Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(5), 99-109
Published Online May 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.165134

具有潜伏期传染与年龄结构的 SEI 模型动力学分析

王　梦

武昌首义学院基础科学部，湖北　武汉

收稿日期：2026 年 4 月 9 日；录用日期：2026 年 5 月 9 日；发布日期：2026 年 5 月 26 日

摘　要

本文研究了一类具有年龄结构的 **SEI** 模型。该模型强调潜伏者人群对易感者的感染机制，并刻画了疾病在潜伏期的转化过程。在给定初值与边界条件下，讨论了模型解的非负性和最终有界性，并确立了决定疾病最终是否爆发的关键阈值：基本再生数 $\mathcal{R}_0$。通过 **Lyapunov** 直接法，建立了无病平衡点 $\mathcal{P}^0$ 以及地方病平衡点 $\mathcal{P}^*$ 的全局稳定性判据。结果表明：当 $\mathcal{R}_0 < 1$ 时，无病平衡点 $\mathcal{P}^0$ 全局渐近稳定，疾病最终将会消亡；当 $\mathcal{R}_0 > 1$ 时，系统存在唯一地方病平衡点 $\mathcal{P}^*$ 且其全局渐近稳定，疾病将长期存在并形成地方病。

关键词

基本再生数，潜伏期传染，年龄结构，**SEI** 模型，**Lyapunov** 泛函

Dynamic Analysis of an Age-Structured SEI Model with Latent Infectivity

Meng Wang

Department of Basic Sciences, Wuchang Shouyi University, Wuhan Hubei

Received: April 9, 2026; accepted: May 9, 2026; published: May 26, 2026

文章引用: 王梦. 具有潜伏期传染与年龄结构的 SEI 模型动力学分析 [J]. 理论数学, 2026, 16(5): 99-109.
DOI: 10.12677/pm.2026.165134

Abstract

This paper investigates an SEI epidemic model with age structure, in which the infection mechanism from exposed individuals to susceptible individuals is emphasized, and the transition process during the latent period is characterized. Under given initial and boundary conditions, the nonnegativity and ultimate boundedness of solutions are established. Moreover, the basic reproduction number $\mathcal{R}_0$, which determines whether an outbreak will occur, is derived. By employing the Lyapunov direct method, global stability criteria for the disease-free equilibrium $\mathcal{P}^0$ and the endemic equilibrium $\mathcal{P}^*$ are obtained. The results show that when $\mathcal{R}_0 < 1$, the disease-free equilibrium $\mathcal{P}^0$ is globally asymptotically stable, implying that the disease will eventually die out; when $\mathcal{R}_0 > 1$, there exists a unique endemic equilibrium $\mathcal{P}^*$ which is globally asymptotically stable, indicating that the disease will persist and evolve into an endemic state.

Keywords

Basic Reproduction Number, Latent Infectivity, Age Structure, SEI Model, Lyapunov Functional

1. 引言

传染性疾病一直以来都是影响全球公共卫生安全的重大威胁. 从 20 世纪初, 数学工具便逐渐引入到传染病领域, 用于建立各类数学模型并分析复杂的生物学现象. 1911 年, Ross 博士通过建立微分方程模型, 研究了疟疾在蚊虫与人群之间传播的动态过程, 这一成果具有重要的现实意义. 1927 年, Kermack 和 McKendrick [1] 提出经典的 SIR 仓室模型, 研究黑死病及瘟疫的传播规律. 在此基础上, 进一步讨论了地方病持续存在问题, 得到了疾病是否流行的阈值理论 [2]. 依据经典的仓室模型并结合现实病毒传播特征, 引入分布时滞、年龄结构等因素, 提出了多种适用于不同场景的传染病模型 [3]. 这些研究成果显著促进了数学模型在传染病动力学、系统生物学以及数量遗传学等领域的发展与应用.

近年来, 新发呼吸道传染病在全球范围内传播, 其中部分疾病由冠状病毒引起. 冠状病毒是一种包膜 RNA 病毒, 广泛分布于人类和其他哺乳动物中, 可引起呼吸道、肝脏和神经系统疾病 [4]. 研究表明, 在部分呼吸道传染病的感染过程中, 无症状感染在病毒传播链中扮演着重要角色. 无症状感染者的存在显著降低了通过症状筛查识别感染者的效率, 给控制传播源带来了极大的困难 [5]. 近年来, 部分国内外学者针对病毒在潜伏期阶段即具备感染力的特点, 建立了相关病毒动力学模型的研究 [6]. 此外, 一些呼吸道传染病还呈现出明显的年龄异质性特征, 即不同年龄组易感人群的感染风险存在差异 [7]. Yu 等人 [8] 在 2023 年发展了一类具有媒介效应和年龄结构的病毒传播模型. 通过对实际年龄结构的分析发现, 青少年感染比例较低, 而成年人应更加重视自我防护. Webb 和 Zhao [9] 则建立了一类同时包含感染年龄和疫苗接种年龄结构的传染病模型, 并从接种疫苗年龄的角度分析了疫苗接种的效果.

基于上述研究背景和数学建模相关理论, 我们不仅需要考虑到病毒在传播过程中表现出的潜伏期传染性, 还应关注易感者生理特征的差异性. 与现有的研究工作相比, 本文提出的动力学模型具有以下特点. 虽然许多学者在流行病建模时考虑了年龄结构, 但通常假设感染者群体具有传染性, 从而忽略了潜伏者群体对病毒传播的关键作用. 近年的研究表明, 潜伏者个体同样可能具有传染性 [10] [11]. 另一方面, 部分学者在研究潜伏期传染性时, 多采用无年龄结构模型, 未能刻画不同年龄个体在感染风险上的差异性 [12] [13].

为此, 本文在经典传染病动力学模型的基础上引入年龄结构, 刻画不同年龄个体在感染风险和接触行为上的异质性, 从而建立一类具有潜伏期传染性与年龄结构特征的 SEI 流行病模型. 模型刻画了疾病的双重传播机制（潜伏者 -易感者与感染者 -易感者）, 并考虑了易感者的年龄结构对传播率的影响. 本文的主要工作: (i) 证明模型解的非负性与有界性; (ii) 讨论平衡点的存在性并给出基本再生数的定义; (iii) 构造合适的 Lyapunov 泛函, 证明系统平衡点的全局渐近稳定性. 模型的具体表达式如下

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S(t,a)}{\partial t} + \dfrac{\partial S(t,a)}{\partial a} = -m(a)S(t,a) - \beta_1(a)S(t,a)E(t) - \beta_2(a)S(t,a)I(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t} = \displaystyle\int_0^\infty \beta_1(a)S(t,a)E(t)\mathrm{d}a + \int_0^\infty \beta_2(a)S(t,a)I(t)\mathrm{d}a - \delta E(t) - \mu_E E(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} = \delta E(t) - \mu_I I(t). \end{cases} \tag{1.1}$$

变量 $S(t,a)$, $E(t)$ 和 $I(t)$ 分别表示年龄为 a 的易感者群体, 潜伏者群体和感染者群体. 参数 $m(a)$ 表示年龄为 a 的易感者自然移除率; μ_E 和 μ_I 分别表示潜伏感染者和感染者的移出率. $\beta_1(a)$ 和 $\beta_2(a)$ 分别表示年龄为 a 的易感者与潜伏者和感染者接触后的有效传播率. δ 为潜伏者转化为显性感染者的转化速率.

为确保模型的适定性并便于后续分析, 需要作出如下假设: β_1, β_2 和 m 是定义在区间 $[0,+\infty)$ 上的非负有界函数, 并满足 $\inf_{a\geqslant 0} m(a) > 0$. 此外, β_1, β_2 是 Lipschitz 连续的. 模型 (1.1) 所满足的边界条件和初始条件为

$$\begin{aligned} &S(t,0) = \Lambda, \quad t > 0, \qquad S(0,a) = S_0(a) \in L^1_+(0,+\infty), \quad a \geqslant 0, \\ &E(0) = E_0 \geqslant 0, \qquad I(0) = I_0 \geqslant 0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

接下来, 我们定义系统的状态空间. 令 $X = L^1(0,+\infty)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, 这里的 L^1 是可积函数空间. 赋范数

$$\|(S,E,I)\|_X = \int_0^\infty |S(a)|\,\mathrm{d}a + |E| + |I|, \tag{1.3}$$

该范数在生物学意义上表示各类群体相加的总人口数, 其正锥定义为 $X_+ = L^1_+(0,+\infty)\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$. 根据年龄结构系统理论可知, (1.1) 和 (1.2) 在正锥 X_+ 上存在唯一的非负解, 并诱导一个连续半流. 当满足初始条件 (1.2) 时, 系统的解在 $t>0$ 上是非负的, 即

$$S(t,a)\geqslant 0,\quad E(t)\geqslant 0,\quad I(t)\geqslant 0,\quad \forall t\geqslant 0. \tag{1.4}$$

定义

$$N(t) = \int_0^\infty S(t,a)\mathrm{d}a + E(t) + I(t). \tag{1.5}$$

对 $N(t)$ 关于时间 t 求导可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} =& \int_0^\infty \left(-\frac{\partial S(t,a)}{\partial a} - m(a)S(t,a) - \beta_1(a)S(t,a)E(t) - \beta_2(a)S(t,a)I(t)\right)\mathrm{d}a\\ &+ \int_0^\infty \beta_1(a)S(t,a)E(t)\mathrm{d}a + \int_0^\infty \beta_2(a)S(t,a)I(t)\mathrm{d}a - \mu_E E(t) - \mu_I I(t)\\ =& -S(t,a)\Big|_{a=0}^{a=\infty} - \int_0^\infty m(a)S(t,a)\mathrm{d}a - \mu_E E(t) - \mu_I I(t)\\ \leqslant& \Lambda - \mu\left(\int_0^\infty S(t,a)\mathrm{d}a + E(t) + I(t)\right),\end{aligned}$$

其中 $\mu = \min\{\inf_{a\geqslant 0} m(a), \mu_E, \mu_I\}$. 结合 Gronwall 不等式可知 $N(t)$ 是最终有界的, 并构成系统的一个正向不变集

$$\Omega = \left\{(S(\cdot),E,I)\in L^1_+(0,\infty)\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+ : \int_0^\infty S(a)\mathrm{d}a + E + I \leqslant \frac{\Lambda}{\mu}\right\}, \tag{1.6}$$

且所有解最终进入并保持在该集合中.

2. 平衡点的存在性

在本节中, 我们将讨论模型 (1.1) 平衡点的存在性, 并给出基本再生数的定义. 在传染病动力学中, 基本再生数 $\mathcal{R}_0$ 是衡量疾病最终是否爆发的关键阈值条件. 其生物学含义表示为在完全易感的群体中, 一个典型感染者在其平均患病周期内所能感染的健康人数. 系统所有的可行平衡点满足如下方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S(a)}{\mathrm{d}a} = -m(a)S(a) - \beta_1(a)S(a)E - \beta_2(a)S(a)I,\\ 0 = \displaystyle\int_0^\infty \beta_1(a)S(a)E\mathrm{d}a + \int_0^\infty \beta_2(a)S(a)I\mathrm{d}a - \delta E - \mu_E E,\\ 0 = \delta E - \mu_I I.\end{cases} \tag{2.1}$$

显然, 模型 (1.1) 总是存在一个无病平衡点 $\mathcal{P}^0(S^0(a),0,0)$, 其中 $S^0(a)=\Lambda \mathrm{e}^{-\int_0^a m(\tau)\mathrm{d}\tau}$. 通过下一代矩阵方法 [14], $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{V}$ 的具体形式定义如下

$$\mathcal{F}=\begin{pmatrix}\int_0^\infty \beta_1(a)S(t,a)E(t)\mathrm{d}a+\int_0^\infty \beta_2(a)S(t,a)I(t)\mathrm{d}a\\ 0\end{pmatrix},\quad \mathcal{V}=\begin{pmatrix}\delta E(t)+\mu_E E(t)\\ -\delta E(t)+\mu_I I(t)\end{pmatrix}.$$

在 $\mathcal{P}^0(S^0(a),0,0)$ 处的雅可比矩阵

$$\mathbb{F}=\begin{pmatrix}\int_0^\infty \beta_1(a)S^0(a)\mathrm{d}a & \int_0^\infty \beta_2(a)S^0(a)\mathrm{d}a\\ 0 & 0\end{pmatrix},\qquad \mathbb{V}=\begin{pmatrix}\delta+\mu_E & 0\\ -\delta & \mu_I\end{pmatrix}.$$

基本再生数即为下一代矩阵的谱半径

$$\mathcal{R}_0=\rho(\mathbb{F}\mathbb{V}^{-1})=\frac{1}{\delta+\mu_E}\int_0^\infty \beta_1(a)S^0(a)\mathrm{d}a+\frac{\delta}{\mu_I(\delta+\mu_E)}\int_0^\infty \beta_2(a)S^0(a)\mathrm{d}a. \tag{2.2}$$

当 $\mathcal{R}_0>1$ 时, 系统存在唯一的正地方病平衡点 $\mathcal{P}^*(S^*(a),E^*,I^*)$. 令

$$\mathcal{J}^*=\int_0^\infty \beta_1(a)S^*(a)E^*\mathrm{d}a+\int_0^\infty \beta_2(a)S^*(a)I^*\mathrm{d}a. \tag{2.3}$$

由模型 (1.1) 的最后两式可得

$$E^*=\frac{1}{\delta+\mu_E}\mathcal{J}^*=\mathcal{C}_1\mathcal{J}^*,\qquad I^*=\frac{\delta}{\mu_I(\delta+\mu_E)}\mathcal{J}^*=\mathcal{C}_2\mathcal{J}^*. \tag{2.4}$$

将 E^* 和 I^* 代入模型 (1.1) 中的第一式

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}S^*(a)}{\mathrm{d}a}&=-\big(m(a)+\beta_1(a)E^*+\beta_2(a)I^*\big)S^*(a)\\&=-\big(m(a)+\beta_1(a)\mathcal{C}_1\mathcal{J}^*+\beta_2(a)\mathcal{C}_2\mathcal{J}^*\big)S^*(a).\end{aligned}$$

记 $\phi(a)=\beta_1(a)\mathcal{C}_1+\beta_2(a)\mathcal{C}_2$. 于是有

$$\frac{\mathrm{d}S^*(a)}{\mathrm{d}a}=-\big(m(a)+\mathcal{J}^*\phi(a)\big)S^*(a).$$

由边界条件 $S^*(0)=\Lambda$ 可得

$$S^*(a)=S^0(a)\exp\left(-\mathcal{J}^*\int_0^a \phi(\tau)\mathrm{d}\tau\right). \tag{2.5}$$

将 $S^*(a)$, E^* 和 I^* 代入 (2.3) 中, 由 $\mathcal{J}^*>0$ 有

$$\int_0^\infty \phi(a)S^0(a)\exp\left(-\mathcal{J}^*\int_0^a \phi(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}a=1. \tag{2.6}$$

定义

$$F(\mathcal{J})=\int_0^{\infty}\phi(a)S^0(a)\exp\left(-\mathcal{J}\int_0^a\phi(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}a-1. \tag{2.7}$$

当 $\mathcal{J}=0$ 时, 存在

$$\begin{aligned}F(0)&=\int_0^{\infty}\left(\beta_1(a)\mathcal{C}_1+\beta_2(a)\mathcal{C}_2\right)S^0(a)\mathrm{d}a-1\\&=\frac{1}{\delta+\mu_E}\int_0^{\infty}\beta_1(a)S^0(a)\mathrm{d}a+\frac{\delta}{\mu_I(\delta+\mu_E)}\int_0^{\infty}\beta_2(a)S^0(a)\mathrm{d}a-1\\&=\mathcal{R}_0-1.\end{aligned}$$

又因为对于所有的 $\mathcal{J}>0$, 有

$$\frac{\mathrm{d}F(\mathcal{J})}{\mathrm{d}\mathcal{J}}=-\int_0^{\infty}\phi(a)S^0(a)\exp\left(-\mathcal{J}\int_0^a\phi(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\int_0^a\phi(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}a<0.$$

函数 $F(\mathcal{J})$ 是连续且单调递减的. 当 $\mathcal{J}\to\infty$ 时, 有 $\lim\limits_{\mathcal{J}\to\infty}F(\mathcal{J})=0-1=-1$. 因此, 当 $\mathcal{R}_0>1$ 时, 在区间 $(0,+\infty)$ 内有且仅有一个 $\mathcal{J}^*$, 即平衡点 $\mathcal{P}^*(S^*(a),E^*,I^*)$ 存在且唯一.

3. 平衡点的稳定性分析

通过建立线性化系统并分析其特征方程根的分布, 可得到平衡点局部渐近稳定性的结论. 由于本文重点讨论系统的全局动力学行为, 故略去局部稳定性的具体证明. 设函数 $\Phi(\theta)=\theta-1-\ln\theta$. 对于任意 $\theta>0$, 函数 $\Phi(\theta)$ 都是非负的且满足 $\Phi(1)=0$. 此外, $\Phi(\theta)$ 在区间 $(0,1)$ 上严格单调递减, 在区间 $(1,+\infty)$ 上严格单调递增.

3.1. 无病平衡点的全局稳定性

定理 3.1 当 $\mathcal{R}_0<1$ 时, 无病平衡点 $\mathcal{P}^0$ 是全局渐近稳定的.

证明 定义 Lyapunov 函数

$$\mathcal{U}(t)=\mathcal{U}_S+\mathcal{U}_E+\mathcal{U}_I=\int_0^{\infty}S^0(a)\Phi\left(\frac{S(t,a)}{S^0(a)}\right)\mathrm{d}a+E(t)+\frac{1}{\mu_I}\int_0^{\infty}\beta_2(a)S^0(a)\mathrm{d}aI(t). \tag{3.1}$$

计算 $\mathcal{U}_S$ 关于时间 t 的导数

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathcal{U}_S}{\mathrm{d}t}&=\int_0^{\infty}S^0(a)\left(\frac{1}{S^0(a)}-\frac{1}{S(t,a)}\right)\frac{\partial S(t,a)}{\partial t}\mathrm{d}a\\&=\int_0^{\infty}S^0(a)\left(\frac{S(t,a)}{S^0(a)}-1\right)\frac{1}{S(t,a)}\frac{\partial S(t,a)}{\partial t}\mathrm{d}a\\&=-\int_0^{\infty}S^0(a)\left(\frac{S(t,a)}{S^0(a)}-1\right)\left(\frac{S_a(t,a)}{S(t,a)}+m(a)+\beta_1(a)E(t)+\beta_2(a)I(t)\right)\mathrm{d}a,\end{aligned}$$

这里 $S_a(t,a)=\frac{\partial S(t,a)}{\partial a}$. 注意到

$$\frac{\partial}{\partial a}\Phi\left(\frac{S(t,a)}{S^0(a)}\right)=\left(\frac{S(t,a)}{S^0(a)}-1\right)\left(\frac{S_a(t,a)}{S(t,a)}+m(a)\right). \tag{3.2}$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathcal{U}_S}{\mathrm{d}t}=&-\int_0^\infty S^0(a)\left(\frac{S(t,a)}{S^0(a)}-1\right)\left(\frac{S_a(t,a)}{S(t,a)}+m(a)+\beta_1(a)E(t)+\beta_2(a)I(t)\right)\mathrm{d}a\\ =&-\int_0^\infty S^0(a)\frac{\partial}{\partial a}\Phi\left(\frac{S(t,a)}{S^0(a)}\right)\mathrm{d}a-\int_0^\infty S^0(a)\left(\frac{S(t,a)}{S^0(a)}-1\right)\big(\beta_1(a)E(t)+\beta_2(a)I(t)\big)\mathrm{d}a\\ =&-\int_0^\infty S^0(a)\frac{\partial}{\partial a}\Phi\left(\frac{S(t,a)}{S^0(a)}\right)\mathrm{d}a-\int_0^\infty S(t,a)\big(\beta_1(a)E(t)+\beta_2(a)I(t)\big)\mathrm{d}a\\ &+\int_0^\infty S^0(a)\big(\beta_1(a)E(t)+\beta_2(a)I(t)\big)\mathrm{d}a.\end{aligned}$$

利用分部积分以及 $\frac{\mathrm{d}S^0(a)}{\mathrm{d}a}=-m(a)S^0(a)$ 可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathcal{U}_S}{\mathrm{d}t}=&-S^0(a)\Phi\left(\frac{S(t,a)}{S^0(a)}\right)\bigg|_{a=\infty}-\int_0^\infty m(a)S^0(a)\Phi\left(\frac{S(t,a)}{S^0(a)}\right)\mathrm{d}a\\ &-\int_0^\infty S(t,a)\big(\beta_1(a)E(t)+\beta_2(a)I(t)\big)\mathrm{d}a+\int_0^\infty S^0(a)\big(\beta_1(a)E(t)+\beta_2(a)I(t)\big)\mathrm{d}a.\end{aligned} \tag{3.3}$$

又因为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathcal{U}_E}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\mathcal{U}_I}{\mathrm{d}t}=&\int_0^\infty\big(\beta_1(a)S(t,a)E(t)+\beta_2(a)S(t,a)I(t)\big)\mathrm{d}a-(\delta+\mu_E)E(t)\\ &+\frac{1}{\mu_I}\int_0^\infty\beta_2(a)S^0(a)\mathrm{d}a\delta E(t)-\int_0^\infty\beta_2(a)S^0(a)\mathrm{d}aI(t).\end{aligned} \tag{3.4}$$

联立 (3.3) 与 (3.4), 有

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{U}(t)}{\mathrm{d}t}=-S^0(a)\Phi\left(\frac{S(t,a)}{S^0(a)}\right)\bigg|_{a=\infty}-\int_0^\infty m(a)S^0(a)\Phi\left(\frac{S(t,a)}{S^0(a)}\right)\mathrm{d}a+(\delta+\mu_E)(\mathcal{R}_0-1)E(t).$$

当 $\mathcal{R}_0<1$ 时, 有 $\frac{\mathrm{d}\mathcal{U}(t)}{\mathrm{d}t}\leqslant 0$. 此外, $\frac{\mathrm{d}\mathcal{U}(t)}{\mathrm{d}t}=0$ 当且仅当 $S(t,a)=S^0(a)$, $E(t)=0$. 由模型 (1.1) 的第三个方程可知 $I(t)=0$. 集合 $\big\{(S(t,a),E(t),I(t)):\frac{\mathrm{d}\mathcal{U}(t)}{\mathrm{d}t}=0\big\}$ 的最大不变集为 $M=\{\mathcal{P}^0\}$. 根据 LaSalle 不变性原理可知, 当 $\mathcal{R}_0<1$ 时, 平衡点 $\mathcal{P}^0$ 是全局渐近稳定的.

3.2. 地方病平衡点的全局稳定性

为了简化地方病平衡点全局稳定性的证明过程, 记

$$\mathcal{A}_i=\int_0^\infty\beta_i(a)S(t,a)\,\mathrm{d}a,\quad i=1,2. \tag{3.5}$$

$\mathcal{A}_i^*$ 表示将 (3.5) 中的 $S(t,a)$ 替换为地方病平衡点状态 $S^*(a)$ 时对应的积分值.

定理 3.2 当 $\mathcal{R}_0>1$ 时, 地方病平衡点 $\mathcal{P}^*$ 是全局渐近稳定的.

证明 定义 Lyapunov 函数

$$\mathcal{V}(t)=\mathcal{V}_S+\mathcal{V}_E+\mathcal{V}_I=\int_0^\infty S^*(a)\Phi\left(\frac{S(t,a)}{S^*(a)}\right)\mathrm{d}a+E^*\Phi\left(\frac{E(t)}{E^*}\right)+\frac{\mathcal{A}_2^*}{\mu_I}I^*\Phi\left(\frac{I(t)}{I^*}\right). \tag{3.6}$$

首先讨论 $\mathcal{V}_S$ 关于时间 t 的导数

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathcal{V}_S}{\mathrm{d}t}&=\int_0^\infty S^*(a)\left(\frac{1}{S^*(a)}-\frac{1}{S(t,a)}\right)\frac{\partial S(t,a)}{\partial t}\mathrm{d}a\\&=\int_0^\infty S^*(a)\left(\frac{S(t,a)}{S^*(a)}-1\right)\frac{1}{S(t,a)}\frac{\partial S(t,a)}{\partial t}\mathrm{d}a\\&=-\int_0^\infty S^*(a)\left(\frac{S(t,a)}{S^*(a)}-1\right)\left(\frac{S_a(t,a)}{S(t,a)}+m(a)+\beta_1(a)E(t)+\beta_2(a)I(t)\right)\mathrm{d}a,\end{aligned}$$

其中 $S_a(t,a)=\frac{\partial S(t,a)}{\partial a}$. 注意到

$$\frac{\partial}{\partial a}\Phi\left(\frac{S(t,a)}{S^*(a)}\right)=\left(\frac{S(t,a)}{S^*(a)}-1\right)\left(\frac{S_a(t,a)}{S(t,a)}+m(a)+\beta_1(a)E^*+\beta_2(a)I^*\right), \tag{3.7}$$

利用分部积分以及 $\frac{\mathrm{d}S^*(a)}{\mathrm{d}a}=-\left(m(a)+\beta_1(a)E^*+\beta_2(a)I^*\right)S^*(a)$ 可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathcal{V}_S}{\mathrm{d}t}&=-\int_0^\infty S^*(a)\left(\frac{S(t,a)}{S^*(a)}-1\right)\left(\frac{S_a(t,a)}{S(t,a)}+m(a)+\beta_1(a)E(t)+\beta_2(a)I(t)\right)\mathrm{d}a\\&=-\int_0^\infty S^*(a)\left(\frac{S(t,a)}{S^*(a)}-1\right)\left(\frac{S_a(t,a)}{S(t,a)}+m(a)+\beta_1(a)E^*+\beta_2(a)I^*\right)\mathrm{d}a\\&\quad-\int_0^\infty S^*(a)\left(\frac{S(t,a)}{S^*(a)}-1\right)\left(\beta_1(a)E(t)+\beta_2(a)I(t)-\beta_1(a)E^*-\beta_2(a)I^*\right)\mathrm{d}a\\&=-\int_0^\infty S^*(a)\frac{\partial}{\partial a}\Phi\left(\frac{S(t,a)}{S^*(a)}\right)\mathrm{d}a-\int_0^\infty S^*(a)\left(\frac{S(t,a)}{S^*(a)}-1\right)\beta_1(a)(E(t)-E^*)\mathrm{d}a\\&\quad-\int_0^\infty S^*(a)\left(\frac{S(t,a)}{S^*(a)}-1\right)\beta_2(a)(I(t)-I^*)\mathrm{d}a\\&=-S^*(a)\Phi\left(\frac{S(t,a)}{S^*(a)}\right)\bigg|_{a=\infty}-\int_0^\infty S^*(a)\left(\frac{S(t,a)}{S^*(a)}-1\right)\beta_1(a)(E(t)-E^*)\mathrm{d}a\\&\quad-\int_0^\infty S^*(a)\left(\frac{S(t,a)}{S^*(a)}-1\right)\beta_2(a)(I(t)-I^*)\mathrm{d}a+\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}S^*(a)}{\mathrm{d}a}\Phi\left(\frac{S(t,a)}{S^*(a)}\right)\mathrm{d}a\\&=-S^*(a)\Phi\left(\frac{S(t,a)}{S^*(a)}\right)\bigg|_{a=\infty}-\int_0^\infty m(a)S^*(a)\Phi\left(\frac{S(t,a)}{S^*(a)}\right)\mathrm{d}a\\&\quad-\int_0^\infty\beta_1(a)S^*(a)E^*\Phi\left(\frac{S(t,a)}{S^*(a)}\right)\mathrm{d}a-\int_0^\infty\beta_2(a)S^*(a)I^*\Phi\left(\frac{S(t,a)}{S^*(a)}\right)\mathrm{d}a\\&\quad-\int_0^\infty\beta_1(a)S(t,a)E(t)\mathrm{d}a+\int_0^\infty\beta_1(a)S(t,a)E^*\mathrm{d}a+\int_0^\infty\beta_1(a)S^*(a)E(t)\mathrm{d}a\\&\quad-\int_0^\infty\beta_1(a)S^*(a)E^*\mathrm{d}a-\int_0^\infty\beta_2(a)S(t,a)I(t)\mathrm{d}a+\int_0^\infty\beta_2(a)S(t,a)I^*\mathrm{d}a\\&\quad+\int_0^\infty\beta_2(a)S^*(a)I(t)\mathrm{d}a-\int_0^\infty\beta_2(a)S^*(a)I^*\mathrm{d}a.\end{aligned} \tag{3.8}$$

DOI: 10.12677/pm.2026.165134

进一步, 求 $\mathcal{V}_E$ 和 $\mathcal{V}_I$ 的导数. 由 $\mathcal{A}_1^*E^*+\mathcal{A}_2^*I^*=(\delta+\mu_E)E^*$ 与 $\delta E^*=\mu_I I^*$ 可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathcal{V}_E}{\mathrm{d}t}&=\left(1-\frac{E^*}{E(t)}\right)\left(\mathcal{A}_1E(t)+\mathcal{A}_2I(t)-\frac{\mathcal{A}_1^*E^*+\mathcal{A}_2^*I^*}{E^*}E(t)\right)\\&=\mathcal{A}_1E(t)+\mathcal{A}_2I(t)-\mathcal{A}_1^*E(t)-\mathcal{A}_2^*\frac{I^*}{E^*}E(t)-\mathcal{A}_1E^*-\mathcal{A}_2\frac{E^*}{E(t)}I(t)+\mathcal{A}_1^*E^*+\mathcal{A}_2^*I^*,\end{aligned}\tag{3.9}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{V}_I}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathcal{A}_2^*}{\mu_I}\left(1-\frac{I^*}{I(t)}\right)\big(\delta E(t)-\mu_I I(t)\big)=\mathcal{A}_2^*\frac{I^*}{E^*}E(t)-\mathcal{A}_2^*I(t)-\mathcal{A}_2^*\frac{I^*E(t)}{E^*I(t)}+\mathcal{A}_2^*.\tag{3.10}$$

注意到以下恒等式成立

$$\begin{gathered}\mathcal{A}_1E(t)+\mathcal{A}_2I(t)-\int_0^\infty\beta_1(a)S(t,a)E(t)\mathrm{d}a-\int_0^\infty\beta_2(a)S(t,a)I(t)\mathrm{d}a=0,\\\mathcal{A}_1^*E^*+\mathcal{A}_2^*I^*-\int_0^\infty\beta_1(a)S^*(a)E^*\mathrm{d}a-\int_0^\infty\beta_2(a)S^*(a)I^*\mathrm{d}a=0,\\-\mathcal{A}_1^*E(t)-\mathcal{A}_1E^*+\int_0^\infty\beta_1(a)S(t,a)E^*\mathrm{d}a+\int_0^\infty\beta_1(a)S^*(a)E(t)\mathrm{d}a=0,\\-\mathcal{A}_2^*I(t)+\int_0^\infty\beta_2(a)S^*(a)I(t)\mathrm{d}a=0.\end{gathered}$$

联立 (3.8), (3.9) 和 (3.10) 并利用上述恒等式逐项消去交叉项

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathcal{V}(t)}{\mathrm{d}t}=&-S^*(a)\Phi\left(\frac{S(t,a)}{S^*(a)}\right)\Big|_{a=\infty}-\int_0^\infty m(a)S^*(a)\Phi\left(\frac{S(t,a)}{S^*(a)}\right)\mathrm{d}a\\&-\int_0^\infty\beta_1(a)S^*(a)E^*\Phi\left(\frac{S(t,a)}{S^*(a)}\right)\mathrm{d}a-\int_0^\infty\beta_2(a)S^*(a)I^*\Phi\left(\frac{S(t,a)}{S^*(a)}\right)\mathrm{d}a\\&+\int_0^\infty\beta_2(a)S(t,a)I^*\mathrm{d}a-\mathcal{A}_2\frac{E^*}{E(t)}I(t)-\mathcal{A}_2^*\frac{I^*E(t)}{E^*I(t)}+\mathcal{A}_2^*.\end{aligned}\tag{3.11}$$

又因为

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\beta_2(a)S(t,a)I^*\mathrm{d}a-\int_0^\infty\beta_2(a)S^*(a)I^*\Phi\left(\frac{S(t,a)}{S^*(a)}\right)\mathrm{d}a\\=&\int_0^\infty\beta_2(a)S^*(a)I^*\mathrm{d}a+\int_0^\infty\beta_2(a)S^*(a)I^*\ln\frac{S(t,a)}{S^*(a)}\mathrm{d}a.\end{aligned}$$

因此 (3.11) 可写为如下形式

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathcal{V}(t)}{\mathrm{d}t}=&-S^*(a)\Phi\left(\frac{S(t,a)}{S^*(a)}\right)\Big|_{a=\infty}-\int_0^\infty m(a)S^*(a)\Phi\left(\frac{S(t,a)}{S^*(a)}\right)\mathrm{d}a\\&-\int_0^\infty\beta_1(a)S^*(a)E^*\Phi\left(\frac{S(t,a)}{S^*(a)}\right)\mathrm{d}a+\int_0^\infty\beta_2(a)S^*(a)I^*\ln\frac{S(t,a)}{S^*(a)}\mathrm{d}a\\&+\int_0^\infty\beta_2(a)S^*(a)I^*\mathrm{d}a-\int_0^\infty\beta_2(a)S^*(a)I^*\frac{S(t,a)I(t)E^*}{S^*(a)I^*E(t)}\mathrm{d}a\\&-\int_0^\infty\beta_2(a)S^*(a)I^*\frac{E(t)I^*}{E^*I(t)}\mathrm{d}a+\int_0^\infty\beta_2(a)S^*(a)I^*\mathrm{d}a.\end{aligned}\tag{3.12}$$

于是合出最终结果

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathcal{V}(t)}{\mathrm{d}t}=&-S^*(a)\Phi\left(\frac{S(t,a)}{S^*(a)}\right)\Big|_{a=\infty}-\int_0^\infty m(a)S^*(a)\Phi\left(\frac{S(t,a)}{S^*(a)}\right)\mathrm{d}a\\&-\int_0^\infty \beta_1(a)S^*(a)E^*\Phi\left(\frac{S(t,a)}{S^*(a)}\right)\mathrm{d}a-\int_0^\infty \beta_2(a)S^*(a)I^*\Phi\left(\frac{E(t)I^*}{E^*I(t)}\right)\mathrm{d}a\\&-\int_0^\infty \beta_2(a)S^*(a)I^*\Phi\left(\frac{S(t,a)I(t)E^*}{S^*(a)I^*E(t)}\right)\mathrm{d}a.\end{aligned}$$

这意味着当 $\mathcal{R}_0>1$ 时, 有 $\frac{\mathrm{d}\mathcal{V}(t)}{\mathrm{d}t}\leqslant 0$. 此外, $\frac{\mathrm{d}\mathcal{V}(t)}{\mathrm{d}t}=0$ 当且仅当 $S(t,a)=S^*(a)$, $E(t)=E^*$, $I(t)=I^*$. 集合 $\left\{(S(t,a),E(t),I(t)):\frac{\mathrm{d}\mathcal{V}(t)}{\mathrm{d}t}=0\right\}$ 的最大不变集为 $M=\left\{\mathcal{P}^*\right\}$. 基于 LaSalle 不变性原理可得, 当 $\mathcal{R}_0>1$ 时, 平衡点 $\mathcal{P}^*$ 是全局渐近稳定的.

4. 结论

本文研究了一类潜伏者具有传染性且易感者具有年龄结构的 SEI 传染病模型. 模型同时考虑了潜伏者与感染者对易感者的感染作用, 并引入年龄结构来刻画不同年龄个体在感染风险上的异质性. 本文的重点是通过 Lyapunov 直接法建立系统平衡点的全局稳定性判据. 研究发现, 基本再生数 $\mathcal{R}_0$ 是决定疾病是否传播的重要指标. 理论分析表明: 当 $\mathcal{R}_0<1$ 时, 无病平衡点 $\mathcal{P}^0$ 是全局渐近稳定的, 意味着疾病最终会被清除; 当 $\mathcal{R}_0>1$ 时, 地方病平衡点 $\mathcal{P}^*$ 存在, 并且是全局渐近稳定的, 表明疾病将持续存在并形成地方病. 然而, 本文所提出的模型仍有很多完善的空间. 例如, 我们只考虑了年龄异质性, 没有考虑人群的空间异质性. 这可以作为后续的研究课题, 来探讨加入了空间异质性后, 个体行为对潜伏感染与疾病最终状态的影响.

参考文献

[1] Kermack, W.O. and McKendrick, A.G. (1927) A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, **115**, 700-721. https://doi.org/10.1098/rspa.1927.0118

[2] Kermack, W.O. and McKendrick, A.G. (1932) Contributions to the Mathematical Theory of Epidemics. II. The Problem of Endemicity. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, **138**, 55-83. https://doi.org/10.1098/rspa.1932.0171

[3] Huang, G., Liu, X. and Takeuchi, Y. (2012) Lyapunov Functions and Global Stability for Age-Structured HIV Infection Model. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **72**, 25-38. https://doi.org/10.1137/110826588

[4] Khan, T., Ullah, Z., Ali, N. and Zaman, G. (2019) Modeling and Control of the Hepatitis B Virus Spreading Using an Epidemic Model. *Chaos, Solitons & Fractals*, **124**, 1-9. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2019.04.033

[5] Almadhi, M.A., Abdulrahman, A., Sharaf, S.A., AlSaad, D., Stevenson, N.J., Atkin, S.L., *et al.* (2021) *International Journal of Infectious Diseases*, **105**, 656-661. https://doi.org/10.1016/j.ijid.2021.02.100

[6] Johansson, M.A., Quandelacy, T.M., Kada, S., Prasad, P.V., Steele, M., Brooks, J.T., *et al.* (2021) *JAMA Network Open*, **4**, e2035057. https://doi.org/10.1001/jamanetworkopen.2020.35057

[7] Spencer, J.A., Shutt, D.P., Moser, S.K., Clegg, H., Wearing, H.J., Mukundan, H., *et al.* (2022) Distinguishing Viruses Responsible for Influenza-Like Illness. *Journal of Theoretical Biology*, **545**, Article ID: 111145. https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2022.111145

[8] Yu, Y., Tan, Y. and Tang, S. (2023) *Computational and Applied Mathematics*, **42**, Article No. 204. https://doi.org/10.1007/s40314-023-02330-w

[9] Webb, G. and Zhao, X.E. (2024) An Epidemic Model with Infection Age and Vaccination Age Structure. *Infectious Disease Reports*, **16**, 35-64. https://doi.org/10.3390/idr16010004

[10] Melnik, A.V. and Korobeinikov, A. (2013) Lyapunov Functions and Global Stability for SIR and SEIR Models with Age-Dependent Susceptibility. *Mathematical Biosciences & Engineering*, **10**, 369-378. https://doi.org/10.3934/mbe.2013.10.369

[11] Cheng, X., Wang, Y. and Huang, G. (2024) Dynamical Analysis of an Age-Structured Cholera Transmission Model on Complex Networks. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **531**, Article ID: 127833. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2023.127833

[12] Yang, C. and Wang, J. (2020) A Mathematical Model for the Novel Coronavirus Epidemic in Wuhan, China. *Mathematical Biosciences and Engineering*, **17**, 2708-2724. https://doi.org/10.3934/mbe.2020148

[13] Çakan, S. (2020) *Chaos, Solitons & Fractals*, **139**, Article ID: 110033. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110033

[14] van den Driessche, P. and Watmough, J. (2002) Reproduction Numbers and Sub-Threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission. *Mathematical Biosciences*, **180**, 29-48. https://doi.org/10.1016/s0025-5564(02)00108-6