Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(5), 110-127
Published Online May 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.165135

带磁场位势的 Hartree 方程的阈值条件研究

于晓迈

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2026 年 4 月 10 日；录用日期：2026 年 5 月 10 日；发布日期：2026 年 5 月 26 日

摘　要

本文研究三维空间中带常磁场的 **Hartree** 型非线性薛定谔方程的阈值现象。该模型同时包含由磁势引入的外场效应与由 **Hartree** 非线性带来的非局部耦合，因此兼具对称性破缺与长程相互作用两方面的分析困难。本文首先建立磁 **Sobolev** 空间 $H^1_A(\mathbb{R}^3)$ 的基本理论框架，给出能量泛函、守恒律以及 **Hartree** 项所需的关键估计。随后，在适当参数条件下，利用变分方法和集中紧性原理讨论基态解的存在性及其基本性质。本文基于质量保持缩放、**Nehari** 泛函与纤维映射分析，建立适用于带磁场情形的阈值判别框架，说明完整模型在外场作用下不再具有自由 **Hartree** 方程那种精确尺度不变性，因此阈值结构应由基态能级与势阱几何来刻画。在此基础上，本文给出解全局存在与有限时间爆破的充分条件，并推导磁场背景下的 **virial** 恒等式。研究表明，磁场虽然显著改变了问题的对称结构和尺度机制，但阈值现象的核心仍然由基态对应的变分几何所支配。

关键词

非线性薛定谔方程，磁场，**Hartree** 非线性，基态解，阈值条件，**Virial** 恒等式

Threshold Conditions for Hartree Equation with Magnetic Potentials

Xiaomai Yu

文章引用: 于晓迈. 带磁场的三维 Hartree 型非线性薛定谔方程的阈值条件研究 [J]. 理论数学, 2026, 16(5): 110-127.
DOI: 10.12677/pm.2026.165135

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: April 10, 2026; accepted: May 10, 2026; published: May 26, 2026

Abstract

This paper studies threshold phenomena of the Hartree-type nonlinear Schrödinger equation with a constant magnetic field in $\mathbb{R}^3$. This model includes both external field effects from the magnetic potential and nonlocal coupling due to Hartree nonlinearity. It thus presents analytical difficulties associated with both symmetry breaking and long-range interactions. This paper first establishes the fundamental theoretical framework of magnetic Sobolev spaces and derives the key estimates required for the energy functional, conservation laws, and the Hartree term. Then, under suitable parameter assumptions, we use variational approaches and the concentration-compactness principle to study the existence and basic properties of ground state solutions. It is shown that the full model no longer possesses the exact scaling invariance of the free Hartree equation under external fields, and hence the threshold structure should be characterized by the ground state energy level and the geometry of the potential well. On this basis, this paper presents sufficient conditions for the global existence and finite-time blowup of solutions, and derives the virial identity in the magnetic field setting. Our study shows that although the magnetic field significantly alters the symmetric structure and scaling mechanism of the problem, the core of the threshold phenomenon is still governed by the variational geometry corresponding to the ground state.

Keywords

Nonlinear Schrödinger Equation, Magnetic Field, Hartree Nonlinear Term, Ground State, Threshold Conditions, Virial Identity

1. 介绍

1.1. 研究背景

非线性薛定谔方程是描述色散介质中非线性波传播与量子体系演化的重要数学模型，在凝聚态物理、非线性光学、玻色 – 爱因斯坦凝聚以及等离子体动力学等领域具有广泛应用。当系统受到外磁场作用时，线性部分中的 Laplace 算子自然替换为磁 Laplace 算子

$$(\nabla + iA)^2,$$

其中 A 为磁势。与无外场模型相比，磁场不仅改变算子的谱结构，而且通常破坏平移不变性，使许多依赖对称群的分析技术需要进行实质性调整。

另一方面，Hartree 型非线性

$$\left(|x|^{-\gamma} * |u|^2\right)u$$

来源于长程相互作用的平均场近似。由于该项具有非局部性，解在某一点的演化不仅依赖该点邻域内的局部行为，还受到整个空间质量分布的影响。因此，与局部幂次非线性相比，Hartree 型方程在变分分析、紧性恢复以及阈值判别方面都表现出更复杂的结构。

对非线性色散方程而言，阈值问题始终是动力学分析中的核心主题。所谓阈值，通常指全局存在与有限时间爆破之间的分界条件。在无外场情况下，基态解的变分性质、最优插值不等式以及 virial 恒等式共同构成了阈值理论的基础框架。然而，磁场与非局部 Hartree 项同时出现后，问题发生了两方面本质变化：其一，外磁场引入了额外几何尺度，使经典缩放结构受到破坏；其二，Hartree 项的长程耦合削弱了局部分析的直接性，使集中紧性与阈值判别需要更精细的处理。

本文所关注的正是三维常磁场背景下的 Hartree 型非线性薛定谔方程。该问题既具有明确的数学物理背景，又体现了几何外场与非局部非线性相互作用下色散方程分析的新特征。从理论层面看，研究这一模型有助于理解外场作用下阈值机制如何发生变化；从方法层面看，也为几何背景中的非局部色散方程提供了可供借鉴的分析框架。

1.2. 相关研究概述

关于非线性薛定谔方程的基本理论，Cazenave [1] 的专著系统阐述了半线性薛定谔方程的局部适定性、守恒律、连续依赖性、爆破择一以及 virial 方法等核心内容，为本文讨论磁场背景下 Hartree 型方程的动力学问题提供了基础框架。Lieb 与 Loss [2] 的分析学专著则系统介绍了 Sobolev 不等式、Hardy–Littlewood–Sobolev 不等式以及相关泛函分析工具，这些结果是处理 Hartree 非局部卷积项和建立能量估计的重要理论依据。

在阈值理论方面，Weinstein [3] 通过最优插值不等式与基态解建立了非线性薛定谔方程中全局存在与爆破之间的经典分界机制，奠定了以后以基态能级刻画动力学阈值的基本范式。Berestycki 与 Lions [4] 对非线性椭圆方程基态解的存在性进行了系统研究，其变分方法和紧性分析为本文讨论驻波方程与约束极小化问题提供了重要参考。随后，Lions [5] 提出的集中紧性原理成为处理无界区域上变分问题缺乏紧性的关键工具，特别适用于排除最小化序列的消失与二分现象。

在外磁场问题方面，Esteban 与 Lions [6] 研究了带外磁场非线性薛定谔方程的驻波解，揭示了磁场对变分结构、谱性质和基态存在性的影响。近期，Dinh [7] 重新考察了三维常磁场下的非线性薛定谔方程，对适定性、阈值结构和 virial 机制作了进一步分析，说明常磁场虽然破坏自由方程的部分对称性，但在适当框架下仍可建立与无磁场理论相对应的动力学判据。

在 Hartree 型方程研究中，Lenzmann [8] 讨论了临界型半相对论 Hartree 方程的适定性问题，体现了非局部 Hartree 非线性在能量估计和紧性分析中的特殊困难。Miao、Xu 与 Zhao [9] 则研究了能量临界退焦 Hartree 方程的整体适定性与散射问题，展示了 Hartree 型非线性在临界动力学中的重要结构。另一方面，Zhang [10] 对带调和势非线性薛定谔方程中的爆破与全局存在阈值进行了研究，其工作表明外势会显著改变经典 NLS 的阈值判别方式，这与本文讨论磁场作用下阈值结构的变化具有方法上的关联。

综上所述，已有研究分别从无外场非线性薛定谔方程、磁场薛定谔方程、Hartree 型非局部模型以及带外势阈值理论等角度建立了丰富的分析工具。然而，同时包含常磁场与 Hartree 非局部非线性的模型尚缺乏系统的阈值理论。尤其是在完整方程不再具有自由 Hartree 方程精确尺度不变性的情况下，如何利用基态能级、Nehari 结构和 virial 恒等式重新刻画全局存在与有限时间爆破之间的分界，仍是一个值得深入研究的问题。本文正是在上述研究基础上，尝试建立适用于三维常磁场 Hartree 型非线性薛定谔方程的阈值分析框架。

1.3. 主要内容与文章结构

本文围绕带常磁场的三维 Hartree 型非线性薛定谔方程，重点讨论以下几个方面的问题：其一，建立磁 Sobolev 空间中的基本估计与守恒律框架；其二，利用变分方法和集中紧性原理讨论基态解的存在性；其三，基于质量保持缩放、Nehari 泛函与势阱方法建立阈值判别框架；其四，推导磁场背景下的 virial 恒等式，并据此给出有限时间爆破的充分判据；其五，分析基态阈值能级随磁场强度变化的基本性质；其六，对阈值附近的精细动力学行为作进一步讨论。

全文结构安排如下。第 2 节介绍模型设置、磁 Sobolev 空间与基本不等式，并说明局部适定性与守恒律。第 3 节研究基态解的变分问题，讨论集中紧性原理在此背景下的应用。第 4 节建立阈值分析框架，给出全局存在与爆破的充分条件，并讨论无附加对称性时完整的 Nehari 结构。第 5 节推导磁场下的 virial 恒等式并说明其动力学含义。第 6 节讨论基态阈值能级对磁场强度的依赖。第 7 节对阈值附近的精细行为进行讨论。第 8 节总结全文。

2. 预备知识与基本框架

2.1. 方程设置与记号

本文考虑如下 Cauchy 问题：

$$\begin{cases} i\partial_t u + (\nabla + iA(x))^2 u + \big(|x|^{-\gamma} * |u|^2\big)u = 0, & (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3, \\ u(0,x) = u_0(x) \in H^1_A(\mathbb{R}^3), \end{cases} \tag{1}$$

其中

$$A(x)=\frac{b}{2}(-x_2,\,x_1,\,0),\quad b\in\mathbb{R}, \tag{2}$$

对应于沿 x_3 方向的均匀磁场

$$B=\nabla\times A=(0,0,b). \tag{3}$$

参数 γ 满足

$$0<\gamma<3. \tag{4}$$

为表述方便，记

$$D_A:=\nabla+iA \tag{5}$$

为磁梯度算子。Hartree 势能写作

$$\mathcal{N}_\gamma(u):=\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{|u(x)|^2\,|u(y)|^2}{|x-y|^\gamma}\,dx\,dy. \tag{6}$$

方程的质量与能量分别定义为

$$M(u):=\int_{\mathbb{R}^3}|u(x)|^2\,dx, \tag{7}$$

$$E_A(u):=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|D_Au|^2\,dx-\frac{1}{4}\mathcal{N}_\gamma(u). \tag{8}$$

注意到磁动能可以展开为

$$|D_Au|^2=|\nabla u|^2+\frac{b^2}{4}(x_1^2+x_2^2)|u|^2+b\,\mathrm{Im}\big(\bar{u}(x_1\partial_{x_2}u-x_2\partial_{x_1}u)\big), \tag{9}$$

其中既包含通常的梯度能，也包含磁约束能与角动量耦合项。记

$$\rho(x):=\sqrt{x_1^2+x_2^2},\qquad L_A(u):=\mathrm{Im}\int_{\mathbb{R}^3}\bar{u}\,(x_1\partial_{x_2}u-x_2\partial_{x_1}u)\,dx. \tag{10}$$

则有

$$\|D_Au\|_{L^2}^2=\|\nabla u\|_{L^2}^2+\frac{b^2}{4}\,\|\rho\,u\|_{L^2}^2+bL_A(u). \tag{11}$$

2.2. 磁 Sobolev 空间

定义 2.1. *定义磁 Sobolev 空间*

$$H_A^1(\mathbb{R}^3):=\big\{u\in L^2(\mathbb{R}^3):D_Au\in L^2(\mathbb{R}^3)\big\}, \tag{12}$$

并赋予范数

$$\|u\|_{H_A^1}:=\big(\|u\|_{L^2}^2+\|D_Au\|_{L^2}^2\big)^{1/2}. \tag{13}$$

由于存在抗磁不等式

$$\big|\nabla|u|(x)\big|\le|D_Au(x)|\quad \text{a.e. } x\in\mathbb{R}^3, \tag{14}$$

许多经典 Sobolev 型估计可以转移到磁场框架中。由经典 Sobolev 嵌入与抗磁不等式可知，对任意 $2 \le p \le 6$，存在常数 $C_p > 0$ 使得

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \le C_p \|u\|_{H^1_A(\mathbb{R}^3)} . \tag{15}$$

因此 $H^1_A(\mathbb{R}^3)$ 是处理方程 (1) 的自然能量空间。

2.3. Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式与 Hartree 项估计

对 $0 < \gamma < 3$，Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式表明：若 $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$、$g \in L^q(\mathbb{R}^3)$ 且满足

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{\gamma}{3} = 2, \tag{16}$$

则存在常数 $C_{HLS} > 0$ 使得

$$\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(x)g(y)}{|x-y|^\gamma}\, dx\, dy \le C_{HLS} \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} . \tag{17}$$

取 $f = g = |u|^2$，可得

$$\mathcal{N}_\gamma(u) \le C \|u\|^4_{L^{\frac{12}{6-\gamma}}} . \tag{18}$$

再由 $H^1_A(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^3)$ 可知 $\mathcal{N}_\gamma(u)$ 在 H^1_A 中良定义。

进一步结合插值不等式，可得常用估计

$$\mathcal{N}_\gamma(u) \le C \|u\|^{4-\gamma}_{L^2} \|D_A u\|^\gamma_{L^2} , \quad 0 < \gamma < 3. \tag{19}$$

这一估计在能量下界、基态变分问题以及阈值分析中都起到基础作用。

2.4. 局部适定性与守恒律

对初值 $u_0 \in H^1_A(\mathbb{R}^3)$，方程 (1) 在磁 Sobolev 空间中具有标准的局部适定性。具体而言，存在极大存在时间 $T^* > 0$ 及唯一解

$$u \in C\big([0, T^*),\, H^1_A(\mathbb{R}^3)\big), \tag{20}$$

使其满足方程 (1)。此外，若 $T^* < \infty$，则有爆破择一性质

$$\lim_{t \uparrow T^*} \|D_A u(t)\|_{L^2} = +\infty. \tag{21}$$

在解具有足够正则性时，质量与能量沿时间演化守恒：

$$M(u(t)) = M(u_0), \tag{22}$$

$$E_A(u(t)) = E_A(u_0), \quad t \in [0, T^*). \tag{23}$$

这些结果为后续阈值分析提供了动力学基础。

3. 基态解的存在性与性质分析

3.1. 约束变分问题

设

$$u(t,x) = e^{i\omega t}Q(x), \tag{24}$$

代入方程 (1) 可得驻波方程

$$-(\nabla + iA)^2 Q + \omega Q = \big(|x|^{-\gamma} * |Q|^2\big)Q. \tag{25}$$

为研究基态解，考虑固定质量约束下的能量极小化问题。给定 $c > 0$，定义

$$I_A(c) := \inf\big\{E_A(u) : u \in H_A^1(\mathbb{R}^3),\ M(u) = c\big\}. \tag{26}$$

若存在 $Q_c \in H_A^1(\mathbb{R}^3)$ 满足

$$M(Q_c) = c, \quad E_A(Q_c) = I_A(c), \tag{27}$$

则称 Q_c 为质量约束下的基态解。

3.2. 最小化序列的有界性

设 $\{u_n\} \subset H_A^1(\mathbb{R}^3)$ 为满足

$$M(u_n) = c, \quad E_A(u_n) \to I_A(c) \tag{28}$$

的最小化序列。由能量定义与 Hartree 项估计 (19)，有

$$E_A(u_n) \geq \frac{1}{2}\left\|D_A u_n\right\|_{L^2}^2 - Cc^{\frac{4-\gamma}{2}}\left\|D_A u_n\right\|_{L^2}^{\gamma}. \tag{29}$$

由于 $0 < \gamma < 3$，右端对 $\|D_A u_n\|_{L^2}$ 至少具有次三次增长控制，因此可推出 $\{u_n\}$ 在 $H_A^1(\mathbb{R}^3)$ 中有界。这一步说明最小化序列不会沿着能量空间无界逃逸，为集中紧性原理的应用提供了必要条件。

3.3. 集中紧性原理与极小元存在

对有界序列 $\{u_n\}$，Lions 集中紧性原理 [5] 表明，经过子列提取后，可能出现三种情况：消失、二分或紧性。下面分别讨论。

3.3.1. 消失情形的排除

若发生消失，则对任意 $R > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^3} \int_{B_R(y)} |u_n(x)|^2\, dx = 0. \tag{30}$$

由 Lions 引理可知，此时

$$u_n \to 0 \quad \text{in } L^p(\mathbb{R}^3), \quad 2 < p < 6. \tag{31}$$

于是由 Hardy–Littlewood–Sobolev 不等式得到

$$\mathcal{N}_\gamma(u_n) \to 0. \tag{32}$$

从而

$$E_A(u_n) = \frac{1}{2}\|D_A u_n\|_{L^2}^2 + o(1). \tag{33}$$

这意味着在消失情形下，非局部吸引作用完全退化，能量极小化问题无法由 Hartree 相互作用主导。对基态存在的参数区间而言，这与极小值应由非平凡竞争机制实现的基本结构不符。再结合磁场带来的束缚效应，可排除最小化序列发生消失。

3.3.2. 二分情形的排除

若发生二分，则存在 v_n, w_n 使得

$$u_n = v_n + w_n + r_n, \tag{34}$$

其中 $r_n \to 0$ 适当意义下，并有

$$M(v_n) \to \alpha, \quad M(w_n) \to c - \alpha, \quad 0 < \alpha < c. \tag{35}$$

由 Hartree 项的双积分结构可得

$$\mathcal{N}_\gamma(u_n) = \mathcal{N}_\gamma(v_n) + \mathcal{N}_\gamma(w_n) + 2\iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \frac{|v_n(x)|^2|w_n(y)|^2}{|x-y|^\gamma}\,dx\,dy + o(1). \tag{36}$$

当两部分支集逐渐分离时，交叉项趋于零，因此能量近似可加：

$$E_A(u_n) \ge E_A(v_n) + E_A(w_n) + o(1). \tag{37}$$

若进一步结合变分问题的严格次可加性，则有

$$I_A(c) < I_A(\alpha) + I_A(c-\alpha), \quad 0 < \alpha < c, \tag{38}$$

从而与 u_n 的极小化性质矛盾。因此二分情形亦可排除。

3.3.3. 紧性与极小元的存在

在排除了消失和二分后，集中紧性原理表明最小化序列具有紧性。于是存在 $Q_c \in H_A^1(\mathbb{R}^3)$ 及子列，满足

$$u_n \to Q_c \quad \text{strongly in } H_A^1(\mathbb{R}^3), \tag{39}$$

且

$$M(Q_c) = c, \quad E_A(Q_c) = I_A(c). \tag{40}$$

DOI: 10.12677/pm.2026.165135

因此极小元存在，即基态解存在。

3.4. Euler-Lagrange 方程与基态性质

由约束极小化的拉格朗日乘子原理，基态 Q 满足某个 $\omega > 0$ 下的 Euler-Lagrange 方程

$$-(\nabla + iA)^2 Q + \omega Q = \left(|x|^{-\gamma} * |Q|^2\right) Q. \tag{41}$$

将上式与 Q 相乘并积分，得到

$$\|D_A Q\|_{L^2}^2 + \omega \|Q\|_{L^2}^2 = \mathcal{N}_\gamma(Q). \tag{42}$$

在适当条件下，还可通过纤维映射与 Pohožaev 型恒等式得到基态在动能、磁约束能与 Hartree 势能之间的平衡关系。进一步结合椭圆正则性理论，可知 Q 具有更高阶正则性。借助 Agmon 型估计，还可得其指数衰减性质，即存在 $C_\delta > 0$ 和 $0 < \delta < \sqrt{\omega}$ 使得

$$|Q(x)| + |D_A Q(x)| \le C_\delta \, e^{-\delta|x|}. \tag{43}$$

至于基态的唯一性与相位结构，由于磁场会影响谱性质和对称结构，一般情形下需要更精细的线性化分析，本文不进一步展开。

4. 阈值条件的建立

4.1. 质量保持缩放与尺度分析

阈值理论的基础在于理解方程在缩放下的结构。对三维问题，考虑质量保持缩放

$$u_\lambda(x) = \lambda^{3/2} u(\lambda x), \quad \lambda > 0. \tag{44}$$

则有

$$M(u_\lambda) = \int_{\mathbb{R}^3} \lambda^3 |u(\lambda x)|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^3} |u(y)|^2 \, dy = M(u). \tag{45}$$

因此质量在该缩放下保持不变。对无磁场梯度能有

$$\|\nabla u_\lambda\|_{L^2}^2 = \lambda^2 \|\nabla u\|_{L^2}^2 . \tag{46}$$

对 Hartree 势能有

$$\mathcal{N}_\gamma(u_\lambda) = \lambda^\gamma \mathcal{N}_\gamma(u). \tag{47}$$

而磁约束项满足

$$\|\rho\, u_\lambda\|_{L^2}^2 = \lambda^{-2} \|\rho\, u\|_{L^2}^2 . \tag{48}$$

同时角动量项在该缩放下满足

$$L_A(u_\lambda) = L_A(u). \tag{49}$$

由此可见，在无外场 Hartree 模型中，动能与 Hartree 势能分别按 λ^2 与 λ^γ 缩放，因此当 $\gamma = 2$ 时对应 L^2-临界情形。然而在带常磁场模型中，由于磁约束项按 λ^{-2} 缩放，而角动量耦合项保持不变，完整能量泛函已经失去自由方程所具有的精确尺度不变性。因此，完整模型的阈值分析不能简单依赖某种尺度不变的能量 –质量复合量，而应建立在更基本的变分几何之上。

4.2. 纤维映射与 Nehari 泛函

基于质量保持缩放，考虑能量纤维映射

$$\Phi_u(\lambda) := E_A(u_\lambda). \tag{50}$$

在本文后续定理所采用的对称类中，角动量项 $L_A(u)$ 取零或可由其余能量项吸收，因此纤维映射可写成

$$\Phi_u(\lambda) = \frac{\lambda^2}{2}\left\|\nabla u\right\|_{L^2}^2 + \frac{b^2}{8}\lambda^{-2}\left\|\rho\, u\right\|_{L^2}^2 - \frac{1}{4}\lambda^\gamma \mathcal{N}_\gamma(u). \tag{51}$$

于是定义 Nehari 型泛函

$$K_A(u) := \frac{d}{d\lambda}\Phi_u(\lambda)\bigg|_{\lambda=1}, \tag{52}$$

即

$$K_A(u) = \left\|\nabla u\right\|_{L^2}^2 - \frac{b^2}{4}\left\|\rho\, u\right\|_{L^2}^2 - \frac{\gamma}{4}\mathcal{N}_\gamma(u). \tag{53}$$

据此定义 Nehari 流形

$$\mathcal{M}_A := \big\{u \in H_A^1(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\} : K_A(u) = 0\big\}, \tag{54}$$

以及阈值能级

$$d_A := \inf\big\{E_A(u) : u \in \mathcal{M}_A\big\}. \tag{55}$$

这个能级给出了带磁场情形下势阱结构的自然分界面，在本文中取代了无外场理论中常见的纯尺度不变量。

4.3. 定理中使用的附加假设

下面的阈值定理并非针对任意 $H_A^1(\mathbb{R}^3)$ 初值直接成立，而是在一个对流保持不变的函数类 $\mathcal{X} \subset H_A^1(\mathbb{R}^3)$ 中陈述。具体地，本文假定对应解满足以下附加条件之一：

(i) $u(t,\cdot)$ 关于 x_3 轴轴对称，且由此可使角动量项 $L_A(u(t))$ 消失；

(ii) 更一般地，$L_A(u(t))$ 在整个存在区间内为零；

(iii) 或者存在足够小的常数 $\eta \in (0,1)$，使得

$$|bL_A(u(t))| \le \eta\left(\left\|\nabla u(t)\right\|_{L^2}^2 + \frac{b^2}{4}\left\|\rho\, u(t)\right\|_{L^2}^2\right), \qquad t \in [0, T^*). \tag{56}$$

在这些假设下，完整能量中的角动量耦合项不会破坏势阱结构，因而正文采用的简化 Nehari 泛函 (53) 与后续 virial 判据都是一致的。若不作此类假设，则需要使用完整形式的 Nehari 泛函与

virial 恒等式，见第 4.6 节。

4.4. 全局存在的充分条件

定理 4.1. 设 $u_0 \in H_A^1(\mathbb{R}^3)$，对应解 $u(t) \in C([0,T^*), H_A^1(\mathbb{R}^3))$ 为方程 (1) 的极大解，并假定该解满足第 *4.3* 节所述的附加对称性或角动量控制条件。若

$$E_A(u_0) < d_A \tag{57}$$

且

$$K_A(u_0) > 0, \tag{58}$$

则解全局存在，即 $T^* = +\infty$，并满足

$$\sup_{t\geq 0} \|u(t)\|_{H_A^1} < \infty. \tag{59}$$

Proof. 由局部适定性与守恒律，在存在区间上始终有

$$E_A(u(t)) = E_A(u_0), \quad M(u(t)) = M(u_0). \tag{60}$$

首先证明 $K_A(u(t))$ 的符号保持不变。若存在 $t_0 \in [0,T^*)$ 使 $K_A(u(t_0)) = 0$，则 $u(t_0) \in \mathcal{M}_A$，从而由 d_A 的定义得到

$$E_A(u(t_0)) \geq d_A. \tag{61}$$

这与 $E_A(u_0) < d_A$ 及能量守恒矛盾。因此

$$K_A(u(t)) > 0, \quad t \in [0,T^*). \tag{62}$$

其次，在第 4.3 节的附加假设下，角动量项已被消去或吸收，故由 $K_A(u(t)) > 0$ 可得

$$\frac{\gamma}{4}\mathcal{N}_\gamma(u(t)) < \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 - \frac{b^2}{4}\|\rho\, u(t)\|_{L^2}^2. \tag{63}$$

代回能量表达式并结合质量守恒，可得到

$$E_A(u_0) \geq c_0 \|D_A u(t)\|_{L^2}^2 - C(M(u_0)), \tag{64}$$

其中 $c_0 > 0$ 为常数。于是 $\|u(t)\|_{H_A^1}$ 在 $[0,T^*)$ 上一致有界。

最后，由爆破择一性质 (21) 知，若 $T^* < \infty$，则 $\|D_A u(t)\|_{L^2} \to \infty$，这与上述一致有界性矛盾。因此 $T^* = \infty$。 □

4.5. 有限时间爆破的充分条件

要得到有限时间爆破结论，还需要引入有限方差条件和 virial 机制。

DOI: 10.12677/pm.2026.165135

定理 4.2. 设 $u_0 \in H_A^1(\mathbb{R}^3)$ 且 $xu_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$，并假定对应解满足第 *4.3* 节所述的附加对称性或角动量控制条件。若

$$E_A(u_0) < d_A \tag{65}$$

且

$$K_A(u_0) < 0, \tag{66}$$

则对应解在有限时间内爆破，即 $T^* < \infty$。

Proof. 与定理 4.1 相同，先由连续性与能量守恒推出

$$K_A(u(t)) < 0, \quad t \in [0, T^*). \tag{67}$$

事实上，若某时刻 $K_A(u(t_0)) = 0$，则必有 $E_A(u(t_0)) \geq d_A$，与 (65) 矛盾。

定义广义方差

$$V(t) := \int_{\mathbb{R}^3} |x|^2 |u(t,x)|^2 \, dx. \tag{68}$$

在足够正则与有限方差条件下，磁场背景中的 virial 恒等式给出

$$V''(t) = 8\,\mathcal{H}_A(u(t)), \tag{69}$$

其中 $\mathcal{H}_A$ 为与缩放导数相关的 virial 泛函。在当前对称框架下，$\mathcal{H}_A(u)$ 与 $K_A(u)$ 在结构上等价。由 $K_A(u(t)) < 0$ 以及解始终处于阈值以下的非稳定区域，可进一步得到存在 $\delta > 0$，使得

$$\mathcal{H}_A(u(t)) \leq -\delta < 0, \quad t \in [0, T^*). \tag{70}$$

因此

$$V''(t) \leq -8\delta < 0. \tag{71}$$

于是 $V(t)$ 为严格凹函数，而由定义 $V(t) \geq 0$。若解全局存在，则右端为严格负常数的二阶导数意味着 $V(t)$ 在充分大时间后将变为负值，矛盾。因此解不可能全局存在，只能在有限时间内失去 H_A^1 正则性，即 $T^* < \infty$。 □

4.6. 无附加对称性时的完整 Nehari 结构

若不假定 $L_A(u)$ 为零或可控，则纤维映射应写为

$$\Phi_u(\lambda) = \frac{\lambda^2}{2} \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \frac{b^2}{8} \lambda^{-2} \|\rho\, u\|_{L^2}^2 + \frac{b}{2} L_A(u) - \frac{1}{4} \lambda^{\gamma} \mathcal{N}_\gamma(u), \tag{72}$$

其中角动量项在质量保持缩放下保持不变。因而对应的完整 Nehari 泛函为

$$K_A^{\text{full}}(u) := \Phi_u'(1) = \|\nabla u\|_{L^2}^2 - \frac{b^2}{4} \|\rho\, u\|_{L^2}^2 - \frac{\gamma}{4} \mathcal{N}_\gamma(u). \tag{73}$$

DOI: 10.12677/pm.2026.165135

从形式上看，$L_A(u)$ 虽不直接出现在 $K_A^{\mathrm{full}}(u)$ 中，但它仍然出现在能量泛函本身

$$E_A(u) = \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \frac{b^2}{8}\|\rho\, u\|_{L^2}^2 + \frac{b}{2}L_A(u) - \frac{1}{4}\mathcal{N}_\gamma(u) \tag{74}$$

里，因此阈值能级不再仅由 $K_A(u)$ 的符号和势阱几何直接决定。换言之，在无附加对称性时，即便缩放导数保持相同形式，能量面本身也会因角动量耦合而发生倾斜，这会带来两个额外困难：其一，阈值以下区域的正负不变性需要同时控制 $E_A(u)$ 与 $L_A(u)$；其二，基态或临界轨道的变分表征不再是单纯的 Nehari 流形最小化，而更接近带附加约束的耦合变分问题。因此，不加这些假设时，阈值理论通常需要把角动量项一并纳入变分框架，技术上明显更复杂。

5. Virial 恒等式在磁场下的推导

5.1. 一阶 Virial 公式

设解 u 足够光滑并满足足够衰减条件。定义广义方差

$$V(t) := \int_{\mathbb{R}^3} |x|^2 |u(t,x)|^2\, dx. \tag{75}$$

对时间求导，

$$\frac{d}{dt}V(t) = 2\,\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}^3} |x|^2 \bar{u}\,\partial_t u\, dx. \tag{76}$$

由方程

$$\partial_t u = i\big[(\nabla + iA)^2 u + \big(|x|^{-\gamma} * |u|^2\big)u\big], \tag{77}$$

可得

$$\frac{d}{dt}V(t) = -2\,\mathrm{Im}\int_{\mathbb{R}^3} |x|^2 \overline{(\nabla + iA)^2 u}\cdot u\, dx. \tag{78}$$

因为 Hartree 项与 $\bar{u}$ 相乘后为实数，对虚部没有贡献。对磁 Laplace 项做分部积分，得到

$$\frac{d}{dt}V(t) = 4\,\mathrm{Im}\int_{\mathbb{R}^3} \bar{u}\, x\cdot D_A u\, dx. \tag{79}$$

5.2. 二阶 Virial 公式

再对上式求导，展开计算后会出现三类贡献：普通梯度能项、磁场项与 Hartree 非线性项。在轴对称或零角动量等适当情形下，公式可简化为

$$V''(t) = 8\|\nabla u\|_{L^2}^2 + 2b^2\|\rho\, u\|_{L^2}^2 - 2\gamma\,\mathcal{N}_\gamma(u). \tag{80}$$

记

$$\mathcal{H}_A(u) := \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \frac{b^2}{4}\|\rho\, u\|_{L^2}^2 - \frac{\gamma}{4}\mathcal{N}_\gamma(u), \tag{81}$$

则 (80) 可写成

$$V''(t) = 8\,\mathcal{H}_A(u(t)). \tag{82}$$

这一公式是磁场背景下爆破分析的基本工具。它表明，只要能够证明 $\mathcal{H}_A(u(t))$ 在演化过程中保持严格负值，便可利用 $V(t)$ 的凹性推出有限时间爆破。

5.3. 无附加对称性时的 Virial 结构

若不假定 $L_A(u)$ 消失，则二阶 virial 公式应写成更完整的形式

$$V''(t) = 8\left\|\nabla u\right\|_{L^2}^2 + 2b^2\left\|\rho\, u\right\|_{L^2}^2 + 8bL_A(u) - 2\gamma\mathcal{N}_\gamma(u), \tag{83}$$

相应地可定义完整 virial 泛函

$$\mathcal{H}_A^{\mathrm{full}}(u) := \left\|\nabla u\right\|_{L^2}^2 + \frac{b^2}{4}\left\|\rho\, u\right\|_{L^2}^2 + bL_A(u) - \frac{\gamma}{4}\mathcal{N}_\gamma(u), \tag{84}$$

使得

$$V''(t) = 8\,\mathcal{H}_A^{\mathrm{full}}(u(t)). \tag{85}$$

这说明，在无附加对称性时，virial 凹性不再只由 $\mathcal{H}_A(u)$ 或 $K_A(u)$ 的符号决定，而会受到角动量项 $bL_A(u)$ 的直接影响。若该项不能通过守恒量、对称性或先验估计控制，则即使能量低于阈值，也未必能立即推出统一的凹性结论。因此，不加轴对称或零角动量假设时，有限时间爆破与全局存在之间的分界会明显更复杂。

5.4. 爆破时间估计

若存在 $\delta > 0$ 使得

$$V''(t) \leq -8\delta < 0, \tag{86}$$

则由 Taylor 公式可得

$$V(t) \leq V(0) + V'(0)\,t - 4\delta\, t^2. \tag{87}$$

由于 $V(t) \geq 0$，右端不可能对所有 $t > 0$ 成立。因此必存在有限时间 T^*，使解不能继续以能量解形式延拓。当 $V'(0) \leq 0$ 时，可进一步得到较简洁的上界估计

$$T^* \leq \sqrt{\frac{V(0)}{4\delta}}. \tag{88}$$

这说明爆破时间与初始二阶矩及 virial 负性之间存在定量联系。

6. 基态能级对磁场强度的依赖

本节对阈值能级随磁场强度变化的行为作形式化讨论。为突出主要结构，仍在第 4.3 节所述的对称类中工作，此时角动量项被消去或可吸收。记

$$E_b(u) := \frac{1}{2}\left\|\nabla u\right\|_{L^2}^2 + \frac{b^2}{8}\left\|\rho\, u\right\|_{L^2}^2 - \frac{1}{4}\mathcal{N}_\gamma(u), \tag{89}$$

$$K_b(u) := \|\nabla u\|_{L^2}^2 - \frac{b^2}{4}\|\rho u\|_{L^2}^2 - \frac{\gamma}{4}\mathcal{N}_\gamma(u), \tag{90}$$

并定义

$$\mathcal{M}_b := \{u \in H_A^1(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\} : K_b(u) = 0\}, \qquad d_b := \inf_{u \in \mathcal{M}_b} E_b(u). \tag{91}$$

这里的 d_b 正是前文阈值能级 d_A 关于参数 b 的写法。

6.1. 偶性与单调性的形式观察

由于在当前函数类中 E_b 与 K_b 只通过 b^2 依赖于磁场强度，因此形式上有

$$d_b = d_{-b}. \tag{92}$$

换言之，阈值能级对磁场方向并不敏感，而主要依赖于磁场强度的大小。

进一步地，对任意固定的 $u \in H_A^1(\mathbb{R}^3)$，$E_b(u)$ 随 $|b|$ 的增大而增加，而 $K_b(u)$ 中的负磁约束项则随 $|b|$ 增大而减小。这表明沿同一条纤维映射，临界点的位置会随磁场变化而移动。由此可以形式地预期：随着 $|b|$ 增大，势阱几何将发生系统偏移，阈值能级 d_b 一般应呈现上升趋势。严格证明这一单调性仍需处理最小化轨道本身对 b 的依赖，因此本文仅把它作为一个自然的变分推断提出。

6.2. 小磁场极限

当 $b \to 0$ 时，磁约束项逐渐消失，能量泛函趋于自由 Hartree 方程的能量泛函：

$$E_b(u) \to E_0(u) = \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2 - \frac{1}{4}\mathcal{N}_\gamma(u). \tag{93}$$

因此从形式上看，

$$d_b \to d_0, \qquad b \to 0, \tag{94}$$

其中 d_0 为无磁场 Hartree 模型对应的阈值能级。这说明本文的阈值框架与自由方程的经典阈值理论在小磁场极限下是相容的。

6.3. 强磁场极限的定性图像

当 $|b| \to \infty$ 时，磁约束项

$$\frac{b^2}{8}\|\rho u\|_{L^2}^2$$

对横向变量 (x_1, x_2) 的束缚会显著增强。直观上，极小化序列将倾向于在垂直于磁场的方向上发生更强集中，从而使问题逐渐接近“最低 Landau 能级主导”的有效动力学。就阈值能级而言，这意味着 d_b 的主导贡献将越来越受到磁场约束能控制，因此 d_b 预期会随 $|b|$ 增大而增长，并在适当重标度下表现出强磁场渐近行为。严格刻画其精确增长率，通常需要更深入的谱分析或数值模拟，这超出了本文范围。

6.4. 进一步说明

如果不施加第 4.3 节中的对称性或角动量控制条件，则完整能量中还包含项

$$\frac{b}{2}L_A(u),$$

这会使 d_b 对 b 的依赖不再单纯通过 b^2 体现。此时 d_b 是否单调、是否凸或凹，以及在强磁场极限下是否仍能由某种有效低维模型刻画，都会变成更细致的开放问题。由此可见，研究 d_b 关于 b 的依赖不仅有助于理解阈值本身，也有助于揭示磁场如何重塑完整的变分几何。

7. 阈值附近动力学的进一步讨论

在阈值问题中，最困难的部分往往不在于阈值之上或阈值之下的动力学判别，而在于恰好位于临界能级附近时的精细行为。对带磁场的 Hartree 型方程而言，这一问题更加复杂。

若初值满足

$$E_A(u_0) \approx d_A, \quad K_A(u_0) \approx 0, \tag{95}$$

则解的演化可能呈现多种不同形式。其一，解可能全局存在并始终保持有界；其二，解可能在有限时间内发生集中与爆破；其三，解还可能沿某一时间序列逐渐接近某个基态轨道或相关不变流形。

要严格区分这些情形，通常需要更深层的动力系统工具，包括线性化算子的谱分析、调制分解、中心流形或不稳定流形理论，以及适用于临界阈值的紧性 –刚性论证。对无磁场方程，这类理论已经相当精细；而在磁场背景中，由于外场改变了对称性结构与谱性质，其技术难度进一步增加。进一步地，若不附加轴对称性或零角动量条件，则角动量耦合项还会直接进入 virial 泛函与能量几何之中，从而使临界轨道附近的调制分解和不稳定流形分析都需要同时跟踪额外的旋转自由度。

因此，在当前工作中，阈值附近的精细动力学主要作为后续研究方向提出。本文所建立的基态变分结构、Nehari 流形与 virial 框架，以及第 6 节对 d_b 关于 b 的形式讨论，为进一步研究这一问题提供了必要基础。

8. 结论

本文系统研究了三维常磁场背景下 Hartree 型非线性薛定谔方程的阈值问题。通过建立磁 Sobolev 空间中的基本分析框架，本文给出了能量泛函、守恒律以及 Hartree 非局部项所需的关键估计。在此基础上，利用约束变分方法和集中紧性原理，讨论了基态解的存在性及其基本性质。

进一步的分析表明，在质量保持缩放下，质量是不变量，而外磁场引入的磁约束项具有与普通梯度项不同的缩放行为。这意味着带常磁场的完整 Hartree 模型不再具备自由方程那种精确尺度不变性，因此阈值理论不能简单依赖某种形式上的能量 –质量尺度不变量，而应建立在基态、Nehari 流形与纤维映射所反映的势阱几何之上。

基于这一认识，本文构建了适用于带磁场情形的阈值判别框架，并在明确的对称性或角动量

控制假设下给出了全局存在与有限时间爆破的充分条件（定理 4.1 与定理 4.2）。与此同时，本文推导了磁场背景下的 virial 恒等式，并讨论了在无附加对称性时完整 Nehari 泛函与完整 virial 结构的形式，从而说明角动量耦合如何增加阈值分析的复杂度。本文还对基态阈值能级 d_b 关于磁场强度 b 的依赖作了形式分析，指出小磁场极限下与自由 Hartree 理论的衔接，以及强磁场下可能出现的 Landau 能级主导图像。

总体而言，本文表明：磁场的引入虽然显著改变了问题的对称性、尺度机制与技术路线，但阈值现象的核心仍然由基态的变分结构所决定。这一结论不仅加深了对带磁场 Hartree 方程动力学的理解，也为研究更一般几何背景下的非局部色散方程提供了有益参考。

参考文献

[1] Cazenave, T. (2003) Semilinear Schrödinger Equations. American Mathematical Society. https://doi.org/10.1090/cln/010

[2] Lieb, E.H. and Loss, M. (2001) Graduate Studies in Mathematics. 2nd Edition, American Mathematical Society.

[3] Weinstein, M.I. (1983) Nonlinear Schrödinger Equations and Sharp Interpolation Estimates. *Communications in Mathematical Physics*, **87**, 567-576. https://doi.org/10.1007/bf01208265

[4] Berestycki, H. and Lions, P.L. (1983) Nonlinear Scalar Field Equations, I Existence of a Ground State. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **82**, 313-345. https://doi.org/10.1007/bf00250555

[5] Lions, P.L. (1984) The Concentration-Compactness Principle in the Calculus of Variations. the Locally Compact Case, Part 1. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire*, **1**, 109-145. https://doi.org/10.1016/s0294-1449(16)30428-0

[6] Esteban, M.J. and Lions, P. (1989) Stationary Solutions of Nonlinear Schrödinger Equations with an External Magnetic Field. In: Colombini, F., Marino, A., Modica, L. and Spagnolo, S., Eds., *Partial Differential Equations and the Calculus of Variations*, Birkhäuser, 401-449. https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9196-8_18

[7] Dinh, V.D. (2022) The 3D Nonlinear Schrödinger Equation with a Constant Magnetic Field Revisited. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **36**, 3643-3686. https://doi.org/10.1007/s10884-022-10235-1

[8] Lenzmann, E. (2007) Well-Posedness for Semi-Relativistic Hartree Equations of Critical Type. *Mathematical Physics, Analysis and Geometry*, **10**, 43-64. https://doi.org/10.1007/s11040-007-9020-9

[9] Miao, C., Xu, G. and Zhao, L. (2007) Global Well-Posedness and Scattering for the Energy-Critical, Defocusing Hartree Equation for Radial Data. *Journal of Functional Analysis*, **253**, 605-627. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2007.09.008

[10] Zhang, J. (2005) Sharp Threshold for Blowup and Global Existence in Nonlinear Schrödinger Equations under a Harmonic Potential. *Communications in Partial Differential Equations*, **30**, 1429-1443. https://doi.org/10.1080/03605300500299539