1 - \frac{2}{5k}$. This result extends the application of the I-method to the general energy-subcritical power-type nonlinearity for periodic NLS equations, and complements the existing theory on low-regularity global well-posedness on the two-dimensional torus.

Keywords

Nonlinear Schrödinger Equation, Two-Dimensional Torus, Global Well-Posedness, Low Regularity, I-Method, Almost Conservation Law

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



1. 绪论

1.1. 研究的问题

本文主要考虑二维环面上非线性能量次临界情形的薛定谔方程解的整体适定性问题,即如下初值问题

$$(i\partial_t + \Delta)u = |u|^{2k}u, \quad u(0) = u_0 \in H^s(\mathbb{T}^2). \quad (1.1)$$

1.2. 研究背景

非线性薛定谔方程(Nonlinear Schrödinger equation, NLS)是非线性色散方程中最经典、最核心的模型之一.其基本形式可写为

$$i\partial_t u + \Delta u = \mu|u|^{p-1}u,$$

其中 $u = u(t, x)$ 为复值波函数, Δ 为Laplace算子, $\mu = \pm 1$ 分别对应散焦与聚焦情形.该方程既是非线性波传播的重要数学模型,也是连接调和分析、动力系统、哈密顿系统与数学物理的重要桥梁.

从物理建模角度看,NLS之所以重要,在于它同时刻画了色散效应与非线性相互作用的竞争机制:线性部分 $i\partial_t u + \Delta u$ 反映波的扩散与振荡,非线性项 $|u|^{p-1}u$ 则反映介质响应、自相位调制或粒子相互作用等非线性机制.不同非线性幂次会对应不同强度、不同临界性的动力学行为,因此围绕幂次、维数、边界条件与初值正则性所展开的适定性研究,实质上是在回答:给定粗糙度的初始数据,模型是否仍然具有可预测性、唯一性与长期演化稳定性.

从数学角度看,研究NLS的一个核心任务是建立其初值问题的适定性理论,即讨论解的存在性、唯一性以及初值的连续依赖.Bourgain在关于周期性非线性演化方程的奠基性工作中明确把“well-posedness”界定为:在合适函数空间中,解应当存在、唯一并保持相应正则性;这正是数学上保证模型“可用”的基本前提.对NLS而言,若连初值问题都不适定,则模型对初始误差极端敏感,既不能可靠刻画物理过程,也难以进一步研究其长期动力学、守恒律、稳定性与高频能量传递等问题.

对NLS而言,局部适定性通常可以借助不动点方法和Bourgain空间来建立;但从局部到整体并非自动成立.若初值属于能量空间 H^1 ,则往往可利用质量守恒与能量守恒延拓局部解,从而得到全局解.然而,当初值仅属于 $H^s, s < 1$ 时,经典能量泛函通常不再直接适用,于是“无限能量初值”的整体理论成为困难所在.De Silva等人明确指出:对 $s \geq 1$ 可由能量守恒得到整体适定,但将整体理论推广到 $s < 1$ 的无限能量初值,是一个更为微妙的问题.

这正是低正则性整体适定性研究的动机所在.它并不是单纯追求“把 s 写得更小”,而是在问:

1. 对多粗糙的初值,方程仍能保持长期可解?
2. 方程的守恒结构能否在低于能量空间的层级上被“近似延续”?
3. 在周期边界和弱色散背景下,哪些频率相互作用会阻碍全局理论?

这些问题既具有物理解释——粗糙初值可理解为信息不完整、含高频噪声的初始态——也具有纯数学意义,因为它们揭示了色散、共振、频率耦合与守恒结构之间的深层关系.

为了突破能量空间 H^1 的限制,Colliander、Keel、Staffilani、Takaoka与Tao提出了著名的I方法.这一方法最早系统性地出现在他们2001年关于导数型薛定谔方程的工作[1]中:作者指出,I方法的核心思想是通过一个频率乘子算子 I 把 H^s 中的粗糙解“提升”到接近 H^1 的层级,从而构造一个修正能量,该能量虽然不再严格守恒,但具有“几乎守恒”的性质,可用于迭代延拓解.

随后,I团队(Colliander, Keel, Staffilani等学者)在2002年关于Cubic defocusing NLS的论文[2]中进一步发展了这一思想,明确提出通过建立“Almost conservation law”来获得粗糙解的整体适定性:他们证明了 $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ 上三次散焦NLS在 H^s 中的全局结论,其中二维欧式空间情形可达

到 $s > 4/7$. 这一工作标志着 I 方法成为低正则性整体适定性研究的标准工具之一.

I 方法之所以影响深远,在于它提供了一条清晰的技术路线:

- 先通过局部适定性获得短时间解;
- 再对修正能量 $E(Iu)$ 建立增量估计;
- 证明每个短时间区间内修正能量只增加很小一部分;
- 最后通过迭代把局部解拼接成全局解.

对于周期情形,这一策略尤其重要,因为 I 方法可以把“守恒律不够用”的问题转化为“修正能量增量足够小”的问题. De Silva 等人在二维周期 NLS 的研究 [3] 中就明确说明,他们的方法正是将 I 方法调整到周期背景下,并结合缩放与数论型计数技巧来弥补 refined Strichartz 估计不足的问题.

聚焦到本文所讨论的二维环面问题,则其发展脉络大体可以分为以下几个阶段. 1993 年 Bourgain 在文献 [4] 通过离散 Fourier restriction 与 $X^{s,b}$ 空间方法,建立了周期性薛定谔方程的一整套调和框架. 对于二维环面上的三次 NLS, 后续文献普遍将局部适定性的起点追溯到 Bourgain: 在 $H^s(\mathbb{T}^2)$, $s > 0$ 中可以建立局部理论. 对于二维环面上的质量临界情形(三次 NLS), 2006/2007 年 De Silva–Pavlović–Staffilani–Tzirakis 在文献 [3] 把整体适定性推进到 $s > \frac{2}{3}$. 他们所研究的是 L^2 -critical semilinear Schrödinger equation with periodic boundary data, 并明确指出二维结果确认了 Bourgain 的一个说法: 其主要工具正是 I 方法与 rescaled torus 上 refined Strichartz 的处理. 2018 年, Fan–Staffilani–Wang–Wilson 在文献 [5] 证明了二维无理环面上的双线性 Strichartz 估计, 并以此得到 cubic defocusing NLS 在二维无理环面上的低正则整体适定结果. 2024 年, Herr–Kwak 在文献 [6] 证明了二维有理环面上薛定谔方程的最优 L^4 -Strichartz 估计, 并得到三次质量临界 NLS 在 $s > 0$ 下、对小临界范数数据的整体存在. 该工作显著改进了 Bourgain 的相关估计. 更进一步, 2025 年 Herr–Kwak 在文献 [7] 证明了二维环面上三次 NLS 的临界整体适定性: 在散焦情形下, 对任意大小的周期初值都可在质量临界维数 $d = 2$ 上获得整体适定; 在聚焦情形下, 只需质量低于基态阈值. 其核心新工具是 inverse Strichartz inequality, 并借助 incidence geometry 与 additive combinatorics, 将 Euclidean mass-critical 理论转移到了周期背景.

1.3. 主要工作

本文以二维环面上非齐次能量次临界情形的薛定谔方程为研究对象, 以 I 方法为核心工具, 结合调和与分析、泛函分析相关理论, 围绕方程解的整体适定性问题开展系统性研究, 通过分阶段的理论推导与证明, 逐步实现从基础理论铺垫到核心结论论证的研究目标, 各章节核心工作如下: 本文第三章通过 I 方法构造修正能量泛函, 结合傅里叶变换、帕塞瓦尔公式将修正能量的时间增量拆分为积分项并进行精细的频率分情形讨论, 同时利用中值定理、赫尔德不等式、Littlewood–Paley 投影算子的性质及双线性估计引理, 对不同频率范围下的积分项进行逐类估计, 最终建立了二维环面缩放空间下方程解的修正能量几乎守恒律, 证明了修正能量的时间变化量可被随频率参数 N 指数衰减的量控制, 为解的时间延拓提供了关键的能量估计依据. 本文第四章通过杜哈梅尔公式将 I-初值问题的解分解为线性部分与非线性部分, 结合 Bourgain 空间的范数估计、莱布尼兹法则及非线性项的时空积分估计, 采用标准自举法证明了 I-初值问题的局部适定性; 并通过对原方程进行尺度变换, 将原空

间的初值问题转化为二维环面缩放空间下的问题,利用I算子的正则性提升性质选取合适的缩放参数,结合第三章建立的几乎守恒律将局部解进行连续延拓,最终建立了二维环面上非线性能量次临界情形薛定谔方程解的整体适定性结论,证明了定理1.1,即当 $s > 1 - \frac{2}{5k}$ 时,方程在 $H^s(\mathbb{T}^2)$ 空间中存在唯一且对初值连续依赖的整体解.

Theorem 1.1. 对任意的 $k \geq 1$, 初值问题(1.1)在空间 $H^s(\mathbb{T}^2)$ 中,当 $s > 1 - \frac{2}{5k}$ 时,具有整体适定性.

2. 预备知识

2.1. 符号说明

用记号 $A \lesssim B$ 表示存在常数 C 使得 $A \leq CB$. 当 $A \lesssim B \lesssim A$ 时,记为 $A \simeq B$. 特别地,用 $A \lesssim_u B$ 表示存在依赖于 u 的常数 $C(u)$,使得 $A \leq C(u)B$.

2.2. 定义

记 $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \alpha_1 \in [\frac{1}{2}, 1], \lambda \geq 1$. 定义

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_\lambda^2 &= (\lambda\mathbb{T}) \times (\lambda\alpha_1\mathbb{T}) \\ \mathbb{Z}_{1/\lambda}^2 &= \frac{1}{\lambda} \left(\mathbb{Z} \times \frac{1}{\alpha_1} \mathbb{Z} \right). \end{aligned} \quad (2.1)$$

本文中始终假设 $\alpha_1 = 1$ (即二维环面各方向缩放系数一致). 定义时空范数

$$\|u\|_{L_t^p L_x^q(I_t \times \mathbb{T}^2)} = \left(\int_{I_t} \left(\int_{\mathbb{T}^2} |u(t, z)|^q dz \right)^{\frac{p}{q}} dt \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.2)$$

类似地,可以定义由三个 L^p 型范数构成的复合范数,例如 $L_t^p L_x^q L_y^2$.

此外,引入傅里叶变换与Littlewood-Paley理论. 在 \mathbb{T}^2 上定义傅里叶变换如下:

$$\hat{f}(\xi) = (\mathcal{F}f)(\xi) = \int_{\mathbb{T}^2} f(z) e^{-iz \cdot \xi} dz, \quad (2.3)$$

其中 $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{Z}^2$. 同时给出傅里叶逆变换公式

$$f(z) = c \sum_{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{Z}^2} (\mathcal{F}f)(\xi) e^{iz \cdot \xi}, \quad (2.4)$$

其中 $c = 1$. 下面定义Littlewood-Paley投影算子. 首先取定 $\eta_1 : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ 为光滑偶函数,满足

$$\eta_1(\xi) = \begin{cases} 1, & |\xi| \leq 1, \\ 0, & |\xi| \geq 2, \end{cases} \quad (2.5)$$

并记 $N = 2^j$ 为二进整数. 令 $\eta^2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$, 满足 $\eta^2(\xi) = \eta_1(\xi_1)\eta_1(\xi_2)$. 定义 Littlewood-Paley 投影算子 $P_{\leq N}$ 与 P_N 为

$$\mathcal{F}(P_{\leq N}f)(\xi) := \eta^2\left(\frac{\xi}{N}\right)\mathcal{F}(f)(\xi), \quad \xi \in \mathbb{Z}^2, \tag{2.6}$$

以及

$$P_N f = P_{\leq N} f - P_{\leq \frac{N}{2}} f. \tag{2.7}$$

对任意 $a \in (0, \infty)$, 定义

$$P_{\leq a} := \sum_{N \leq a} P_N, \quad P_{>a} := \sum_{N > a} P_N. \tag{2.8}$$

进一步, 定义薛定谔传播子 $e^{it\Delta}$ 为

$$(\mathcal{F}e^{it\Delta}f)(\xi) = e^{-it|\xi|^2}(\mathcal{F}f)(\xi). \tag{2.9}$$

类似地, 对于更一般的算子 $e^{it\phi(\nabla/i)}$, 有

$$(\mathcal{F}e^{it\phi(\nabla/i)}f)(\xi) = e^{-it\phi(\xi)}(\mathcal{F}f)(\xi), \tag{2.10}$$

并用 $U_\lambda(t)$ 表示缩放后的线性薛定谔方程的解算子,

$$(i\partial_t + \Delta_{\mathbb{T}_\lambda^2})u(t, z) = 0, \quad \text{其中 } z \in \mathbb{T}_\lambda^2,$$

等价地,

$$U_\lambda(t)u_0(z) = \int e^{2\pi i k \cdot z - (2\pi k)^2 it} \mathcal{F}(u_0)(k)(dk)_\lambda,$$

其中 $\mathbb{T}_\lambda^2 = [0, \lambda] \times [0, \lambda]$, $(dk)_\lambda$ 是对应于缩放傅里叶空间 $(\frac{1}{\lambda}\mathbb{Z})^2$ 的测度:

$$\int a(k)(dk)_\lambda := \frac{1}{\lambda^2} \sum_{(k_1, k_2) \in (\frac{1}{\lambda}\mathbb{Z})^2} a(k).$$

记 Bourgain 空间为 $X^{s,b} = X^{s,b}(\mathbb{T}_\lambda^2 \times \mathbb{R})$, 该空间是速降函数空间 $\mathcal{S}(\mathbb{T}_\lambda^2 \times \mathbb{R})$ 关于下述范数的完备化空间(参见文献 [8]):

$$\|u\|_{X^{s,b}} = \|U_\lambda(-t)u\|_{H_x^s H_t^b} = \left\| \langle k \rangle^s \langle \tau + 4\pi^2 k^2 \rangle^b \tilde{u}(k, \tau) \right\|_{L_\tau^2 L_{(dk)_\lambda}^2},$$

其中 $\tilde{u}(k, \tau)$ 表示时空傅里叶变换. 上述 Bourgain 空间 $X^{s,b}$ 的定义, 本质上是为了适配色散方程(如本文研究的 NLS 方程)的解的时空行为而构造的“时空混合范数空间”. 与传统的 Sobolev 空间仅刻画空间正则性不同, Bourgain 空间通过引入时间方向的正则性指标 b , 将解的时间演化特性与空间正则性结合起来, 能够更精确地捕捉色散方程解的波动规律. 其核心思想是利用傅里叶变换将方程转化到频率空间, 通过对时空频率的加权估计, 控制解在不同频率段的增长速度, 从而为双线性估计、能量估计等关键步骤提供合适的范数框架, 这也是处理低正则色散方程的核心工具之一.

设 $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 为非负函数, 满足 $\text{supp}(\phi) \subset [-1, 1]$, ϕ 在 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 上恒等于 1, $\widehat{\phi}$ 在 \mathbb{R} 上非负且在 $[-1, 1]$ 上满足 $\widehat{\phi} \geq 1$. 这样的函数 ϕ 是存在的 (参见文献 [9]). 记 $\phi_0 = \phi$, 对 $N \in 2^{\mathbb{N}}$, 令 $\phi_N = \phi(\frac{\cdot}{2N}) - \phi(\frac{\cdot}{N})$. 定义

$$\widehat{P_N f}(\xi) = \phi_N(|\xi|)\widehat{f}(\xi).$$

定义函数 $u \in H^s$ 的修正能量为

$$E^1(u) := E(Iu)$$

其中

$$E(u)(t) = \frac{1}{2} \int |\nabla u(t)|^2 dx + \frac{1}{2k+2} \int |u(t)|^{2k+2} dx.$$

I方法是建立定理的核心工具, 是由I团队(I-team)提出, 具体可参考文献 [1, 2]. 首先回顾I-算子 设 $s < 1$ 和待定参数 $N \gg 1$, 定义乘子 $m(\xi)$, 其中 $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{Z}_{\frac{1}{\lambda}} \times \mathbb{Z}_{\frac{1}{\lambda}}$,

$$m(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{if } |\xi| < N, \\ \left(\frac{|\xi|}{N}\right)^{s-1}, & \text{if } |\xi| > 2N. \end{cases} \quad (2.11)$$

定义算子 $I: H^s \rightarrow H^1$ 为乘子算子:

$$(\widehat{Iu})(\xi) = m(\xi)\widehat{u}(\xi).$$

该算子是 $1-s$ 阶光滑化算子, 将 H^s 空间中的函数提升到 H^1 空间. 即:

$$\|u\|_{X^{s_0, b_0}} \lesssim \|Iu\|_{X^{s_0+1-s, b_0}} \lesssim N^{1-s} \|u\|_{X^{s_0, b_0}} \quad (2.12)$$

对任意 $s_0, b_0 \in \mathbb{R}$ 成立. I算子的定义看似复杂, 但其核心功能是“修正能量”以克服低正则空间中经典能量不守恒的问题. 在低正则情形下, 方程的经典能量(如 H^1 能量)不再具有良好的守恒性, 无法直接用于控制解的长时间行为. 而I算子通过对高频分量进行“平滑化”处理(即通过频率权重函数 $\mathcal{U}(\xi)$ 抑制高频项的贡献), 构造出一个修正能量, 该修正能量在时间演化过程中具有近似守恒性(即几乎守恒律). 通俗而言, I算子相当于为低正则的解“穿上一层光滑的外壳”, 使得我们能够利用能量方法的思想, 通过控制修正能量的增长, 间接实现对原方程解的全局控制, 这也是I方法应用的核心精髓.

2.3. 估计

由文献 [3]中的命题4.6, 并结合专著 [10]中标准Transference argument, 可以获得如下引理

Lemma 2.1. $\lambda \gg 1, N_1 \geq N_2 \geq 1$, 有

$$\|P_{N_1} \phi_1 P_{N_2} \phi_2\|_{L^2_t L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2_\lambda)} \lesssim \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{N_2}{N_1}\right)^{\frac{1}{2}} \|P_{N_1} \phi_1\|_{X^{0, 1/2+}(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2_\lambda)} \|P_{N_2} \phi_2\|_{X^{0, 1/2+}(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2_\lambda)}.$$

Lemma 2.2. 若 u 是初值问题 1.1 的一个解, 则有如下估计

$$\|u\|_{L_t^p L^p(\mathbb{R} \times \mathbb{T}_\lambda^2)} \lesssim \lambda^{0+} \|u\|_{X^{\alpha(p), 1/2+}(\mathbb{R} \times \mathbb{T}_\lambda^2)}, \tag{2.13}$$

其中, 当 $4 < p \leq \infty$ 时, $\alpha(p) = \left(1 - \frac{4}{p}\right) +$. 特别的, 当 $p = 4$ 时, $\alpha(p) = 0$.

证明. Takaoka-Tzvetkov 在文献 [11] 中证明, 在 \mathbb{T}^2 上, 有

$$\|u\|_{L_{t,x,y}^4(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2)} \lesssim \|u\|_{X^{0, \frac{1}{2}+}(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2)}.$$

对 u 用缩放变换, 则空间变为 \mathbb{T}_λ^2 , 相应估计变为

$$\|u\|_{L_{t,x,y}^4(\mathbb{R} \times \mathbb{T}_\lambda^2)} \lesssim \lambda^{0+} \|u\|_{X^{0, \frac{1}{2}+}(\mathbb{R} \times \mathbb{T}_\lambda^2)}.$$

并且, 还有

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_t^\infty L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T}_\lambda^2)} &= \|U_\lambda(t)U_\lambda(-t)u\|_{L_t^\infty L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T}_\lambda^2)} \\ &\lesssim \|U_\lambda(-t)u\|_{L_t^\infty L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T}_\lambda^2)} \\ &\lesssim \|u\|_{X^{0, 1/2+}(\mathbb{R} \times \mathbb{T}_\lambda^2)}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

利用索伯列夫嵌入, 得

$$\|u\|_{L_t^\infty L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{T}_\lambda^2)} \lesssim \|u\|_{X^{1+, 1/2+}(\mathbb{R} \times \mathbb{T}_\lambda^2)}.$$

最后, 利用差值, 即可得到所需. □

3. 几乎守恒律

本小节旨在利用 I 方法建立几乎守恒律.

3.1. 主要结论

以下命题表示方程 (1.1) 解的修正能量在时间上是几乎守恒的.

Proposition 3.1. 设 $s > 1 - \frac{1}{2k}, t > 0, \lambda \sim N^{\alpha(s)}, N \gg 1$, 待定 $\alpha(s) > 0$, 给定 $u_0 \in H^s(\mathbb{T}_\lambda \times \mathbb{T}_\lambda)$. 若 u 是方程 (1.1) 的一个解, 则

$$|E^1(u)(t) - E^1(u)(0)| \lesssim \frac{1}{N^{\frac{\alpha(s)}{2}+1}} [\|Iu\|_{X^{1, 1/2+}}^{2k+2} + \|Iu\|_{X^{1, 1/2+}}^{4k+2}].$$

在进入具体的技术推导之前, 先简要说明本文所采用的核心技术策略. 由于二维环面 \mathbb{T}^2 上的周期边界条件会导致频率相互作用的复杂性, 且低正则空间 $H^s(\mathbb{T}^2)$ 中解的光滑性不足, 直接应用经典能量方法难以获得整体适定性结果. 因此, 本文将通过频率分解技术分离高低频分量,

避免高频项带来的奇性影响；借助尺度变换将方程归一化，简化非线性项的估计难度，为后续的Strichartz 估计、几乎守恒律等技巧的应用奠定基础。这些技术步骤的核心目的是克服低正则性和周期背景带来的双重困难，实现解的长时间行为控制。

3.2. 证明

证明. 由能量 E 的定义以及方程(1.1), 有

$$\begin{aligned} \partial_t E(Iu)(t) &= \operatorname{Re} \int_{\mathbb{T}_\lambda \times \mathbb{T}_\lambda} \overline{I(u)}_t (|Iu|^{2k} Iu - \Delta Iu - iIu_t) \\ &= \operatorname{Re} \int_{\mathbb{T}_\lambda \times \mathbb{T}_\lambda} \overline{I(u)}_t (|Iu|^{2k} Iu - I(|u|^{2k} u)). \end{aligned} \tag{3.1}$$

对时间积分并利用帕塞瓦尔公式(Parseval's formula), 得

$$\begin{aligned} &E^1(u)(t) - E^1(u)(0) \\ &= \int_0^t \int_{\Gamma_{2k+2}} \left(1 - \frac{m(\xi_2 + \xi_3 + \dots + \xi_{2k+2})}{m(\xi_2) m(\xi_3) \dots m(\xi_{2k+2})}\right) \widehat{I\partial_t u}(\xi_1) \widehat{Iu}(\xi_2) \widehat{Iu}(\xi_3) \dots \widehat{Iu}(\xi_{2k+2}), \end{aligned}$$

其中 $\Gamma_{2k+2} := \{(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{2k+2}) \in (\mathbb{Z}_{\frac{1}{\lambda}} \times \mathbb{Z}_{\frac{1}{\lambda}})^{2k+2} : \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{2k+2} = 0\}$. 结合方程(1.1), 令

$$E^1(u)(t) - E^1(u)(0) =: \operatorname{Tr}_1 + \operatorname{Tr}_2,$$

其中

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}_1 &:= \int_0^t \int_{\Gamma_{2k+2}} \left(1 - \frac{m(\xi_2 + \xi_3 + \dots + \xi_{2k+2})}{m(\xi_2) m(\xi_3) \dots m(\xi_{2k+2})}\right) \widehat{\Delta Iu}(\xi_1) \widehat{Iu}(\xi_2) \widehat{Iu}(\xi_3) \dots \widehat{Iu}(\xi_{2k+2}), \\ \operatorname{Tr}_2 &:= \int_0^t \int_{\Gamma_{2k+2}} \left(1 - \frac{m(\xi_2 + \xi_3 + \dots + \xi_{2k+2})}{m(\xi_2) m(\xi_3) \dots m(\xi_{2k+2})}\right) I(|u|^{2k} \bar{u})(\xi_1) \widehat{Iu}(\xi_2) \widehat{Iu}(\xi_3) \dots \widehat{Iu}(\xi_{2k+2}). \end{aligned}$$

目标是证明

$$|\operatorname{Tr}_1| + |\operatorname{Tr}_2| \lesssim \frac{1}{N^{\frac{\alpha(s)}{2}+1}} \tag{3.2}$$

其中 $C = C(\|Iu\|_{X^{1, \frac{1}{2}+}})$. 以下忽略共轭符号(不影响估计结果)

首先估计 Tr_1 . 注意到,

$$\|\Delta(Iu)\|_{X^{-1, 1/2+}} \leq \|Iu\|_{X^{1, 1/2+}},$$

因此, 若能证明对任意函数 ϕ_i (其正空间傅立叶变换支集满足 $\langle \xi_i \rangle \sim 2^{l_i} \equiv N_i, l_i \in \{0, 1, \dots\}, i = 1, \dots, 2k+2$) 有

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^t \int_{\Gamma_{2k+2}} \left(1 - \frac{m(\xi_2 + \xi_3 + \dots + \xi_{2k+2})}{m(\xi_2) m(\xi_3) \dots m(\xi_{2k+2})}\right) \widehat{\phi}_1(\xi_1) \widehat{\phi}_2(\xi_2) \widehat{\phi}_3(\xi_3) \dots \widehat{\phi}_{2k+2}(\xi_{2k+2}) \right| \\ &\lesssim \frac{1}{N^{\frac{\alpha(s)}{2}+1}} (N_1 N_2 N_3 \dots N_{2k+2})^{0-} \|\phi_1\|_{X^{-1, 1/2+}} \prod_{i=2}^{2k+2} \|\phi_i\|_{X^{1, 1/2+}}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

则对频率 $N_1, N_2, \dots, N_{2k+2}$ 求和即可得到 Tr_1 的估计.

由乘子的对称性,不妨假设

$$N_2 \geq N_3 \geq \dots \geq N_{2k+2}.$$

对比指标 N ,分四种情形讨论

情形1. 当 $N \gg N_2$. $m(\xi)$ 时.

由(2.11)式中 $m(\xi)$ 的定义,可见 Tr_1 恒为0,故所需估计显然成立.

情形2. 当 $N_2 \gtrsim N \gg N_3 \geq \dots \geq N_{2k+2}$ 时.

由 Γ_{2k+2} 的定义, 以及 $N_1 \sim N_2$. 由I-算子乘子 $m(\xi)$ 定义可知其光滑可微, 故对 ξ_2 利用中值定理,得

$$\begin{aligned} & \left| 1 - \frac{m(\xi_2 + \xi_3 + \dots + \xi_{2k+2})}{m(\xi_2)} \right| \\ &= \left| \frac{m(\xi_2) - m(\xi_2 + \xi_3 + \dots + \xi_{2k+2})}{m(\xi_2)} \right| \\ &\lesssim \left| \frac{\nabla m(\xi_2)}{m(\xi_2)} \right| N_3 \\ &\sim \frac{N_3}{N_2}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

结合赫尔德不等式、引理2.1和帕塞瓦尔定理,得

$$\begin{aligned} |\text{Tr}_1| &\lesssim \frac{N_3}{N_2} \|\phi_1 \phi_3\|_{L^2_{t,x,y}} \|\phi_2 \phi_4\|_{L^2_{t,x,y}} \prod_{j=5}^{2k+2} \|\phi_j\|_{L^\infty L^\infty} \\ &\lesssim \frac{N_3}{N_2} \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{N_3}{N_1} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{N_4}{N_2} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{i=1}^4 \|\phi_i\|_{X^{0,1/2+}} \prod_{j=5}^{2k+2} \|\phi_j\|_{L^\infty L^\infty} \end{aligned}$$

利用伯恩斯坦不等式、(2.14)式和乘子定理, 有

$$\|\phi_j\|_{L^\infty L^\infty} \lesssim N_j \|\phi_j\|_{L^\infty L^2} \lesssim \|\phi_j\|_{X^{1,1/2+}},$$

继续使用乘子定理,我们有

$$|\text{Tr}_1| \lesssim \frac{N_3}{N_2} \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{N_3}{N_1} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{N_4}{N_2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{N_1}{N_2 N_3 N_4} \|\phi_1\|_{X^{-1,1/2+}} \prod_{i=2}^{2k+2} \|\phi_i\|_{X^{1,1/2+}}. \tag{3.5}$$

根据 $\frac{1}{\lambda}$ 与 $\frac{N_3}{N_1}, \frac{N_4}{N_2}$ 的大小关系,下面分三种子情形讨论.

情形2a. 当 $\frac{N_4}{N_2} > \frac{1}{\lambda} \sim \frac{1}{N^{\alpha(s)}}$ 时.

此时,有 $N_1 \sim N_2 \gg N_3 \geq N_4$, 进而 $1 \gg \frac{N_3}{N_1} \sim \frac{N_3}{N_2} \geq \frac{N_4}{N_2} > \frac{1}{\lambda}$, 于是在这一子情形下,有

$$\begin{aligned} |\text{Tr}_1| &\lesssim \frac{N_3}{N_2} \left(\frac{N_3}{N_1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{N_4}{N_2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{N_1}{N_2 N_3 N_4} \|\phi_1\|_{X^{-1,1/2+}} \prod_{i=2}^{2k+2} \|\phi_i\|_{X^{1,1/2+}} \\ &\lesssim \frac{1}{N_2^{1+\frac{1}{2}}} \left(\frac{N_3}{N_1}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N_4^{\frac{1}{2}}} \|\phi_1\|_{X^{-1,1/2+}} \prod_{i=2}^{2k+2} \|\phi_i\|_{X^{1,1/2+}}. \end{aligned}$$

其中,因子 $\frac{1}{N_4^{\frac{1}{2}}}$ 可用于对指标 $N_4 \geq N_5 \geq \dots \geq N_{2k+2}$ 的求和;因子 $l\left(\frac{N_3}{N_1}\right)^{\frac{1}{2}}$ 可通过柯西-施瓦茨不等式对 $N_1 \gg N_3$ 求和,即 $\sum_{N_3 \ll N_1} \left(\frac{N_3^{1/4}}{N_1^{1/4}} \|\phi_1\|_{X^{-1,1/2+}}\right) \left(\frac{N_3^{1/4}}{N_1^{1/4}} \|\phi_3\|_{X^{1,1/2+}}\right)$;最后因子 $\frac{1}{N_2^{1+\frac{1}{2}}}$ 用来对 $N_2 \gtrsim N$ 求和.以上, 综合贡献是

$$\frac{1}{N^{1+\frac{1}{2}}}.$$

最后,选取待定的 $\alpha(s)$, 它只需在 $1 - \frac{1}{2k} < s < 1$ 时,满足 $\frac{1}{N^{1+\frac{1}{2}}} < \frac{1}{N^{1+\frac{\alpha(s)}{2}}}$.

情形2b. 当 $\frac{N_4}{N_2} \leq \frac{1}{\lambda} \leq \frac{N_3}{N_2} \sim \frac{N_3}{N_1}$ 时.

根据 $\frac{1}{\lambda} \sim \frac{1}{N^{\alpha(s)}}$, 有

$$\begin{aligned} |\text{Tr}_1| &\lesssim \frac{N_3}{N_2} \left(\frac{N_3}{N_1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{N_1}{N_2 N_3 N_4} \|\phi_1\|_{X^{-1,1/2+}} \prod_{i=2}^{2k+2} \|\phi_i\|_{X^{1,1/2+}} \\ &\lesssim \frac{1}{N^{\alpha(s)/2}} \frac{1}{N_2} \left(\frac{N_3}{N_1}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N_4} \|\phi_1\|_{X^{-1,1/2+}} \prod_{i=2}^{2k+2} \|\phi_i\|_{X^{1,1/2+}} \end{aligned}$$

与情形2a处理方式类似,对所有二进制块求和后,可得其贡献为

$$\frac{1}{N^{1+\frac{\alpha(s)}{2}}}.$$

情形2c. 当 $\frac{N_4}{N_2} \leq \frac{N_3}{N_1} \lesssim \frac{1}{\lambda}$ 时.

由公式(3.5) 以及 $\lambda \sim N^{\alpha(s)}$, 有

$$\begin{aligned} |\text{Tr}_1| &\lesssim \frac{N_3}{N_2} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{N_1}{N_2 N_3 N_4} \|\phi_1\|_{X^{-1,1/2+}} \prod_{i=2}^{2k+2} \|\phi_i\|_{X^{1,1/2+}} \\ &\lesssim \frac{1}{N^{\alpha(s)}} \frac{1}{N_2} \frac{1}{N_4} \|\phi_1\|_{X^{-1,1/2+}} \prod_{i=2}^{2k+2} \|\phi_i\|_{X^{1,1/2+}} \\ &\lesssim \frac{1}{N^{(1+\alpha(s))}} \frac{1}{N_4 N_2^{0+}} \|\phi_1\|_{X^{-1,1/2+}} \prod_{i=2}^{2k+2} \|\phi_i\|_{X^{1,1/2+}}. \end{aligned}$$

其中,因子 $\frac{1}{N_4 N_2^{0+}}$ 可用于对指标所有二进制块求和.

情形3. 当 $N_2 \geq N_3 \gtrsim N \gg N_4 \geq \dots \geq N_{2k+2}$ 时.

对乘子进行估计, 有

$$\begin{aligned} & \left| 1 - \frac{m(\xi_2 + \xi_3 + \cdots + \xi_{2k+2})}{m(\xi_2)m(\xi_3)\cdots m(\xi_{2k+2})} \right| \\ &= \left| 1 - \frac{m(\xi_2 + \xi_3 + \cdots + \xi_{2k+2})}{m(\xi_2)m(\xi_3)} \right| \\ &\lesssim \frac{m(\xi_1)}{m(\xi_2)m(\xi_3)}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

该估计由积分区域 Γ_{2k+2} 的定义可得. 注意到 $m(\xi)|\xi|^\alpha$ 是径向非减函数, 且对 $\alpha \geq \frac{1}{2k} > 1 - s, |\xi| \gtrsim N$, 有

$$\frac{1}{m(\xi)|\xi|^\alpha} \lesssim N^{-\alpha} \tag{3.7}$$

利用帕塞瓦尔定理、赫尔德不等式、引理2.1、伯恩斯坦估计和Strichartz估计, 有

$$\begin{aligned} |\text{Tr}_1| &\lesssim \frac{m(N_1)}{m(N_2)m(N_3)} \|\phi_1\phi_3\|_{L^2_{t,x}} \|\phi_2\phi_4\|_{L^2_{t,x}} \prod_{i=5}^{2k+2} \|\phi_i\|_{L^\infty_{t,x}} \\ &\lesssim \frac{m(N_1)}{m(N_2)m(N_3)} \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{\min\{N_3, N_1\}}{\max\{N_3, N_1\}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{N_4}{N_2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{N_1}{N_2N_3N_4} \|\phi_1\|_{X^{-1,1/2+}} \prod_{i=2}^{2k+2} \|\phi_i\|_{X^{1,1/2+}}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

与情形2类似, 根据 $\frac{1}{\lambda}$ 与 $\frac{\min\{N_3, N_1\}}{\max\{N_3, N_1\}}, \frac{N_4}{N_2}$ 的大小关系, 分五种子情形讨论.

情形3a. 当 $\frac{N_4}{N_2} > \frac{1}{\lambda} \sim \frac{1}{N^{\alpha(s)}}$ 时.

由 $N_2 \geq N_3 \gtrsim N \gg N_4 \geq \cdots \geq N_{2k+2}$ 可见 $1 \gg \frac{N_4}{N_2} > \frac{1}{\lambda}$ 注意到 $N_1 \lesssim N_2$, 故 $\frac{m(N_1)N_1^{1-}}{m(N_2)N_2^{1-}} \lesssim 1$. 结合(3.7)式以及 $\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{\min\{N_3, N_1\}}{\max\{N_3, N_1\}}\right)^{\frac{1}{2}} \lesssim 1$, 由(3.8)式, 可得

$$\begin{aligned} |\text{Tr}_1| &\lesssim \frac{m(N_1)}{m(N_2)m(N_3)} \left(\frac{N_4}{N_2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{N_1}{N_2N_3N_4} \|\phi_1\|_{X^{-1,1/2+}} \prod_{i=2}^{2k+2} \|\phi_i\|_{X^{1,1/2+}} \\ &\lesssim \frac{m(N_1)N_1^{1-}}{m(N_2)N_2^{1-}} \frac{1}{N_2^{\frac{1}{2}}m(N_3)N_3^{1-}} \frac{1}{N_4^{\frac{1}{2}}} \frac{N_1^{0+}}{N_2^{0+}} \frac{1}{N_3^{0+}} \|\phi_1\|_{X^{-1,1/2+}} \prod_{i=2}^{2k+2} \|\phi_i\|_{X^{1,1/2+}} \\ &\lesssim \frac{1}{N^{(1+1/2)-}} \frac{N_1^{0+}}{N_2^{0+}} \frac{1}{N_3^{0+}} \frac{1}{N_4^{\frac{1}{2}}} \|\phi_1\|_{X^{-1,1/2+}} \prod_{i=2}^{2k+2} \|\phi_i\|_{X^{1,1/2+}}. \end{aligned}$$

其中, 因子 $\frac{1}{N_4^{\frac{1}{2}}N_3^{0+}}$ 用于对 $N_3, N_4, \dots, N_{2k+2}$ 求和; 为了对 N_1, N_2 求和, 需要利用因子 $\frac{N_1^{0+}}{N_2^{0+}}$ 和 $N_1 \lesssim N_2$, 并利用柯西施瓦茨不等式, 即 $\sum_{N_1 \lesssim N_2} \left(\frac{N_1^{0+/2}}{N_2^{0+/2}} \|\phi_1\|_{X^{-1,1/2+}} \right) \left(\frac{N_1^{0+/2}}{N_2^{0+/2}} \|\phi_2\|_{X^{1,1/2+}} \right)$. 最终, 在 $1 - \frac{1}{2k} < s < 1$ 时, 该子情形的贡献为

$$\frac{1}{N^{(1+1/2)-}} \lesssim \frac{1}{N^{1+\frac{\alpha(s)}{2}}}.$$

情形3b. 当 $\frac{N_4}{N_2} \leq \frac{1}{\lambda} \sim \frac{1}{N^{\alpha(s)}}$ 且 $N_1 \leq N_3, \frac{1}{\lambda} < \frac{N_1}{N_3}$ 时.

由于 $\sum_{j=1}^{2k+2} \xi_j = 0$, 并且 $N_2 \geq N_3 \gtrsim N \gg N_4 \geq \cdots \geq N_{2k+2}$, 有 $N_2 \sim N_3$, 结合(3.8)式,

(3.7)式,以及 $\frac{m(N_1)N_1}{m(N_2)N_2} \lesssim 1$,可得

$$\begin{aligned} |\mathrm{Tr}_1| &\lesssim \frac{m(N_1)}{m(N_2)m(N_3)} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{N_1}{N_3}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{N_1}{N_2N_3N_4} \|\phi_1\|_{X^{-1,1/2+}} \prod_{i=2}^{2k+2} \|\phi_i\|_{X^{1,1/2+}} \\ &\lesssim \frac{1}{N^{\frac{\alpha(s)}{2}}} \frac{m(N_1)N_1}{m(N_2)N_2} \frac{1}{m(N_3)N_3} \left(\frac{N_1}{N_3}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N_4} \|\phi_1\|_{X^{-1,1/2+}} \prod_{i=2}^{2k+2} \|\phi_i\|_{X^{1,1/2+}} \\ &\lesssim \frac{1}{N^{1+\frac{\alpha(s)}{2}}} \left(\frac{N_1}{N_3}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N_4} \|\phi_1\|_{X^{-1,1/2+}} \prod_{i=2}^{2k+2} \|\phi_i\|_{X^{1,1/2+}}. \end{aligned}$$

其中,因子 $\frac{1}{N_4}$ 可用于对指标 $N_4, N_5, \dots, N_{2k+2}$ 求和;注意到 $N_3 \sim N_2$, 这使得因子 $\left(\frac{N_1}{N_3}\right)^{\frac{1}{2}}$ 在对指标 N_3 求和后,变成 $\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^{\frac{1}{2}}$; 为了对指标 N_1, N_2 求和, 我们对和式

$$\sum_{N_1 \lesssim N_2} \left(\frac{N_1^{1/4}}{N_2^{1/4}} \|\phi_1\|_{X^{-1,1/2+}} \right) \left(\frac{N_1^{1/4}}{N_2^{1/4}} \|\phi_2\|_{X^{1,1/2+}} \right)$$

应用柯西施瓦茨不等式. 最后,得到贡献

$$\frac{1}{N^{1+\frac{\alpha(s)}{2}}}.$$

情形3c. 当 $\frac{N_4}{N_2} \leq \frac{1}{\lambda} \sim \frac{1}{N^{\alpha(s)}}$ 时, 且 $N_1 \leq N_3, \frac{1}{\lambda} \geq \frac{N_1}{N_3}$ 时.

此子情形下,仍有 $N_2 \sim N_3$, 结合(3.8)式, (3.7)式以及 $\frac{m(N_1)N_1^{\frac{1}{2k}}}{m(N_2)N_2^{\frac{1}{2k}}} \lesssim 1$, 可得

$$\begin{aligned} |\mathrm{Tr}_1| &\lesssim \frac{m(N_1)}{m(N_2)m(N_3)} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{N_1}{N_2N_3N_4} \|\phi_1\|_{X^{-1,1/2+}} \prod_{i=2}^{2k+2} \|\phi_i\|_{X^{1,1/2+}} \\ &\lesssim \frac{1}{N^{\alpha(s)}} \frac{m(N_1)N_1}{m(N_2)N_2} \frac{1}{m(N_3)N_3} \frac{1}{N_4} \|\phi_1\|_{X^{-1,1/2+}} \prod_{i=2}^{2k+2} \|\phi_i\|_{X^{1,1/2+}} \\ &= \frac{1}{N^{\alpha(s)}} \frac{m(N_1)N_1^{\frac{1}{2k}}}{m(N_2)N_2^{\frac{1}{2k}}} \frac{1}{m(N_3)N_3} \frac{1}{N_4} \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^{1-\frac{1}{2k}} \|\phi_1\|_{X^{-1,1/2+}} \prod_{i=2}^{2k+2} \|\phi_i\|_{X^{1,1/2+}} \\ &\lesssim \frac{1}{N^{1+\alpha(s)}} \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^{1-\frac{1}{2k}} \frac{1}{N_4} \|\phi_1\|_{X^{-1,1/2+}} \prod_{i=2}^{2k+2} \|\phi_i\|_{X^{1,1/2+}} \end{aligned}$$

因子 $\frac{1}{N_4}$ 可用于对指标 $N_4, N_5, \dots, N_{2k+2}$ 求和. 对指标 $N_2 \sim N_3$, 在因子 $\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^{1-\frac{1}{2k}}$ 对指标 N_2 求和后,变为 $\left(\frac{N_1}{N_3}\right)^{1-\frac{1}{2k}}$. 为对指标 N_1, N_3 求和, 考虑到 $\frac{1}{\lambda} \geq \frac{N_1}{N_3}$, 对和式

$$\sum_{N_1 \lesssim \frac{N_3}{\lambda}} \left(\left(\frac{N_1}{N_3}\right)^{1/2-\frac{1}{4k}} \|\phi_1\|_{X^{-1,1/2+}} \right) \left(\left(\frac{N_1}{N_3}\right)^{1/2-\frac{1}{4k}} \|\phi_2\|_{X^{1,1/2+}} \right)$$

应用柯西施瓦茨不等式,可得 $\frac{1}{N^{\alpha(s)(1-\frac{1}{2k})}}$. 最终,该子情形的贡献为

$$\frac{1}{N^{1+\alpha(s)+\alpha(s)(1-\frac{1}{2k})}}.$$

情形3d. 当 $\frac{N_4}{N_2} \leq \frac{1}{\lambda} \sim \frac{1}{N^{\alpha(s)}}$, 且 $N_1 > N_3, \frac{1}{\lambda} \leq \frac{N_3}{N_1}$ 时. 考虑到 Γ_{2k+2} 的定义、指标关系 $N_2 \geq N_3 \gtrsim N \gg N_4 \geq \dots \geq N_{2k+2}$ 以及 $N_2 \sim N_1$, 不妨将此时的 N_1 和 N_3 分别视为情形3b中的 N_3 和 N_1 , 从而类似可得贡献为

$$\frac{1}{N^{1+\frac{\alpha(s)}{2}}}.$$

情形3e. 当 $\frac{N_4}{N_2} \leq \frac{1}{\lambda} \sim \frac{1}{N^{\alpha(s)}}$ 且 $N_1 > N_3, \frac{1}{\lambda} > \frac{N_3}{N_1}$ 时.

此时,仍有 $N_2 \sim N_1$, 故 $\frac{m(N_1)}{m(N_2)} \sim 1$, from 结合(3.8)式和(3.7)式, 可得

$$\begin{aligned} |\text{Tr}_1| &\lesssim \frac{m(N_1)}{m(N_2)m(N_3)} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{N_1}{N_2 N_3 N_4} \|\phi_1\|_{X^{-1,1/2+}} \prod_{i=2}^{2k+2} \|\phi_i\|_{X^{1,1/2+}} \\ &\lesssim \frac{1}{N^{\alpha(s)}} \frac{1}{m(N_3)N_3^{1-}} \frac{N_1}{N_2} \frac{1}{N_4} \frac{1}{N_3^{0+}} \|\phi_1\|_{X^{-1,1/2+}} \prod_{i=2}^{2k+2} \|\phi_i\|_{X^{1,1/2+}} \\ &\lesssim \frac{1}{N^{(1-)+\alpha(s)}} \frac{N_1}{N_2} \frac{1}{N_4} \frac{1}{N_3^{0+}} \|\phi_1\|_{X^{-1,1/2+}} \prod_{i=2}^{2k+2} \|\phi_i\|_{X^{1,1/2+}}. \end{aligned}$$

其中因子 $\frac{1}{N_4 N_3^{0+}}$ 用来对指标 $N_3, N_4, \dots, N_{2k+2}$ 求和. 对于指标 N_1, N_2 , 注意到 $N_1 \sim N_2$, 考虑对和式 $\sum_{N_1 \sim N_2} \left(\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^{1/2} \|\phi_1\|_{X^{-1,1/2+}} \right) \left(\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^{1/2} \|\phi_2\|_{X^{1,1/2+}} \right)$ 应用柯西施瓦茨不等式. 最终,该子情形的贡献为

$$\frac{1}{N^{(1-)+\alpha(s)}} \lesssim \frac{1}{N^{1+\frac{\alpha(s)}{2}}}.$$

情形4. 存在角标 $4 \leq j_0 \leq 2k+2$, 使得 $N_{j_0} \gtrsim N \gg N_{j_0+1}$ (不太严谨的表述, 当 $j_0 = 2k+2$ 时, $N_{2k+2} \gtrsim N \gg N_{2k+2}$ 表示的是 $N_2 \geq N_3 \geq \dots \geq N_{2k+2} \gtrsim N$).

与情形3类似,对乘子进行估计

$$\begin{aligned} &\left| 1 - \frac{m(\xi_2 + \xi_3 + \dots + \xi_{2k+2})}{m(\xi_2) m(\xi_3) \dots m(\xi_{2k+2})} \right| \\ &= \left| 1 - \frac{m(\xi_2 + \xi_3 + \dots + \xi_{2k+2})}{m(\xi_2) m(\xi_3) \dots m(\xi_{j_0})} \right| \tag{3.9} \\ &\lesssim \frac{m(\xi_1)}{m(\xi_2) m(\xi_3) \dots m(\xi_{j_0})}. \end{aligned}$$

利用帕塞瓦尔定理、赫尔德不等式、引理2.1、伯恩斯坦估计和Strichartz估计,有

$$\begin{aligned}
 |\mathrm{Tr}_1| &\lesssim \frac{m(N_1)}{\prod_{j=2}^{j_0} m(N_j)} \|\phi_1\phi_3\|_{L^2_{t,x}} \|\phi_2\phi_4\|_{L^2_{t,x}} \prod_{i=5}^{2k+2} \|\phi_i\|_{L^\infty_{t,x}} \\
 &\lesssim \frac{m(N_1)}{\prod_{j=2}^{j_0} m(N_j)} \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{N_3}{N_1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{N_4}{N_2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{N_1}{N_2 N_3 N_4} \|\phi_1\|_{X^{-1,1/2+}} \prod_{i=2}^{2k+2} \|\phi_i\|_{X^{1,1/2+}} \\
 &\lesssim \frac{m(N_1)N_1}{m(N_2)N_2} \frac{1}{N_3 N_4 \prod_{j=3}^{j_0} m(N_j)} \|\phi_1\|_{X^{-1,1/2+}} \prod_{i=2}^{2k+2} \|\phi_i\|_{X^{1,1/2+}} \\
 &= \frac{m(N_1)N_1^{1-}}{m(N_2)N_2^{1-}} \frac{1}{m(N_3)N_3^{1-}} \frac{1}{N_4 \prod_{j=4}^{j_0} m(N_j)} \frac{N_1^{0+}}{N_2^{0+}} \frac{1}{N_3^{0+}} \|\phi_1\|_{X^{-1,1/2+}} \prod_{i=2}^{2k+2} \|\phi_i\|_{X^{1,1/2+}} \\
 &\lesssim \frac{1}{N^{1-}} \frac{1}{\prod_{j=4}^{j_0} m(N_j)} \frac{N_1^{0+}}{N_2^{0+}} \frac{1}{N_3^{0+}} \|\phi_1\|_{X^{-1,1/2+}} \prod_{i=2}^{2k+2} \|\phi_i\|_{X^{1,1/2+}} \\
 &\lesssim \frac{1}{N^{1-}} \frac{1}{\prod_{j=4}^{j_0} \left(m(N_j) N_j^{\frac{1}{j_0-3}}\right)} \frac{N_1^{0+}}{N_2^{0+}} \frac{1}{N_3^{0+}} \|\phi_1\|_{X^{-1,1/2+}} \prod_{i=2}^{2k+2} \|\phi_i\|_{X^{1,1/2+}} \\
 &\lesssim \frac{1}{N^{2-}} \frac{N_1^{0+}}{N_2^{0+}} \frac{1}{N_3^{0+}} \|\phi_1\|_{X^{-1,1/2+}} \prod_{i=2}^{2k+2} \|\phi_i\|_{X^{1,1/2+}},
 \end{aligned}$$

当 $s > 1 - \frac{1}{2k-1}$ 时. 因子 $\frac{N_1^{0+}}{N_2^{0+} N_3^{0+}}$ 可直接对指标 $N_3, N_4, \dots, N_{2k+2}$ 求和, 对于指标 N_1 和 N_2 , 应该应用柯西施瓦茨不等式后再求和.

接下来分析 Tr_2 部分. 将 Tr_2 重写为,

$$\begin{aligned}
 \mathrm{Tr}_2 &:= \int_0^t \int_{\Gamma_{2k+2}} \left(1 - \frac{m(\xi_2 + \xi_3 + \dots + \xi_{2k+2})}{m(\xi_2) m(\xi_3) \dots m(\xi_{2k+2})}\right) \\
 &\quad \times I(|u|^{2k}\widehat{u})(\xi_1) \widehat{Iu}(\xi_2) \widehat{Iu}(\xi_3) \dots \widehat{Iu}(\xi_{2k+2}) d\xi_1 \dots d\xi_{2k+2} \\
 &= \int_0^t \int_{\Gamma_{4k+2}} m(\xi_{2k+2} + \xi_{2k+3} + \dots + \xi_{4k+2}) [m(\xi_1) m(\xi_2) \dots m(\xi_{2k+1}) \\
 &\quad - m(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{2k+1})] \times \widehat{u}(\xi_1)\widehat{u}(\xi_2)\widehat{u}(\xi_3) \dots \widehat{u}(\xi_{4k+2}) d\xi_1 \dots d\xi_{4k+2}.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

断言如下更强对估计成立:

$$|\mathrm{Tr}_2| \lesssim \frac{1}{N^{2-}} \|Iu\|_{X^{1,1/2+}}^{4k+2}.$$

对于 Tr_2 只需证明如下估计,即

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Gamma_{4k+2}} m(\xi_{2k+2} + \xi_{2k+3} + \cdots + \xi_{4k+2}) [m(\xi_1) m(\xi_2) \cdots m(\xi_{2k+1}) \\ & \quad - m(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{2k+1})] \prod_{j=1}^{4k+2} \widehat{\phi}_j(\xi_j) d\xi_1 \cdots d\xi_{4k+2} \\ & \lesssim \frac{N_{\max}^{0-}}{N^{2-}} \prod_{i=1}^{4k+2} \|I\phi_i\|_{X^{1,1/2+}}, \end{aligned} \tag{3.11}$$

其中,函数 ϕ_i 的正空间傅立叶变换支集满足

$$\langle k \rangle \sim 2^{l_i} \equiv N_i,$$

上式中 $l_i \in \{0, 1, \dots\}$, 指标 N_{\max}, N_{med} 分别表示 N_i 中的最大和第二大频率.

由积分区域 Γ_{4k+2} 的定义,不妨假设 $N_{\max} \sim N_{\text{med}}$. 于是仅需考虑 $N_{\max} \gtrsim N$ 情形, 否则(3.11)式中 LHS 恒为0,估计是平凡的.

结合赫尔德不等式、(3.7)式(用两次) 以及乘子 m 的有界性,有

$$\begin{aligned} & \text{LHS of (3.11)} \\ & \leq \frac{N_{\max}^{1-} N_{\text{med}}^{1-} m_{\max} m_{\text{med}}}{N_{\max}^{1-} N_{\text{med}}^{1-} m_{\max} m_{\text{med}}} \int_0^t \int_{\Gamma_{4k+2}} \prod_{j=1}^{4k+2} \widehat{\phi}_j(k, t) \\ & \lesssim \frac{N_{\max}^{0-}}{N^{2-}} \|J^{1-} I\phi_{\max}\|_{L_t^4 L_x^4} \|J^{1-} I\phi_{\text{med}}\|_{L_t^4 L_x^4} \prod_{j=1}^{4k} \|\phi_k\|_{L_t^{8k} L_x^{8k}}, \end{aligned}$$

其中 J^s 是 s 阶的贝塞尔位势算子, 即 $J^s = (1 - \Delta)^{s/2}$.

由引理2.13 和(2.12)式有,

$$\begin{aligned} & \text{LHS of (3.11)} \\ & \lesssim \lambda^{0+} \frac{N_{\max}^{0-}}{N^{2-}} \|I\phi_{\max}\|_{X^{1,1/2+}} \|I\phi_{\text{med}}\|_{X^{1,1/2+}} \prod_{j=1}^{4k} \|\phi_j\|_{X^{(1-\frac{1}{2k})+,1/2+}} \\ & \lesssim \frac{N_{\max}^{0-}}{N^{2-}} \prod_{j=1}^6 \|I\phi_j\|_{X^{1,1/2+}}, \end{aligned}$$

当 $s \geq (1 - \frac{1}{2k})+$ 时,上述估计成立. 至此,命题3.1得证.

□

4. 整体适定性

现在,让我们利用I方法和几乎守恒律(命题3.1) 来证明定理1.1 .

4.1. I-初值问题的局部适定性

对I-初值问题

$$\begin{aligned} iIu_t + I\Delta u - I(|u|^{2k}u) &= 0 \\ Iu(x, 0) = Iu_0(x) &\in H^1(\mathbb{R} \times \mathbb{T}_\lambda), t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

我们有如下命题

Proposition 4.1 (I-初值问题的局部适定性). 若 $\|Iu_0\|_{H^1} \lesssim 1$, 则对任意的 $s > 1 - \frac{1}{2k}$, I-初值问题(4.1) 在区间 $[0, \delta] \sim [0, \frac{1}{\lambda^{0+}}]$ 上局部适定.

证明. 利用杜哈梅尔公式以及文献 [3]中的引理3.3, 对时间 $t \in [0, \delta]$, 有

$$\|Iu\|_{X^{1,1/2+}} \lesssim \|Iu_0\|_{H^1} + \delta^{\frac{1}{2}-\epsilon} \|I(|u|^{2k}u)\|_{X^{1,-1/2+2\epsilon}}. \quad (4.2)$$

结合赫尔德不等式, (2.13)式以及莱布尼兹法则(文献 [12]), 当 $s > 1 - \frac{1}{2k}$ 时,有

$$\||u|^{2k}u\|_{X^{s,-1/2+2\epsilon}} \leq \| |u|^{2k}u \|_{X^{s,0}} \lesssim \|J^s u\|_{L_t^4 L_x^4} \|u\|_{L_t^{8k} L_x^{8k}}^{2k} \lesssim \lambda^{0+} \|u\|_{X^{s,1/2+}}^{2k+1},$$

由文献 [13] 的不变性引理,有

$$\|I(|u|^{2k}u)\|_{X^{1,-1/2+2\epsilon}} \lesssim \lambda^{0+} \|Iu\|_{X^{1,1/2+}}^{2k+1},$$

带入(4.2) 式,得

$$\|Iu\|_{X^{1,1/2+}} \lesssim \|Iu_0\|_{H^1} + \delta^{\frac{1}{2}-\epsilon} \lambda^{0+} \|Iu\|_{X^{1,1/2+}}^5.$$

通过专著 [10]中命题1.21的标准自举法(Bootstrap argument),当 $\delta \sim \frac{1}{\lambda^{0+}}$ 时,有

$$\|Iu\|_{X^{1,1/2+}} \lesssim \|Iu_0\|_{H^1}. \quad (4.3)$$

□

4.2. 初值问题(1.1)的整体适定性

证明. 设初值 $u_0 \in H^s(\mathbb{T}_\lambda^2)$, $N \gg 1$ 为待定的频率参数. 考虑方程(1.1)作尺度变换后的解 $u^\lambda(t, x, y) := \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{k}}} u\left(\frac{t}{\lambda^2}, \frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\lambda}\right)$, 且对应初值为 $u_0^\lambda(x, y) := \lambda^{-\frac{1}{k}} u_0(\lambda^{-1}x, \lambda^{-1}y)$. 由定义, 对于 $s < 1$, 有 $\frac{|m(\xi)|}{|\xi|^{s-1}} \lesssim N^{1-s}$, 由索伯列夫嵌入($s > 1 - \frac{1}{2k} \geq 1 - \frac{1}{k+1}$),有

$$\begin{aligned} \|\nabla Iu_0^\lambda\|_{L^2} &= \left\| \frac{|m(\xi)|}{|\xi|^{s-1}} |\xi|^s \widehat{u_0^\lambda} \right\|_{L^2} \lesssim N^{1-s} \|u_0^\lambda\|_{\dot{H}_x^s} = N^{1-s} \lambda^{1-\frac{1}{k}-s} \|u_0\|_{\dot{H}_x^s}, \\ \|Iu_0^\lambda\|_{L^{2k+2}} &\lesssim \|u_0^\lambda\|_{L^{2k+2}} = \lambda^{\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}} \|u_0\|_{L^{2k+2}} \lesssim \lambda^{\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}} \|u_0\|_{H_x^s}. \end{aligned}$$

由于 $s > 1 - \frac{1}{2k} \geq 1 - \frac{1}{k+1} > 1 - \frac{1}{k}$, 选取足够大的 λ (依赖于 $\|u_0\|_{H_x^s}$ 和 N) 使得

$$N^{1-s} \lambda^{1-\frac{1}{k}-s} \|u_0\|_{H_x^s} \ll 1 \text{ 且 } \lambda^{\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}} \|u_0\|_{H_x^s} \ll 1,$$

因此,

$$E(Iu_0^\lambda) \ll 1 \text{ 且 } \|Iu_0^\lambda\|_{H^1} \ll 1.$$

由此确定

$$\lambda \sim N^{\alpha(s)}$$

其中 $\alpha(s) := \frac{s-1}{1-s-1/k}$ 是关于 s 的递减函数, 满足 $\alpha(1 - \frac{1}{2k}) = 1$, $\alpha(1) = 0$, 因此对 $1 - \frac{1}{2k} < s < 1$ 时, 有 $0 < \frac{\alpha(s)}{2} < \frac{1}{2}$.

结合(4.3)式应用命题3.1 和引理4.1, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$E(Iu^\lambda)(\delta) \lesssim E(Iu^\lambda)(0) + O\left(\frac{1}{N^{\frac{\alpha(s)}{2}+1}}\right) \lesssim 1,$$

因此, 可在区间 $[0, M\delta] = [0, T]$ 上连续构造解, 其中 $T \ll N^{\frac{\alpha(s)}{2}+1}$. 并且

$$\|Iu^\lambda(T)\|_{H^1} \lesssim 1,$$

结合乘子 m 的定义, 可得

$$\|u^\lambda(T)\|_{H^s} \lesssim 1,$$

去掉尺度变换, 有

$$\|u(T)\|_{H^s} \lesssim C_{N,\lambda},$$

对所有 $T \ll \frac{N^{\frac{\alpha(s)}{2}+1}}{\lambda^2}$ 均成立. 注意到 $\frac{N^{\frac{\alpha(s)}{2}+1}}{\lambda^2} \sim N^{\frac{\frac{5}{2}(1-s)-\frac{1}{k}}{1-s-\frac{1}{k}}}$, 当 $N \rightarrow \infty, s > 1 - \frac{2}{5k}$ 时, 其趋于无穷大, 故需要选取 $s \in \{s > 1 - \frac{2}{5k}\} \cap \{s > 1 - \frac{1}{2k}\} \cap \{s > 1 - \frac{1}{2k-1}\} = \{s > 1 - \frac{2}{5k}\}$. \square

5. 总结与展望

5.1. 总结

本文考虑的是二维环面上的广义NLS

$$(i\partial_t + \Delta)u = |u|^{2k}u, \quad u(0) = u_0 \in H^s(\mathbb{T}^2),$$

其中 $k \geq 1$. 从非线性次数看, 右端是 $2k + 1$ 次幂: $k = 1$ 时为三次项, $k = 2$ 时为五次项, 依此类推. 也就是说, 本文并非只研究单一的cubic NLS, 而是研究一族奇数次、能量次临界非线性薛定谔方程. 而这类方程在二维环面上在低正则Sobolev 空间中的整体适定性, 并给出的主结论是: 对任意 $k \geq 1$, 当

$$s > 1 - \frac{2}{5k}$$

时,初值问题整体适定.

这个结论的含义在于:试图在“固定非线性幂次 k ”的前提下,尽可能降低整体适定所需的正则性阈值 s .对 $k = 1$ 而言,上式给出 $s > 3/5$,这与二维环面上三次NLS在近年来的一个阶段性最优阈值一致;但从2025年的最新结果看,三次情形如今已经推进到了临界层级 $s = 0$ (更准确地说,是 L^2 初值下的整体理论).因此,若把本文放在整个发展链条中看,它在 $k = 1$ 上反映的是I方法路线能够达到的经典低正则阈值,而不是最新sharp结果.

更值得注意的是,本文的价值并不只在 $k = 1$ 上.因为2024-2025年的突破主要聚焦于二维三次质量临界情形,而本文处理的是更一般的 $|u|^{2k}u$ 非线性,属于把周期背景下的I-method技术推广到更广泛能量次临界幂次的一类工作.换言之,本文研究的不是“某个特定最新尖锐结果”,而是:在二维环面上,对一般能量次临界幂次非线性 $|u|^{2k}u$,利用I方法建立修正能量的几乎守恒律,从而得到一个统一的低正则整体适定性充分条件.

5.2. 展望

尽管本文已经利用I-method建立了二维环面上广义非线性薛定谔方程在 $H^s(\mathbb{T}^2)$ ($s > 1 - \frac{2}{5k}$)中的整体适定性,但从问题的发展脉络与现有方法的局限来看,仍有若干值得进一步深入研究方向.

首先,从正则性阈值的角度看,本文得到的条件 $s > 1 - \frac{2}{5k}$ 是基于I-method、几乎守恒律与周期背景下双线性估计相结合所得出的统一充分条件,但对一般幂次情形而言,这一阈值距离尺度临界正则性仍有进一步改进的空间.特别是对低阶非线性,近年来二维环面上三次NLS的研究已经显示出更尖锐的临界理论是有可能建立的.因此,如何在一般 $k \geq 1$ 的情形下结合更优的周期Strichartz估计、逆Strichartz不等式、正规形方法或更高阶修正能量构造,继续降低整体适定性的正则性要求,是一个非常自然且重要的问题.

其次,从研究对象的推广来看,本文主要讨论的是二维标准环面上的散焦型广义NLS.今后可以进一步考虑无理环面、各向异性环面或更一般紧流形背景下相应方程的低正则整体理论.不同几何背景会显著改变频率共振结构及色散估计的形式,因此在这些情形下,如何建立与本文相适应的几乎守恒律和频率分析框架,将具有明显的理论价值.与此同时,若将方程推广到聚焦情形,则还需要进一步分析基态阈值、爆破解以及质量或能量约束条件下的整体存在问题.

再次,从动力学性质的角度看,整体适定性只是长期理论的第一步.在周期背景下,由于散射理论通常不像欧氏空间那样直接适用,解的长时间行为、高Sobolev范数增长、频率级联以及能量在不同模态间的传递机制等问题,都是值得继续研究的重要课题.特别是在低正则框架下,修正能量方法是否还能与共振分析、长时间稳定性估计等工具结合,从而揭示周期NLS更精细的动力学结构,是后续研究中具有吸引力的方向.

最后,从方法论上看,本文的证明路线表明I-method在处理周期背景下粗糙初值整体理论时仍然具有较强的适用性,但其阈值往往受限于修正能量增量估计的精度.因此,如何进一步优化频率分解方式、提高多线性估计效率、构造更高阶修正能量,或者将I-method与新近发展的数论型计数技术、加法组合工具及几何分析方法相结合,仍然是提升结论精度的重要途径.相信随着

这些工具的持续发展，二维环面上广义NLS的低正则整体理论仍有望取得更接近临界层级的结果。
参考文献

参考文献

- [1] Colliander, J., Keel, M., Staffilani, G., Takaoka, H. and Tao, T. (2001) Global Well-Posedness for Schrödinger Equations with Derivative. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **33**, 649-669. <https://doi.org/10.1137/s0036141001384387>
- [2] Colliander, J., Keel, M., Staffilani, G., Takaoka, H. and Tao, T. (2002) Almost Conservation Laws and Global Rough Solutions to a Nonlinear Schrödinger Equation. *Mathematical Research Letters*, **9**, 659-682. <https://doi.org/10.4310/mrl.2002.v9.n5.a9>
- [3] De Silva, D.D., Pavlović, N., Staffilani, G. and Tzirakis, N. (2007) Global Well-Posedness for a Periodic Nonlinear Schrödinger Equation in 1D and 2D. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **17**, 37-65. <https://doi.org/10.3934/dcds.2007.19.37>
- [4] Bourgain, J. (1998) Refinements of Strichartz' Inequality and Applications to 2D-NLS with Critical Nonlinearity. *International Mathematics Research Notices*, **1998**, 253-283. <https://doi.org/10.1155/s1073792898000191>
- [5] Fan, C., Staffilani, G., Wang, H. and Wilson, B. (2018) On a Bilinear Strichartz Estimate on Irrational Tori. *Analysis & PDE*, **11**, 919-944. <https://doi.org/10.2140/apde.2018.11.919>
- [6] Herr, S. and Kwak, B. (2024) Strichartz Estimates and Global Well-Posedness of the Cubic NLS on \mathbb{T}^2 . *Forum of Mathematics*, **12**, e14. <https://doi.org/10.1017/fmp.2024.11>
- [7] Herr, S. and Kwak, B. (2026) Global Well-Posedness of the Cubic Nonlinear Schrödinger Equation on \mathbb{T}^2 . *Inventiones Mathematicae*. <https://doi.org/10.1007/s00222-026-01418-4>
- [8] Ginibre, J. (1996) Le problème de Cauchy pour des EDP semi-linéaires périodiques en variables d'espace. *Astérisque*, **237**, 163-187.
- [9] Deng, Y. (2023) On a Bilinear Restriction Estimate for Schrödinger Equations on 2D Waveguide. arXiv:2311.18541
- [10] Tao, T. (2006) Nonlinear Dispersive Equations: Local and Global Analysis. *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*, Vol. 106, American Mathematical Society.
- [11] Takaoka, H. and Tzvetkov, N. (2001) On 2D Nonlinear Schrödinger Equations with Data on $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$. *Journal of Functional Analysis*, **182**, 427-442. <https://doi.org/10.1006/jfan.2000.3732>
- [12] Kenig, C.E., Ponce, G. and Vega, L. (1993) Well-Posedness and Scattering Results for the Generalized Korteweg-de Vries Equation via the Contraction Principle. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **46**, 527-620. <https://doi.org/10.1002/cpa.3160460405>
- [13] Colliander, J., Keel, M., Staffilani, G., Takaoka, H. and Tao, T. (2004) Multilinear Estimates for Periodic KdV Equations, and Applications. *Journal of Functional Analysis*, **211**, 173-218. [https://doi.org/10.1016/s0022-1236\(03\)00218-0](https://doi.org/10.1016/s0022-1236(03)00218-0)