

图的邻接矩阵第n-1 Immanantal多项式的零度

李帅军

青海民族大学数学与统计学院, 青海 西宁

收稿日期: 2026年4月10日; 录用日期: 2026年5月15日; 发布日期: 2026年5月28日

摘要

令 S_n 表示 n 阶对称群, λ 是 n 的一个划分, χ_λ 是 S_n 的不可约特征标, $M = (m_{ij})$ 表示 n 阶方阵, 矩阵 M 的 d_{n-1} immanantal多项式定义为

$$d_{n-1}(M) = \sum_{\sigma \in S_n} \chi_{n-1}(\sigma) \prod_{i=1}^n m_{i, \sigma(i)}$$

令图 G 是一个 n 个顶点的简单连通图, $A(G)$ 为图的邻接矩阵, 图的邻接矩阵的 d_{n-1} immanantal多项式定义为 $d_{(n-1)}(xI - A)$, 图 G 的零度定义为 $\eta_{n-1}(G)$, 即图 G 的第 $n-1$ immanantal多项式0根的个数, 本文我们首先运用了Gallai-Edmonds结构定理去描述了最大Sachs子图, 同时分别给出了图的邻接矩阵的 d_{n-1} immanantal多项式的零根和匹配的关系, 作为运用, 我们给出了树、圈、完全图的 $\eta_{n-1}(G)$, 最后我们进一步刻画了 $\eta_{n-1}(G) = 0$ 的图。

关键词

邻接矩阵, 最大匹配, 完美匹配, d_{n-1} Immanantal多项式

The Nullity of the n-1 Immanantal Polynomial of the Adjacent Matrix of the Graph

Shuaijun Li

School of Mathematics and Statistics, Qinghai Nationalities University, Xining Qinghai

Received: April 10, 2026; accepted: May 15, 2026; published: May 28, 2026

Abstract

Let S_n denote the n -th symmetric group, let λ be a partition of n , and let χ_λ be the irreducible character of S_n corresponding to λ . $M = (m_{ij})$ be an $n \times n$ square matrix. The d_{n-1} immanantal polynomial of matrix M is defined as

$$d_{n-1}(M) = \sum_{\sigma \in S_n} \chi_{n-1}(\sigma) \prod_{i=1}^n m_{i, \sigma(i)},$$

Let G be a simple connected graph with n vertices, and $A(G)$ be the adjacency matrix of G . The d_{n-1} immanantal polynomial of the adjacency matrix of the graph is defined as $d_{n-1}(xI-A)$. The nullity of graph G is denoted as $\eta_{n-1}(G)$, which is the number of zero roots of the $(n-1)$ -th immanantal polynomial of G . In this paper, we first use the Gallai-Edmonds structure theorem to describe the maximum Sachs subgraph, and establish the relationship between the zero roots of the d_{n-1} immanantal polynomial of the adjacency matrix of the graph and matchings. As an application, we give $\eta_{n-1}(G)$ for trees, cycles, and complete graphs. Furthermore, we characterize the graphs with $\eta_{n-1}(G) = 0$.

Keywords

Adjacency Matrix, Maximum Matching, Perfect Matching, d_{n-1} Immanantal Polynomial

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

令 S_n 表示 n 阶对称群, λ 是 n 的一个划分, χ_λ 是 S_n 的不可约特征标. 这 *immanant* 函数 d_λ 是通过将不可约特征标 χ_λ 作用于 $n \times n$ 矩阵 $M = (m_{i,j})$ 时得到的 d_λ , 定义为:

$$d_\lambda(M) = \sum_{\sigma \in S_n} \chi_\lambda(\sigma) \prod_{i=1}^n m_{i,\sigma(i)}. \quad (1)$$

特别地, 当 $\lambda = (k, 1^{n-k})$ 时, 我们称 $d_{(k, 1^{n-k})}(M)$ 为矩阵 M 的 *Hook-immanant*, 简记为 $d_k(M)$. 当 $k = 1$ 时, $d_1(M)$ 对应 M 的行列式. 当 $k = n$ 时, $d_n(M)$ 对应 M 的积和式, 即 $\text{per}(M)$.

在这篇文章当中, 我们主要考虑当 λ 划分为 $(n-1, 1)$, 第 $(n-1)$ *immanant* 定义为:

$$d_{n-1}(M) = \sum_{\sigma \in S_n} \chi_{n-1}(\sigma) \prod_{i=1}^n m_{i,\sigma(i)}, \quad (2)$$

这里的 $\chi_{n-1}(\sigma) = F(\sigma) - 1$, 这里 $F(\sigma)$ 表示置换 σ 的不动点个数. 由该特征标公式可得 $d_{n-1}(M)$ 的一个组合表达式:

$$d_{n-1}(M) = \sum_{i=1}^n m_{i,i} \text{per}(M(i)) - \text{per}(M), \quad (3)$$

其中, $M(i)$ 表示从矩阵 M 中删除第 i 行与第 i 列后得到的子矩阵. $d_{n-1}(M)$ 的计算复杂度可通过积和式 (permanent) 的归约来确定: 由于矩阵积和式的计算是 $\#P$ -完全问题 ($\#P$ -complete) [1], 且积和式的计算可归约为对构造出的矩阵 M' 计算 $d_{n-1}(M)$, 因此对于一般矩阵 M , 计算 $d_{n-1}(M)$ 同样是 $\#P$ -完全问题.

设 $G = (V(G), E(G))$ 是一个具有 n 个顶点和 m 条边的简单图. 图 G 的顶点集和边集分别记为 $V(G) = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ 和 $E(G) = (e_1, e_2, \dots, e_m)$. 令 $n = |V(G)|$ 和 $m = |E(G)|$ 分别表示 G 的顶点数和边数, 图 G 的邻接矩阵 $A(G) = (a_{i,j})$ 定义为

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{若顶点 } v_i \text{ 与 } v_j \text{ 相邻,} \\ 0, & \text{否则.} \end{cases}$$

图 G 的一个匹配是指边的集合, 其中任意两条边都没有公共顶点. 若一个匹配覆盖了图 G 的所有顶点, 则称其为 G 的完美匹配. 图 G 的基本子图是图 G 当中所有分支为单边或圈的生成子图.

对于 $n \times n$ 矩阵 A , 定义 $d_{n-1}(xI - A)$ 为 A 的第 $(n-1)$ *immanantal* 多项式. 如果 G 是一个图, $A(G)$ 是图 G 的邻接矩阵, 则定义 G 的第 $(n-1)$ *immanantal* 多项式为 $\phi_{n-1}(G, x) = d_{n-1}(xI - A)$, 图 G 的第 $(n-1)$ *immanantal* 多项式的谱用 $ps_{n-1}(G)$ 表示, 是 $\phi_{n-1}(G, x)$ 的所有根 (连同它们的重数), $\phi_{n-1}(G, x)$ 的零根的重数, 用 $\eta_{n-1}(G)$ 表示, 称为图 G 的第 $(n-1)$ *immanantal* 多项式的零度.

图的谱理论是代数图论的核心研究方向之一, 经典的图谱, 即图的邻接矩阵、拉普拉斯矩阵等的特征多项式的根及其多重性, 参见 [2] 编码了图的大量关键组合信息, 多年来, 图的结构与谱之间的对

应关系已经得到了极为广泛且深入的研究,成为图论领域的经典研究范式.在经典谱理论之外,矩阵的immanantal多项式是特征多项式的重要推广.目前积和谱(积和多项式的根)的研究已经取得了一系列重要成果: Brenner 和 Brualdi [3] 证明了非负矩阵的永久多项式根都落在以谱半径为半径的圆盘内; Merris [4] 给出了厄米矩阵实永久根的区间界; Borowiecki [5] 刻画了永久谱为纯虚数的图的结构; 吴 [6] 证明了积和零度和匹配的关系, 张等人 [7] 证明了图不存在负的实永久根, 且二部图除零外无实永久根, 同时积和谱唯一确定图的相关研究也在持续推进(见 [8–11]). 与积和谱的研究进展相比, 第 $n-1$ immanantal 多项式的谱的研究仍存在大量待探索的空间.

本文旨在探讨图 G 的求解问题, 文章的章节安排如下: 在第2节中, 我们首先对图的第 $(n-1)$ immanantal 多项式的零度的概念进行初步探讨, 在第3节中, 我们分别讨论了图中 $|S(G)| \neq n-1$ 和 $|S(G)| = n-1$ 的零度同时, 作为运用, 我们给出了路、圈、完全图的 $n-1$ 零度的表达式: 最后在第4节中, 我们确定了对所有 $\eta_{n-1}(G) = 0$ 的图.

2. 预备知识

在研究图的 d_{n-1} immanantal 多项式的零度时, 图的基本子图定理起着很重要的作用.

引理 2.1. [12] 令 G 是一个 n 个顶点的图. $A(G)$ 是它的邻接矩阵,

$$\phi_{\lambda, k}(x, A(G)) = \sum_{k=0}^n (-1)^k c_{\lambda, \kappa}(A(G)) x^{n-k}$$

是图 G 的immanantal多项式, 则

$$c_{\lambda, \kappa}(A(G)) = \sum_{B: |B|=k, B \subseteq V(G)} \sum_c \chi_{\lambda}(C) 2^{k(\tau_C(B))}$$

其中 B 是 $V(G)$ 中 k 个元素的子集, C 是子群 $(S_n)_B$ 的共轭类, $\tau_C(B)$ 是由 $\sigma \in c$ 确定其分支是顶点为 B 的单边或者圈的图, $k(\tau_C(B))$ 是 $\tau_C(B)$ 中圈的个数.

推论 2.2. 令 G 是一个 n 个顶点的图, $A(G)$ 是它的邻接矩阵,

$$\phi_{n-1}(x, A(G)) = \sum_{k=0}^n b_k x^{n-k}$$

是图 G 的第 $(n-1)$ immanantal 多项式, 则

$$b_k = (-1)^k \sum_k (n-k-1) 2^{\kappa(H)}$$

这里的求和是取遍图 G 中所有 k 个顶点的基本子图 H , $\kappa(H)$ 是 H 中圈的数量.

显然3个顶点的基本子图是一个三角形, 而四个顶点的基本子图有两种类: 两个孤立的边和一个四边形, 因此根据推论2.2我们得到如下结果:

推论 2.3. 令 G 是一个图,有 n 个顶点和 m 条边. (d_1, d_2, \dots, d_n) 表示 G 的度序列.则

- (i) $b_0(G) = n - 1.$
- (ii) $b_1(G) = 0.$
- (iii) $b_2(G) = (n - 3)m.$
- (v) $b_3(G) = -2(n - 4)t(G).$
- (iv) $b_4(G) = (n - 5)\left(\binom{m}{2} - \sum_{i=1}^n \binom{d_i}{2} + 2q(G)\right).$
- (vi) $b_{n-1}(G) = 0.$

其中 $t(G)$ 表示图 G 中三角形的数目, $q(G)$ 表示图 G 中四边形的数目, \mathcal{T}_j 表示图 G 中所有三角形的度数和.

例 2.4. 如图 1 所示的图,其顶点数 $n = 6$,边数 $m = 7$,度序列为 $(1, 2, 4, 2, 3, 2), t(G) = 1, q(G) = 1.$

- (i) $b_0(G) = 6 - 1 = 5.$
- (ii) $b_1(G) = 0.$
- (iii) $b_2(G) = (6 - 3) \times 7 = 21.$
- (v) $b_3(G) = -2 \times (6 - 4) = -4.$
- (iv) $b_4(G) = (6 - 5)(21 - 12 + 2) = 11.$
- (vi) $b_5(G) = 0.$
- (vi) $b_6(G) = -1.$

因此图 1 的第 $n - 1$ immanantal 多项式为 $\phi_{n-1}(x, A(G)) = 5x^6 + 21x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 1$

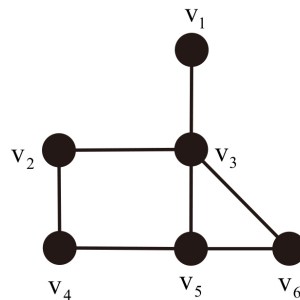


Figure 1. Graph of six vertices

图 1. 6个顶点的图

下面我们介绍图的匹配中著名的Gallai-Edmonds结构定理.定义3.2(i) 源自文献 [13] [14].定义2.4(i)和(ii)中的符号将在全文中使用.

定义 2.5. 设 G 是一个图.

- (i) 设 $D(G)$ 为 G 中至少被一个最大匹配不饱和的所有顶点构成的集合.定义 $B(G) = \{v \in (V(G) - D(G)) : \text{存在 } u \in D(G) \text{ 使得 } uv \in E(G)\}, C(G) = V(G) - (D(G) \cup B(G)).$

(ii) 设 $D'_0(G)$ 为 $G[D(G)]$ 中的所有孤立顶点构成的集合, 设 $B'_0(G)$ 为 $G[B(G)]$ 中的所有与 $D'_0(G)$ 连接的顶点构成的集合, $\mathcal{F}(G)$ 为 $G[D(G)]$ 中每个阶至少为 3 的分支构成的集合.

定理 2.6. (Gallai-Edmonds 结构定理 [13] [14]) 设 G 是一个图, $B(G)$ 、 $C(G)$ 和 $D(G)$ 是上述定义的顶点划分. 以下结论均成立:

- (i) $D(G)$ 导出的子图的每个分支都是因子临界的.
- (ii) $C(G)$ 导出的子图存在完美匹配.
- (iii) G 的任意最大匹配 M , 都包含 $G[D(G)]$ 每个分支的一个近完美匹配, 以及 $G[C(G)]$ 每个分支的一个完美匹配: 且 M 会将 $B(G)$ 的所有顶点与 $G[D(G)]$ 中不同分支的顶点进行匹配.
- (iv) 通过在 G 中删掉 $C(G)$ 的顶点和由 $B(G)$ 生成的边, 并且收缩 $D(G)$ 的每个分支为一个顶点所得到的二部图有正盈余 (从 $B(G)$ 的角度看).
- (v) 最大匹配的边数为 $\frac{1}{2}(|V(G)| - c(D(G)) + |B(G)|)$, 这里 $c(D(G))$ 表示由 $D(G)$ 生成的图的分支数目.

引理 2.7. 设 G 为 $\mathcal{F}(G) \neq \emptyset$ 且无完美匹配的图. 如果 G 的最大匹配 M 覆盖了 $G[D(G)]$ 中尽可能多的孤立顶点, 那么 $\mathcal{F}(G)$ 中必须存在至少一个 $G[D(G)]$ 中的分量没有被 M 覆盖.

3. 图的 d_{n-1} Immanantal 多项式的零度

图的 d_{n-1} immanantal 多项式的零度是该多项式零根的个数, 由于 d_{n-1} immanantal 多项式的系数 b_k 是由 k 个顶点的基本子图 H 所确定的, 这里我们令顶点数最大的基本子图为 $S(G)$, 顶点数第二大的基本子图为 $S'(G)$, 当 $k (k \neq n-1)$ 个顶点的 $S(G)$ 存在时, $b_k \neq 0$, 由于当 $k = n-1$ 时, b_k 恒为零, 所以当最大 Sachs 子图的顶点数 $|S(G)| = n-1$, d_{n-1} immanantal 多项式的零度, 由 $S'(G)$ 所确定. 因此我们将考虑 $|S(G)| \neq n$ 和 $|S(G)| = n-1$ 这两种情形.

引理 3.1. $|S(G)| - |S'(G)| = 1$ 或 2 .

证明. 根据基本子图的定义, 图 G 的任意基本子图 $S(G)$ 仅有三类结构: 两两不交的匹配、不交圈的并、匹配与不交圈的混合并. 下面分情形讨论:

1. 若 $S(G)$ 为纯匹配结构: 删去任意一个顶点后, 对应匹配边被破坏, 剩余匹配数量减 1, 因此 $|S(G)| - |S'(G)| = 2$.
2. 若 $S(G)$ 为不交圈的并:
 - 若所有圈均为偶圈: 偶圈可分解为匹配, 归约至纯匹配情形:
 - 若包含奇圈: 设该奇圈顶点数为 $2k+1$. 删去其中 1 个顶点后, 奇圈退化为 $2k$ 个顶点的路, 可分解为 k 个不交匹配, 此时 $|S(G)| - |S'(G)| = 1$.
3. 若 $S(G)$ 为匹配与圈的混合结构: 根据删去顶点所属结构 (匹配边/奇圈/偶圈), 分别归约至上述两类情形, 差值仍仅取 1 或 2.

综上, 所有结构均满足 $S(G) - S'(G) \in \{1, 2\}$.

推论 3.2. 如果对于对于一个图 G , 它的最大基本子图 $S(G)$ 所有可能的组成部分存在一个奇圈, 则 $|S(G)| - |S'(G)| = 1$.

情形 1. 当 $|S(G)| \neq n - 1$ 时 由于 d_{n-1} immanantal 多项式的最后一个系数与 k 个顶点的基本子图 $S(G)$ 密切相关, 因此我们由下面的推论

推论 3.3. 令 G 是一个 n 个顶点的图, 如果 $|S(G)| \neq n - 1$, 则

$$\eta_{n-1}(G) = n - |S(G)|$$

引理 3.4. [6] 设 G 是一个顶点数 $n \geq 3$ 的因子临界图, 则以下结论均成立.

(i) G 的每个顶点 $v \in V(G)$ 都含于 G 的某个奇圈中.

(ii) 存在 G 的一个奇圈 C 和一个最大匹配 M , 使得 G 被 $E(C) \cup M$ 覆盖, 且 G 的边导出子图 $G[E(C) \cup (M - E(G[V(C)]))]$ 的最大度为 2. (因此, $G[E(C) \cup M]$ 是 G 的一个最大 Sachs 子图).

引理 3.5. [6] 设 G 是一个有 n 个顶点的连通图, 其最大匹配的大小为 $\nu(G)$. 以下结论等价:

(i) $|S(G)| = 2\nu(G)$.

(ii) G 要么存在完美匹配, 要么 $E(G[D(G)]) = \emptyset$ (即 $D(G)$ 导出的子图没有边).

定义 3.6. 设 M 是图 G 的一个最大匹配, 使得 M 覆盖 $G[D(G)]$ 中的孤立顶点数达到最大, $\mathcal{M}(G)$ 为 $G[D(G)]$ 中阶至少为 3 的连通分支的数量, 其中每个这样的连通分支恰有一个顶点未被 M 覆盖. 由定理 2.5(i) 可知, $\mathcal{F}(G)$ 中的每个图都是因子临界的. 由引理 3.4, 若 $\mathcal{F}(G) \neq \emptyset$, 则 $|S(G)| > 2\nu(G)$. 下一个引理将描述满足 $\mathcal{F}(G) \neq \emptyset$ 的图的最大 Sachs 子图.

引理 3.7. [6] 设 G 是具有 n 个顶点且无完美匹配的连通图, 若 $\mathcal{F}(G) \neq \emptyset$, 则

$$\eta_{n-1}(G) = n - 2\nu(G) - \mathcal{M}(G).$$

通过引理 3.5 和引理 3.7, 我们得到了本节的主要定理如下:

定理 3.8. 设 G 是 n 个顶点且 $|S(G)| \neq n - 1$ 的简单图, M 是满足定义 2.7 的 G 的一个最大匹配, 则

$$\eta_{n-1}(G) = \begin{cases} n - 2\nu(G), & \text{若 } G \text{ 有完美匹配或 } \mathcal{F}(G) = \emptyset, \\ n - 2\nu(G) - \mathcal{M}(G), & \text{否则.} \end{cases}$$

情形 2. 当 $|S(G)| = n - 1$ 时

在解决这个问题之前, 我们先用 Gallai-Edmonds 结构定理去讨论一下, 那种图结构它的 $|S(G)| = n - 1$.

定理 3.9. 若 $|D'_0(G)| - |B'_0(G)| = 1$, 则 $|S(G)| = n - 1$, 这里的 $|S(G)|$ 是 $S(G)$ 的顶点数量.

证明. 由定义2.4可知, 任意图 G 的顶点集可按照Gallai-Edmonds分解划分为 $C(G)$, $B(G)$, $D(G)$ 三部分. 因为子集 $C(G)$ 的所有连通分支均存在完美匹配, 因此 $C(G)$ 中全部顶点均可纳入最大基本子图 $S(G)$, $\mathcal{F}(G)$ 为 $G[D(G)]$ 中所有阶不小于3的因子临界分支, 有 $|B(G)| - |B'(G)|$ 个点是只与 $\mathcal{F}(G)$ 相连的, 所以 $\mathcal{F}(G)$ 与 $|B(G)| - |B'(G)|$ 相连可以构成 $S(G)$ 的一部分, 当 $|D'(G)| - |B'(G)| = 1$ 时, 根据匹配的基本性质, $|B'(G)|$ 个邻点最多仅能匹配覆盖 $|B'(G)|$ 个孤立点, 因此必定有一个点无法形成匹配, 所以 $|S(G)| = n - 1$.

例 3.10. 如图2所示, $D'_0(G) = [V_7, V_8, V_9]$, $B'_0(G) = B(G) = [V_5, V_6]$, $C(G) = [V_1, V_2, V_3, V_4]$, $C(G)$ 具有完美匹配, 因此 $C(G)$ 可以构成 $S(G)$ 的一部分, $\mathcal{F}(G) = [V_{10}, V_{11}, V_{12}]$, 它是因子临界的, 且由图我们可以看出, 它本身可以构成 $S(G)$ 的一部分, $B'_0(G)$ 与 $D'_0(G)$ 相互配对, 形成匹配构成 $S(G)$ 的一部分, 但是由于 $|D'_0(G)| - |B'_0(G)| = 1$, 所以在 $D'_0(G)$ 中一定由一个点, 没有构成 $S(G)$ 的一部分, 所以 $|S(G)| = n - 1$.

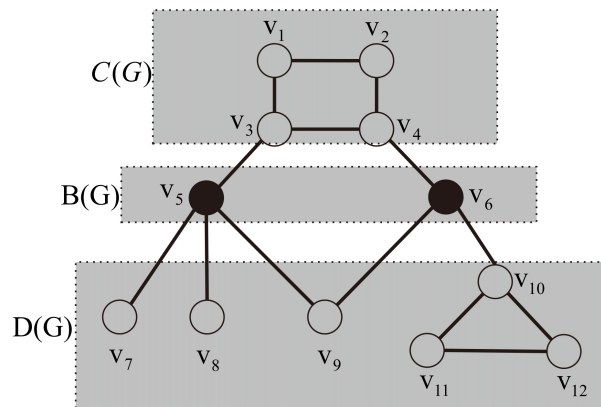


Figure 2. $S(G) = n - 1$

图 2. $S(G) = n - 1$

引理 3.11. 设 G 是 n 个顶点且 $|S(G)| \doteq n - 1$ 的简单图, 则 $\eta_{n-1}(G) = n - |S'(G)|$.

我们知道, 如果最大基本子图的顶点数为 k , 则对应于 d_n -immanant多项式的系数最后一项为 b_k , 但如果 $k = n - 1$, 我们知道对应的 $b_k = 0$, 因此我们要考虑前一项, 因此我们有以下结论. 由推论3.2我们可以得到

推论 3.12. 设 G 是 n 个顶点且 $|S(G)| \doteq n - 1$ 的简单图, 如果对于 $S(G)$ 所有可能的组成部分存在一个奇圈, 则 $\eta_{n-1}(G) = 2$.

引理 3.13. 设 G 是 n 个顶点且 $|S(G)| \doteq n - 1$ 的简单二部图, 则 $\eta_{n-1}(G) = 3$.

证明. 令 G 是 n 个顶点且 $|S(G)| \doteq n - 1$ 的简单二部图, 由 $|S(G)| \doteq n - 1$, 因此最后一个系数由 $S'(G)$ 所确定, 我们知道对于一个二部图来说, 它的基本子图可以看成全为匹配, 根据二部图基本子图的性质, 因此 $S(G) - S'(G) = 2$, 所以 $\eta_{n-1}(G) = 3$.

引理 3.14. 设 G 是 n 个顶点且 $|S(G)| \doteq n - 1$ 的简单图,则当 $\mathcal{F}(G) \neq \emptyset$ 时, $\eta_{n-1}(G) = 2$.

证明. 因为 $|S(G)| \doteq n - 1$,因此 G 不存在完美匹配,根据定理2.5,有 $c(D(G)) > |B(G)|$.因此,至少存在一个 $H \in \mathcal{F}(G)$,使得 H 恰有一个顶点未被 M 覆盖,由引理3.6,我们知道 $|S(G)| = 2\nu(G) + M(G)$,因此 $|S(G)| = 2\nu(G) + M(G) - 1 = n - 2$,所以 $\eta_{n-1}(G) = 2$.

推论 3.15. 路 P_n ,圈 C_n 和完全图 K_n 的第 n -*immanantal*多项式的零度满足下面的性质.

$$\begin{aligned} (i) \quad & \eta_{\text{per}}(C_n) = 0; \\ (ii) \quad & \eta_{\text{per}}(P_n) = \begin{cases} 3 & n \text{ 是奇数,} \\ 0 & n \text{ 是偶数.} \end{cases}; \\ (iii) \quad & \eta_{\text{per}}(K_n) = \begin{cases} 1 & n = 1, \\ 0 & n \geq 2. \end{cases} \end{aligned}$$

4. $\eta_{n-1} = 0$ 的图

我们知道对于一个 n 个顶点的简单图 G ,如果存在 n 个顶点的基本子图,则 $\eta_{n-1} = 0$,在本节中我们将描述第 $(n - 1)$ immanantal多项式的零度为零的图.

推论 4.1. 设 G 是一个 n 个顶点的简单连通图,如果 G 有完美匹配,则 $\eta_{\text{per}}(G) = 0$.

推论 4.2. 设 G 是一个 $n(n \geq 2)$ 个顶点的简单连通图,如果 G 具有覆盖 $G[D(G)]$ 的每个孤立顶点的最大匹配,则 $\eta_{\text{per}}(G) = 0$.

推论 4.3. 设 G 是一个 $n(n \geq 2)$ 个顶点的简单连通图,如果 $G[D(G)]$ 没有孤立顶点,则 $\eta_{\text{per}}(G) = 0$.

参考文献

- [1] Valiant, L.G. (1979) The Complexity of Computing the Permanent. *Theoretical Computer Science*, **8**, 189-201. [https://doi.org/10.1016/0304-3975\(79\)90044-6](https://doi.org/10.1016/0304-3975(79)90044-6)
- [2] Cvetkovic, D., Doob, M. and Sachs, H. (1980) Spectra of Graphs. Academic Press.
- [3] Brenner, J.L. and Brualdi, R.A. (1967) Eigenschaften der Permanentenfunktion. *Archiv der Mathematik*, **18**, 585-586. <https://doi.org/10.1007/bf01898864>
- [4] Merris, R. (1975) Two Problems Involving Schur Functions. *Linear Algebra and Its Applications*, **10**, 155-162. [https://doi.org/10.1016/0024-3795\(75\)90007-5](https://doi.org/10.1016/0024-3795(75)90007-5)
- [5] Borowiecki, M. (1985) On Spectrum and Per-Spectrum of Graphs. *Publications de l'Institut Mathématique*, **38**, 31-33.
- [6] Wu, T. and Lai, H. (2017) On the Permanental Nullity and Matching Number of Graphs. *Linear and Multilinear Algebra*, **66**, 516-524. <https://doi.org/10.1080/03081087.2017.1302403>

-
- [7] Li, W., Liu, S. and Zhang, H. (2014) A Note on the Permanental Roots of Bipartite Graphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, **34**, 49-56. <https://doi.org/10.7151/dmgt.1704>
- [8] Liu, S. and Zhang, H. (2013) On the Characterizing Properties of the Permanental Polynomials of Graphs. *Linear Algebra and Its Applications*, **438**, 157-172. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2012.08.026>
- [9] Liu, S. and Zhang, H. (2013) Characterizing Properties of Permanental Polynomials of Lollipop Graphs. *Linear and Multilinear Algebra*, **62**, 419-444. <https://doi.org/10.1080/03081087.2013.779271>
- [10] Wu, T. and Zhang, H. (2016) Per-Spectral and Adjacency Spectral Characterizations of a Complete Graph Removing Six Edges. *Discrete Applied Mathematics*, **203**, 158-170. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2015.09.014>
- [11] Zhang, H., Wu, T. and Lai, H. (2014) Per-Spectral Characterizations of Some Edge-Deleted Subgraphs of a Complete Graph. *Linear and Multilinear Algebra*, **63**, 397-410. <https://doi.org/10.1080/03081087.2013.869592>
- [12] Yu, G. and Qu, H. (2018) The Coefficients of the Immanantal Polynomial. *Applied Mathematics and Computation*, **339**, 38-44. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.06.057>
- [13] Lovász, L. and Plummer, M. (2009) Matching Theory. American Mathematical Society. <https://doi.org/10.1090/chel/367>
- [14] Yu, Q. and Liu, G. (2009) Graph Factors and Matching Extensions. Springer.