Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(6), 24-35
Published Online June 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.166153

一类分数阶(p,q)－Laplace扩散模型的爆破研究

陈程科*，**林　强**

长沙理工大学数学与统计学院，湖南 长沙

收稿日期：2026年4月20日；录用日期：2026年5月18日；发布日期：2026年6月24日

摘　要

本文研究一类具分数阶(p,q)-Laplace 算子的抛物方程在次临界初始能级下解的爆破行为。借助凹函数方法与位势井理论，首先证得解的有限时间爆破;进而结合微分不等式技巧，给出爆破速率估计。所得结果补充并完善了已有关于整体存在性与渐近行为的研究。

关键词

抛物方程，(p,q)-Laplace算子，爆破

Blow-Up Analysis for a Class of Fractional (p,q)-Laplacian Diffusion Models

Chengke Chen*, Qiang Lin

School of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan

* 通讯作者。

文章引用: 陈程科, 林强. 一类分数阶(p,q)－Laplace扩散模型的爆破研究[J]. 理论数学, 2026, 16(6): 24-35.
DOI: 10.12677/pm.2026.166153

Received: Apr. 20^{th}, 2026; accepted: May 18^{th}, 2026; published: Jun. 24^{th}, 2026

Abstract

This paper investigates the blow-up behavior of solutions to a class of parabolic equations involving fractional (p,q)-Laplace operators under subcritical initial energy level. By virtue of the concave function method and potential well theory, we first establish the finite time blow-up of solutions. Furthermore, we derive blow-up rate estimates via differential inequality techniques. The obtained results complement and enrich existing studies on global existence and asymptotic behavior.

Keywords

Parabolic Equations, (p,q)-Laplacian, Blow-Up

1. 引言

在本文中，我们考虑如下含有(p,q)-Laplacian 的非局部扩散问题：

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)_p^\alpha u + (-\Delta)_q^\beta u = |u|^{r-2}u, & (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in (\mathbb{R}^N \backslash \Omega) \times \mathbb{R}_0^+, \end{cases} \tag{1}$$

其中$0 < \alpha, \beta < 1$，$2 \le p, q < \infty$，$p, q < r$，$\alpha p < N$，$\beta q < N$，$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 为具有Lipschitz 边界$\partial\Omega$的有界区域。记$p^* = \frac{Np}{N-\alpha p}$ 与$q^* = \frac{Nq}{N-\beta q}$ 分别为分数阶Sobolev 临界指数，本文研究的是次临界情形，即$r < \min\{p^*, q^*\}$，该条件保证了非线性源项在分数阶Sobolev 嵌入下可被算子项控制。分数阶p-Laplace 算子$(-\Delta)_p^\alpha u(x)$ 定义为

$$(-\Delta)_p^\alpha u(x) = 2P.V. \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))}{|x - y|^{N+pa}} dy,$$

其中$P.V.$ 表示柯西主值，非线性非局部算子$(-\Delta)_q^\beta u(x)$ 以相同方式定义。模型(1) 来源于非局部多孔介质方程，并为刻画多孔介质中的热量、质量以及动量传输提供了基础 [1]。其在$\alpha=\beta=1$ 时的特例，即

$$u_t - \operatorname{div}(D(u)\nabla u) = |u|^{r-2} \tag{2}$$

其中$D(u)=|\nabla u|^{p-2}+|\nabla u|^{q-2}$，该模型出现在等离子体物理、生物物理以及化学反应设计中 [2]。这里，u 表示描述多组分物质密度或浓度的状态变量，$\operatorname{div}(D(u)\nabla u)$ 表示具有扩散系数$D(u)$ 的扩散过程，而$|u|^{r-2}$ 则表示与源项和损失过程相关的反应项。模型(1) 与(2) 所具有的丰富物理背景引发了大量研究兴趣。已有关于非局部模型(1) 的研究主要集中在正则性 [3,4]、局部存在性 [1,5]以及具有渐近行为的整体存在性 [6]等问题上。类似地，对于局部模型(2)，研究者也探讨了其正则性 [7,8]与解的存在性 [9,10]。值得注意的是，包含局部与非局部算子混合的抛物型模型近年来也受到了广泛关注，并在正则性与存在性分析方面取得了进展 [11,12]。尽管在局部、非局部以及混合型抛物问题的解的存在性与正则性方面已有诸多研究成果，但关于爆破现象（即解的不存在性）的研究仍相对较少。因此，本文将重点研究抛物型非局部双相模型(1) 的爆破解析。

本文的主要目标是研究初值对解在有限时间内爆破的影响，以弥补文献 [6]中关于问题(1) 的相关空白。Li 等人 [6]在位势井理论 [13,14]框架下，首次建立了问题(1) 解整体存在的充分条件。研究表明稳定流形

$$\mathcal{W} := \left\{u \in W_0^{\alpha,p}(\Omega) \cap W_0^{\beta,q}(\Omega) \mid I(u) > 0,\ J(u) < d\right\} \cup \{0\}$$

的构造将局部解的存在时间延拓至整个时间轴，即当$u_0 \in \mathcal{W}$ 时，问题(1) 的解是整体存在的，其中$W_0^{\alpha,p}(\Omega), W_0^{\beta,q}(\Omega)$ 表示分数阶Sobolev 空间，$J(u)$、$I(u)$ 和d 分别表示能量泛函、Nehari 泛函以及山路水平。然而，由稳定流形$\mathcal{W}$ 之外的初值所引发的解的动力学行为仍未被探究。为了解决这一尚未解决的问题，我们引入不稳定流形

$$\mathcal{V} := \left\{u \in W_0^{\alpha,p}(\Omega) \cap W_0^{\beta,q}(\Omega) | I(u) < 0, J(u) < d\right\},$$

随后，我们尝试建立当初值$u_0 \in \mathcal{V}$ 时解发生爆破的充分条件。值得注意的是，本文给出的爆破结果与文献 [6]中关于解的整体存在性结果共同构成了区分有限时间爆破与整体存在的阈值条件。

本文结构安排如下：第2 节回顾分数阶Sobolev 空间并引入若干重要泛函，同时给出一些基本引理；第3 节给出严格的有限时间爆破结果、爆破速率估计及爆破时间下界；第4 节讨论模型参数对爆破的影响并提出开放性问题。

2. 一些记号与预备引理

下文中，$\|\cdot\|_p$ 表示标准的$L^p(\Omega)$ 范数，而$\|\cdot\|$ 表示$L^2(\Omega)$ 范数。记号$(\varphi,\psi)=\int_\Omega \varphi\psi\,dx$ 表示

内积。关于分数阶Sobolev 空间

$$W_0^{\alpha,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : [u]_{\alpha,p} < \infty,\ u(x) = 0 \text{ 几乎处处于 } \mathbb{R}^N \setminus \Omega\},$$

我们采用文献 [6]中给出的定义。函数u 的Gagliardo 半范数定义为

$$[u]_{\alpha,p} := \left(P.V. \iint_Q \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+p\alpha}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}.$$

其中,$Q := \mathbb{R}^{2N} \setminus u$ ，$u := C(\Omega) \times C(\Omega) \subset \mathbb{R}^{2N}$ ，$C(\Omega) := \mathbb{R}^N \setminus \Omega$，对于函数$\psi, \varphi \in W_0^{\alpha,p}(\Omega)$，定义

$$\left\langle (-\Delta)_p^\alpha \varphi, \psi \right\rangle := P.V. \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|^{p-2}(\varphi(x)-\varphi(y))(\psi(x)-\psi(y))}{|x-y|^{N+p\alpha}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中$\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示$W_0^{\alpha,p}(\Omega)$ 及其对偶空间$(W_0^{\alpha,p}(\Omega))^*$ 之间的函数内积。类似地，可以定义$W_0^{\beta,q}(\Omega)$。本文选取的工作空间为$W_0^{\alpha,p}(\Omega) \cap W_0^{\beta,q}(\Omega)$，其定义在文献 [6]中已给出。

将(1) 的第一个方程乘以u_t 并在$\Omega \times [0,t)$ 上积分，可以得到如下能量泛函

$$J(u) := \frac{1}{p}[u]_{\alpha,p}^p + \frac{1}{q}[u]_{\beta,q}^q - \frac{1}{r}\|u\|_r^r \tag{3}$$

并且有如下能量不等式

$$\int_0^t \|u_\tau\|^2 \mathrm{d}\tau + J(u) \le J(u_0). \tag{4}$$

接着我们定义Nehari 泛函

$$I(u) := [u]_{\alpha,p}^p + [u]_{\beta,q}^q - \|u\|_r^r \tag{5}$$

以及所谓的Nehari 流形

$$\mathcal{N} := \{u \in W_0^{\alpha,p}(\Omega) \cap W_0^{\beta,q}(\Omega) \backslash \{0\} | I(u) = 0\}. \tag{6}$$

山路水平可以表示为

$$d := \inf_{u \in \mathcal{N}} J(u). \tag{7}$$

在下文中，我们给出后续讨论中所需的一些引理。

引理2.（分数阶Sobolev 不等式 [15]）设$0 < \beta < 1$ 且$1 < q < \infty$，满足$\beta q < N$。设$\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ 是$\mathbb{R}^N$ 上分数阶Sobolev 空间$W^{\beta,q}(\mathbb{R}^N)$ 的一个延拓域。则存在正常数$C_*(N,\beta,q,\Omega)$，使得对任意$f \in W^{\beta,q}(\Omega)$，有

$$\|f\|_{L^m(\Omega)} \le C_* \|f\|_{W^{\beta,q}(\Omega)}, m \in [1, q^*],$$

其中$q^* = \frac{Nq}{N-\beta q}$ 表示临界指数。特别地，当Ω 有界时，$W^{\beta,q}(\Omega)$ 连续嵌入到$L^m(\Omega)$ 中，对任

意$m \in [1, q^*]$ 成立。

为了构造凹函数不等式并支撑爆破结论，我们给出$J(u)$、$I(u)$ 与d 之间的关系。

引理3. 设u 是问题(1) 的一个解。则

(i) 能量泛函$J(u)$ 关于t 是递减的；

(ii) 若$I(u) < 0$，则$J(u)$、$I(u)$ 与d 满足

$$I(u) < \mu(J(u) - d). \tag{8}$$

证明. (i) 将(1) 的第一个方程乘以u_t 并在Ω 上积分，得到$J'(u(t)) = -\|u_t\|^2 \le 0$，从而证明完成。为了证明(ii)，我们首先研究$J(\lambda u)$ 的性质。对于$\lambda > 0$，计算$J(\lambda u)$ 的导数：

$$\frac{\mathrm{d}J(\lambda u)}{\mathrm{d}\lambda} = \lambda^{p-1}[u]_{\alpha,p}^p + \lambda^{q-1}[u]_{\beta,q}^q - \lambda^{r-1}\|u\|_r^r = \frac{1}{\lambda}I(\lambda u). \tag{9}$$

记$h(\lambda) = [u]_{\alpha,p}^p + \lambda^{q-p}[u]_{\beta,q}^q - \lambda^{r-p}\|u\|_r^r$，则

$$h'(\lambda) = (q-p)\lambda^{q-p-1}[u]_{\beta,q}^q - (r-p)\lambda^{r-p-1}\|u\|_r^r.$$

当$0 < \lambda \le 1$ 时，由$I(u) < 0$ 可得$h'(\lambda) < 0$；当$1 < \lambda < +\infty$ 时，$h'(\lambda) < 0$。因此$h'(\lambda) < 0$ 对所有$\lambda > 0$ 成立。由于$h(0) > 0$ 且$\lim_{\lambda \to +\infty} h(\lambda) = -\infty$，存在唯一的$\lambda^* > 0$ 使得$h(\lambda^*) = 0$。此时

$$\left.\frac{\mathrm{d}J(\lambda u)}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=\lambda^*} = 0.$$

因此，当$0 < \lambda < \lambda^*$ 时，$J(\lambda u)$ 单调递增；当$\lambda > \lambda^*$ 时，$J(\lambda u)$ 单调递减；在$\lambda = \lambda^*$ 处取极大值。

由$\frac{\mathrm{d}J(\lambda u)}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{1}{\lambda}I(\lambda u)$ 可得：当$\lambda < \lambda^*$ 时，$\frac{\mathrm{d}J(\lambda u)}{\mathrm{d}\lambda} > 0$，故$I(\lambda u) > 0$；当$\lambda > \lambda^*$ 时，$\frac{\mathrm{d}J(\lambda u)}{\mathrm{d}\lambda} < 0$，故$I(\lambda u) < 0$；当$\lambda = \lambda^*$ 时，$\frac{\mathrm{d}J(\lambda u)}{\mathrm{d}\lambda} = 0$，故$I(\lambda^* u) = 0$。

设$g(\lambda) = \mu J(\lambda u) - I(\lambda u)$，$\lambda > 0$。结合上述结论，可得

$$g'(\lambda) = (\mu - p)\lambda^{p-1}[u]_{\alpha,p}^p + (\mu - q)\lambda^{q-1}[u]_{\beta,q}^q + \frac{1}{\lambda}\int_\Omega \big((\lambda u)^2 f'(\lambda u) - (\mu - 1)\lambda u f(\lambda u)\big)\,\mathrm{d}x > 0.$$

因此$g(\lambda)$ 在$\lambda > 0$ 上是递增的。当$I(u) < 0$ 时，由上述结论可知存在λ^* 使得$I(\lambda^* u) = 0$ 且$\lambda^* > 1$。于是

$$\mu J(u) - I(u) = g(1) > g(\lambda^*) = \mu J(\lambda^* u) - I(\lambda^* u) = \mu J(\lambda^* u) \ge \mu d,$$

即$I(u) < \mu(J(u) - d)$。证毕。

引理4.（不稳定流形V 的不变性）假设u 是问题(1) 的一个解。若$u_0 \in V$，则对任意$t \geq 0$，都有$u \in V$。

证明思路. 反证法。设存在$t_* > 0$ 使得$u(t_*)$ 到达$\mathcal{V}$ 的边界，则$J(u(t_*)) = d$ 或$I(u(t_*)) = 0$。由能量不等式$J(u(t_*)) \leq J(u_0) < d$，$J(u(t_*)) = d$ 不可能。若$I(u(t_*)) = 0$ 且$J(u(t_*)) < d$，则$u(t_*) \in \mathcal{N}$，从而$J(u(t_*)) \geq d$，亦矛盾。因此$u(t) \in \mathcal{V}$ 对所有$t \geq 0$ 成立。

3. 初值$u_0 \in V$时的有限时间爆破

定理5.（当$u_0 \in V$ 时的有限时间爆破）设$u_0 \in V$，则存在$T > 0$，使得问题(1) 的解在有限时间内发生爆破，即

$$\lim_{t \to T} \int_0^t \|u\|^2 \mathrm{d}\tau = +\infty. \tag{10}$$

证明. 在证明之前，我们先说明解的正则性。根据文献 [6]，问题(1) 的弱解u 满足$u \in C([0,T); L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T; W_0^{\alpha,p}(\Omega) \cap W_0^{\beta,q}(\Omega))$，$u_t \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$，且$\|u\|$ 关于时间在$W_0^{\alpha,p}(\Omega) \cap W_0^{\beta,q}(\Omega)$ 中是绝对连续的。这些正则性保证了后续对$\Psi(t)$ 进行的微分运算是合理的。下用反证法。假设解u 是全局存在的，即$T = +\infty$，其中T 是u 的最大存在时间。设

$$\Psi(t) := \int_0^t \|u\|^2 \mathrm{d}\tau,\ t \geq 0, \tag{11}$$

则有

$$\Psi'(t) = \|u\|^2,\ t \geq 0. \tag{12}$$

将(1) 的第一个方程两边乘以u 并在Ω 上积分，得到

$$(u_t, u) = \left([u]_{\alpha,p}^p + [u]_{\beta,q}^q - |u|_r^r\right) = -I(u). \tag{13}$$

这意味着

$$\Psi''(t) = 2(u_t, u) = -2I(u). \tag{14}$$

由(3)、(5)，我们有

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{p}[u]_{\alpha,p}^p + \frac{1}{q}[u]_{\beta,q}^q - \frac{1}{r}\left([u]_{\alpha,p}^p + [u]_{\beta,q}^q - I(u)\right) \\ &= \frac{r-p}{pr}[u]_{\alpha,p}^p + \frac{r-q}{qr}[u]_{\beta,q}^q + \frac{1}{r}I(u) \end{aligned} \tag{15}$$

其中$r > p$ 且$r > q$。由(4) 与(15) 结合可得

$$J(u_0) \geq \frac{r-p}{rp}[u]_{\alpha,p}^p + \frac{r-q}{rq}[u]_{\beta,q}^q + \frac{1}{r}I(u) + \int_0^t \|u_\tau\|_2^2 d\tau, \tag{16}$$

这意味着

$$I(u)\le rJ(u_0)-\frac{r-p}{p}[u]_{\alpha,p}^p-\frac{r-q}{q}[u]_{\beta,q}^q-r\int_0^t\|u_\tau\|_2^2d\tau. \tag{17}$$

由(17) 与(14) 可见

$$\Psi''(t)\ge -2rJ(u_0)+\frac{2(r-p)}{p}[u]_{\alpha,p}^p+\frac{2(r-q)}{q}[u]_{\beta,q}^q+2r\int_0^t\|u_\tau\|_2^2d\tau. \tag{18}$$

根据

$$\left(\int_0^t(u,u_\tau)d\tau\right)^2=\left(\frac{1}{2}\|u\|^2-\frac{1}{2}\|u_0\|^2\right)^2=\frac{1}{4}\left((\Psi'(t))^2-2\|u_0\|^2\Psi'(t)+\|u_0\|^4\right),$$

则有

$$(\Psi'(t))^2=4\left(\int_0^t(u,u_\tau)d\tau\right)^2+2\|u_0\|^2\Psi'(t)-\|u_0\|^4. \tag{19}$$

因此结合(11)、(18) 与(19)，有

$$\begin{aligned}\Psi(t)\Psi''(t)-\frac{r}{2}(\Psi'(t))^2\ge& -2rJ(u_0)\Psi(t)+\frac{2(r-p)}{p}[u]_{\alpha,p}^p\Psi(t)+\frac{2(r-q)}{q}[u]_{\beta,q}^q\Psi(t)\\&+2r\int_0^t\|u_\tau\|^2d\tau\int_0^t\|u\|^2d\tau-2r\left(\int_0^t(u,u_\tau)d\tau\right)^2-r\|u_0\|^2\Psi'(t)+\frac{r}{2}\|u_0\|^4.\end{aligned} \tag{20}$$

由Cauchy-Schwartz 不等式可知，则(20) 变为

$$\Psi(t)\Psi''(t)-\frac{r}{2}(\Psi'(t))^2$$

$$>\frac{2(r-p)}{p}[u]_{\alpha,p}^p\Psi(t)+\frac{2(r-q)}{q}[u]_{\beta,q}^q\Psi(t)-2rJ(u_0)\Psi(t)-r\|u_0\|^2\Psi(t),$$

结合(12) 以及分数阶Sobolev 不等式（见引理2），可得

$$\begin{aligned}\Psi(t)\Psi''(t)-\frac{r}{2}(\Psi'(t))^2>&\Psi'(t)\Psi(t)\left[\frac{2(r-p)}{p}C_1^{-p}\|u\|^{p-2}+\frac{2(r-q)}{q}C_2^{-q}\|u\|^{q-2}\right]\\&-2rJ(u_0)\Psi(t)-r\|u_0\|^2\Psi'(t).\end{aligned} \tag{21}$$

其中C_1、C_2 分别是嵌入$W_0^{\alpha,p}(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$ 与$W_0^{\beta,q}(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$ 的嵌入常数。

证明的其余部分分为两种情形。

情况I. 如果$J(u_0)\le 0$，则有

$$\begin{aligned}\Psi(t)\Psi''(t)-\frac{r}{2}(\Psi'(t))^2>&\frac{2(r-p)}{p}C_1^{-p}\|u\|^{p-2}\Psi'(t)\Psi(t)\\&+\frac{2(r-q)}{q}C_2^{-q}\|u\|^{q-2}\Psi'(t)\Psi(t)\\&-r\|u_0\|^2\Psi'(t).\end{aligned} \tag{22}$$

根据(4)、(15) 以及$J(u_0) \le 0$，我们有

$$0 \ge J(u_0) > J(u) \ge \frac{r-p}{rp}[u]_{\alpha,p}^p + \frac{r-q}{rq}[u]_{\beta,q}^q + \frac{1}{r}I(u) \tag{23}$$

对于$t > 0$，由$r > p$，$q \ge 2$ 和(23)，可以推得$I(u) < 0$ 对于$t > 0$。基于这一事实以及(14)，我们容易得到$\Psi''(t) > 0$ 对于$t \ge 0$，即$\Psi'(t) = \|u\|^2$ 对于$t \ge 0$ 是递增的。由于$\Psi'(0) = \|u_0\|^2 > 0$，进一步得到

$$\Psi'(t) > \Psi'(0) > 0, \quad t > 0, \tag{24}$$

这意味着$\Psi(t)$ 对于$t \ge 0$ 也是递增的。因此有

$$\Psi(t) - \Psi(0) = \int_0^t \Psi'(\tau)\,d\tau > \int_0^t \Psi'(0)\,d\tau = \Psi'(0)t, \quad t > 0,$$

即$\Psi(t) > \Psi'(0)\,t$ 对于$t > 0$。显然，存在一个足够大的t_1 使得

$$\begin{aligned}
&\frac{2(r-p)}{p}C_1^{-p}\|u(t_1)\|^{p-2}\Psi(t_1) + \frac{2(r-q)}{q}C_2^{-q}\|u(t_1)\|^{q-2}\Psi(t_1) - r\|u_0\|^2 \\
&> \frac{2(r-p)}{p}C_1^{-p}\|u_0\|^{p-2}\Psi(t_1) + \frac{2(r-q)}{q}C_2^{-q}\|u_0\|^{q-2}\Psi(t_1) - r\|u_0\|^2 \\
&> 0.
\end{aligned}$$

然后由(22) 得到

$$\Psi(t)\Psi''(t) - \frac{r}{2}(\Psi'(t))^2 > 0, \quad t \ge t_1. \tag{25}$$

情况II. 如果$0 < J(u_0) < d$，由于$u_0 \in \mathcal{V}$ 且根据引理4，我们有$u(t) \in \mathcal{V}$ 对于$t \ge 0$。结合(4)、(8) 以及条件$0 < J(u_0) < d$，(14) 得到

$$\Psi''(t) = -2I(u) + 2r(d - J(u)) \ge 2r(d - J(u_0)) := C_r > 0. \tag{26}$$

对不等式(26) 的两边从0 积分，得到

$$\Psi'(t) > C_r t + \Psi'(0) > C_r t > 0, \quad t > 0. \tag{27}$$

类似地，由(27) 和$\Psi(0) = 0$，我们得到

$$\Psi(t) - \Psi(0) = \int_0^t \Psi'(\tau)d\tau > \int_0^t C_r\tau d\tau = \frac{1}{2}C_r t^2, \quad t > 0.$$

即，$\Psi(t) > \frac{1}{2}C_r t^2$ 对于$t > 0$，这与(26) 和(27) 一起得到

$$\Psi''(t) > C_r > 0,\ \Psi'(t) > C_r t > 0,\ \Psi(t) > \Psi(0) = 0,\ t > 0.$$

DOI: 10.12677/pm.2026.166153

因此，存在一个足够大的t_2，使得

$$\begin{aligned}\frac{2(r-p)}{p}C_1^{-p}\|u(t_2)\|^{p-2}\Psi(t_2) &> \frac{2(r-p)}{p}C_1^{-p}\|u_0\|^{p-2}\Psi(t_2)\\ &> r\|u_0\|^2.\end{aligned}\tag{28}$$

以及

$$\begin{aligned}\frac{2(r-q)}{q}C_2^{-q}\|u(t_2)\|^{q-2}\Psi'(t_2) &= \frac{2(r-q)}{q}C_2^{-q}\left(\Psi'(t_2)\right)^{\frac{q}{2}}\\ &> 2rJ(u_0).\end{aligned}\tag{29}$$

对于$r>p,q\geq 2$。然后结合(28) 与(29)，(21) 得到

$$\Psi(t)\Psi''(t)-\frac{r}{2}(\Psi'(t))^2>0,\quad t\geq t_2.\tag{30}$$

因此结合(25) 和(30)，我们得到

$$\frac{\Psi''(t)}{\Psi'(t)}>\frac{r\Psi'(t)}{2\Psi(t)},\quad t\geq\tilde{t}.\tag{31}$$

其中$\tilde{t}:=\max\{t_1,t_2\}$。对(31) 从$\tilde{t}$ 积分得到

$$\frac{\Psi'(t)}{(\Psi(t))^{\frac{r}{2}}}>\frac{\Psi'(\tilde{t})}{(\Psi(\tilde{t}))^{\frac{r}{2}}},\quad t\geq\tilde{t}.\tag{32}$$

进一步将(32) 从$\tilde{t}$ 积分到t，得到

$$(\Psi(t))^{-\frac{r-2}{2}}<(\Psi(\tilde{t}))^{-\frac{r-2}{2}}\left(1-\frac{(r-2)\Psi'(\tilde{t})}{2\Psi(\tilde{t})}(t-\tilde{t})\right),\quad t\geq\tilde{t},$$

即

$$\Psi(t)>\Psi(\tilde{t})\left(\Phi(t)\right)^{-\frac{2}{r-2}},\quad t\geq\tilde{t}.$$

由于$r>2$，$\Psi'(\tilde{t})>0$，且$\Psi(\tilde{t})>0$，我们得到$\Phi(t)$ 是单调递减的。此外，由(24) 和(27)，$\Psi(t)$ 是一个递增函数。求解$\Phi(t)=0$ 可得唯一根为$\tilde{t}+\frac{2\Psi(\tilde{t})}{(r-2)\Psi'(\tilde{t})}$。因此，存在一个有限时间$T$ 满足

$$0<T<\tilde{t}+\frac{2\Psi(\tilde{t})}{(r-2)\Psi'(\tilde{t})}\tag{33}$$

使得当$t\to T$ 时$\Psi(t)$ 发生爆破，即

$$\lim_{t\to T}\Psi(t)=+\infty.$$

即(10) 成立，这与我们的假设$T=+\infty$ 相矛盾。**注6.** 通过简单观察可以发现，这里所发展的

方法可以推广到(1) 的局部情形，即(2)，从而得到该类解的有限时间爆破判据。**定理6.**（爆破速率）在定理5 的条件下，解的爆破速率满足

$$\Psi(t) \geq C(T-t)^{-\frac{2}{r-2}}, \quad t \to T^-$$

其中$C > 0$ 为常数。

证明. 由定理5 的证明过程，我们已得到（参见(32)）

$$\frac{\Psi'(t)}{(\Psi(t))^{\frac{r}{2}}} > \frac{\Psi'(\tilde{t})}{(\Psi(\tilde{t}))^{\frac{r}{2}}} := C_0 > 0, \quad t \geq \tilde{t}.$$

将上式从t 积分到T，得到

$$(\Psi(t))^{-\frac{r-2}{2}} < \frac{r-2}{2} C_0 (T-t), \quad t \geq \tilde{t},$$

即$\Psi(t) > \left(\frac{r-2}{2}C_0\right)^{-\frac{2}{r-2}} (T-t)^{-\frac{2}{r-2}}$。取$C = \left(\frac{r-2}{2}C_0\right)^{-\frac{2}{r-2}}$ 即得结论。

4. 讨论

本节讨论模型参数对爆破的影响，并提出若干开放性问题。

参数α, β 对爆破的影响. 分数阶指数α, β 通过以下途径影响爆破行为：（i）α, β 越小，分数阶Sobolev 临界指数$p^* = \frac{Np}{N-\alpha p}$ 和$q^* = \frac{Nq}{N-\beta q}$ 越小，次临界条件$r < \min\{p^*, q^*\}$ 对r 的限制越强，即允许的源项增长阶越低；（ii）α, β 越小，非局部算子的扩散效应越弱（因为积分核$\frac{1}{|x-y|^{N+p\alpha}}$ 的衰减变慢，远距离相互作用增强但扩散强度降低），这倾向于使爆破更容易发生；（iii）在爆破时间上界$T < \tilde{t} + \frac{2\Psi(\tilde{t})}{(r-2)\Psi'(\tilde{t})}$ 中，嵌入常数C_1, C_2 依赖于α, β，因此α, β 的变化会影响爆破时间的估计。

参数p, q 对爆破的影响. 当p, q 增大时，算子$(-\Delta)_p^\alpha$ 和$(-\Delta)_q^\beta$ 的扩散效应增强，倾向于抑制爆破。同时，p, q 的增大也使得临界指数p^*, q^* 增大，从而允许更高的源项增长阶r。

开放性问题. （i）临界Sobolev 指数情形（$r = p^*$ 或$r = q^*$）下解的行为如何？此时分数阶Sobolev 嵌入失去紧性，本文的方法不再直接适用，需要发展新的变分框架。（ii）爆破点的形态与集合刻画是一个有趣的问题，对于非局部算子，爆破点是否仍集中在局部区域，还是可能呈现非局部分布？（iii）超临界初始能级（$J(u_0) > d$）下的爆破判据仍有待建立，由于非局部算子不具备比较原理，局部情形下的方法无法直接推广。（iv）爆破速率的精确渐近公式以及爆破时刻解的轮廓（profile）分析也是值得进一步研究的问题。

基金项目

湖南省大学生创新创业训练项目计划(No. S202410536146)。湖南省教育厅科研项目(No. 24C0173)。

参考文献

[1] Ghosh, S., Kumar, D., Prasad, H. and Tewary, V. (2022) Existence of Variational Solutions to Doubly Nonlinear Nonlocal Evolution Equations via Minimizing Movements. *Journal of Evolution Equations*, **22**, Article No. 74. https://doi.org/10.1007/s00028-022-00834-2

[2] Cherfils, L. and Il'yasov, Y. (2005) On the Stationary Solutions of Generalized Reaction Diffusion Equations with (p, q)-Laplacian. *Communications on Pure and Applied Analysis*, **4**, 9-22. https://doi.org/10.3934/cpaa.2005.4.9

[3] Byun, S., Ok, J. and Song, K. (2022) Hölder Regularity for Weak Solutions to Nonlocal Double Phase Problems. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **168**, 110-142. https://doi.org/10.1016/j.matpur.2022.11.001

[4] Giacomoni, J., Kumar, D. and Sreenadh, K. (2024) Hölder Regularity Results for Parabolic Nonlocal Double Phase Problems. *Advances in Differential Equations*, **29**, 899-950. https://doi.org/10.57262/ade029-1112-899

[5] Prasad, H. and Tewary, V. (2023) Local Boundedness of Variational Solutions to Nonlocal Double Phase Parabolic Equations. *Journal of Differential Equations*, **351**, 243-276. https://doi.org/10.1016/j.jde.2022.12.029

[6] Li, C., Song, C., Quan, L., Xiang, J. and Xiang, M. (2021) Global Existence and Asymptotic Behavior of Solutions to Fractional (p, q)-Laplacian Equations. *Asymptotic Analysis*, **129**, 321-338. https://doi.org/10.3233/asy-211731

[7] Fang, Y. and Zhang, C. (2022) Regularity for Quasi-Linear Parabolic Equations with Nonhomogeneous Degeneracy or Singularity. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **62**, Article No. 2. https://doi.org/10.1007/s00526-022-02360-y

[8] Kim, W., Moring, K. and Särkiö, L. (2025) Hölder Regularity for Degenerate Parabolic Double-Phase Equations. *Journal of Differential Equations*, **434**, Article ID: 113231. https://doi.org/10.1016/j.jde.2025.113231

[9] Arora, R. and Shmarev, S. (2022) Double-Phase Parabolic Equations with Variable Growth and Nonlinear Sources. *Advances in Nonlinear Analysis*, **12**, 304-335. https://doi.org/10.1515/anona-2022-0271

[10] Kim, W., Kinnunen, J. and Särkiö, L. (2025) Lipschitz Truncation Method for Parabolic Double-Phase Systems and Applications. *Journal of Functional Analysis*, **288**, Article ID: 110738. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2024.110738

[11] Shang, B. and Zhang, C. (2024) Regularity of Weak Solutions for Mixed Local and Nonlocal Double Phase Parabolic Equations. *Journal of Differential Equations*, **378**, 792-822. https://doi.org/10.1016/j.jde.2023.10.024

[12] Shang, B. and Zhang, C. (2022) Hölder Regularity for Mixed Local and Nonlocal p-Laplace Parabolic Equations. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **42**, 5817-5837. https://doi.org/10.3934/dcds.2022126

[13] Pan, N., Pucci, P. and Zhang, B. (2017) Degenerate Kirchhoff-Type Hyperbolic Problems Involving the Fractional Laplacian. *Journal of Evolution Equations*, **18**, 385-409. https://doi.org/10.1007/s00028-017-0406-2

[14] Payne, L.E. and Sattinger, D.H. (1975) Saddle Points and Instability of Nonlinear Hyperbolic Equations. *Israel Journal of Mathematics*, **22**, 273-303. https://doi.org/10.1007/bf02761595

[15] Di Nezza, E., Palatucci, G. and Valdinoci, E. (2012) Hitchhiker's Guide to the Fractional Sobolev Spaces. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, **136**, 521-573. https://doi.org/10.1016/j.bulsci.2011.12.004