Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(6), 48-61
Published Online 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.166156

Hans汉斯

二阶非线性性薛定谔方程解的门槛条件研究

孔鑫宇*，**林 强**

长沙理工大学数学与统计学院，湖南 长沙

收稿日期：2026年4月13日；录用日期：2026年5月16日；发布日期：2026年6月25日

摘 要

本文研究了定义在$\mathbb{R}^N$ $(N \geqslant 3)$上的二阶非线性薛定谔方程，其非线性指数介于质量临界与能量次临界之间。通过构造**Pohozaev-Nehari**不变流形，在位势井理论框架下，得到了解整体存在与有限时间爆破的门槛条件。

关键词

二阶非线性薛定谔方程，**Pohozaev-Nehari**不变流形，整体存在性，爆破

Study on the Threshold Conditions for Solutions of the Second-Order Nonlinear Schrödinger Equation

Xinyu Kong*, **Qiang Lin**

School of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan

Received: April 13, 2026; accepted: May 16, 2026; published: June 25, 2026

* 通讯作者

文章引用: 孔鑫宇, 林强. 二阶非线性薛定谔方程解的门槛条件研究[J]. 理论数学, 2026, 16(6): 48-61.
DOI: 10.12677/pm.2026.166156

Abstract

This paper investigates the second-order nonlinear Schrödinger equation defined on $\mathbb{R}^N(N \geqslant 3)$, with the nonlinear exponent lying between the mass-critical and energy-subcritical regimes. By constructing Pohozaev-Nehari cross-invariant manifolds, we establish sharp thresholds for global existence and finite-time blow-up within the potential well framework.

Keywords

Second-Order Nonlinear Schrödinger Equation, Pohozaev-Nehari Invariant Manifolds, Global Existence, Blow-Up

1. 引言

本文研究如下的二阶非线性薛定谔方程的Cauchy 问题：

$$\begin{cases} i\varphi_t + \Delta\varphi = -|\varphi|^p\varphi, \ (x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,T), \\ \varphi(0,x) = \varphi_0(x), \end{cases} \tag{1}$$

其中$\varphi(x,t) : \mathbb{R}^N \times [0,T) \to \mathbb{C}$ 表示复值函数，非线性指数p介于质量临界和能量亚临界之间，即

$$\frac{4}{N} \leqslant p < \frac{4}{N-2}, N \geqslant 3. \tag{2}$$

关于非线性薛定谔方程的研究已经积累了丰富的成果，尤其是在其解的存在性、非散射性等动力学行为方面. 下面对国内外研究现状及发展动态展开论述.

当$N \geqslant 1$且$p < \frac{4}{N}$，即质量次临界情形时，Masaki [1]证明Cauchy问题(1)存在一个极小的非散射解$\varphi_c(t) \in L^2(\mathbb{R}^N)$，满足：(i)若$\ell(\varphi_0) \geqslant \ell(\varphi_c(0))$，则解$\varphi(t)$不散射；(ii)若$\ell(\varphi_0) < \ell(\varphi_c(0))$，则

解$\varphi(t)$在任何时刻都是散射的，其中$\ell(f) :=\| f \|_{L^2}^2 - \frac{2}{p} \| xf \|^2$. 且$\ell(\varphi_0)$ 在尺度变换

$$\varphi_\omega(t,x) = \omega^{\frac{2}{p-\frac{N}{2}}} \varphi(\omega^2 t, \omega x)，\ \omega > 0 \tag{3}$$

下保持不变.

在与 [1]相同的p 与N 的取值范围假设下，Merle 与Raphael [2,3]研究了Cauchy 问题(1)的爆破速率的最佳上界. 基于类似假设，Weinstein [4]运用经典插值不等式得到Cauchy 问题(1)解的整体存在性的如下最佳条件：若$\|\varphi_0\|_{L^2} < \|Q\|_{L^2}$，则解$\varphi \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$在时间上整体存在；否则解整体不存在. 这里$Q$是方程

$$\Delta Q - Q + Q\,|Q|^{\frac{4}{N}} = 0$$

的一个正的基态解.

当$N = 3$且$p = 2$时，这对应于指数p处于质量次临界与能量临界之间的情形，Holmer与Roudenko [5]给出了Cauchy 问题散射的一个最佳判据，该判据由尺度不变的量$\|\varphi_0\|_{L^2} \|\nabla\varphi_0\|_{L^2}$与$M[\varphi]\, E[\varphi]$表示.具体地，若

$$M[\varphi]\, E[\varphi] < M[Q]\, E[Q]，\ \|\varphi_0\|_{L^2} \|\nabla\varphi_0\|_{L^2} < \|Q\|_{L^2} \|\nabla Q\|_{L^2}，$$

则解$\varphi(t)$整体存在并发生散射. 若

$$M[\varphi]\, E[\varphi] < M[Q]\, E[Q]，\ \|\varphi_0\|_{L^2} \|\nabla\varphi_0\|_{L^2} > \|Q\|_{L^2} \|\nabla Q\|_{L^2}，$$

则$\varphi(t)$在有限时间内爆破，其中$M[\varphi]$、$E[\varphi]$、Q分别表示解的质量、能量与基态.

综上所述，对于Cauchy问题(1)已讨论了$N \geqslant 1$且$p < \frac{4}{N}$和$N = 3$且$p = 2$的情形，而目前无关于$\frac{4}{N} \leqslant p < \frac{4}{N-2}$且$N \geqslant 3$情形的门槛条件研究. 本文旨在通过构造Pohozaev-Nehari不变流形，在位势井理论下来解决这一问题.

本文的后续安排如下：第二部分给出部分符号定义，并介绍和证明若干初步引理；第三部分证明解整体存在与有限时间爆破的门槛条件.

2. 符号与初步引理

记$A \sim B$表示A与B等价. 空间$L^2(\mathbb{R}^N)$的范数记为$\|\cdot\|$，内积记为$\int_{\mathbb{R}^N} u\varphi \mathrm{d}x$. 定义Cauchy问题(1)在空间$H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$上的Nehari泛函

$$I(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla\varphi|^2 + |\varphi|^2 - |\varphi|^{p+2}\right) \mathrm{d}x. \tag{4}$$

能量泛函与势能泛函分别定义为

$$E(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2 - \frac{1}{p+2}|\varphi|^{p+2}\right) \mathrm{d}x \tag{5}$$

和

$$J(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} |\nabla\varphi|^2 + \frac{1}{2} |\varphi|^2 - \frac{1}{p+2} |\varphi|^{p+2} \right) \mathrm{d}x. \tag{6}$$

由 [6]，可知椭圆方程

$$-\Delta Q + Q - |Q|^p Q = 0 \tag{7}$$

在$0 < p < \frac{4}{N-2}$时存在唯一的基态解. 显然，(7)的基态对应于的临界点，取$Q = \varphi$，有

$$-\Delta\varphi + \varphi - |\varphi|^p \varphi = 0.$$

位势井深即过山值水平（mountain pass level），由Cauchy问题(1)对应椭圆方程(7)的势能泛函的下确界来定义，即

$$d = \inf_{\{\lambda\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}, I(\lambda\varphi)=0\}} \{\sup J(\lambda\varphi)\}$$

而这与

$$d := \inf_{\{\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}, I(\varphi)=0\}} J(\varphi). \tag{8}$$

等价，本文位势井深的定义使用(8)式.

当势能泛函低于位势井深度，即$J(\varphi) < d$时，定义如下不变流形，

$$\mathcal{R}_+ := \left\{ \varphi \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right) \mid I(\varphi) > 0 \right\} \cup \{0\},$$

$$\mathcal{R}_- := \left\{ \varphi \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right) \mid I(\varphi) < 0 \right\}.$$

仅靠Nehari泛函产生的不稳定流形无法导出virial恒等式（见引理2.3）的凹性来证明爆破. 为此引入Pohozaev 泛函

$$P(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla\varphi|^2 - \frac{Np}{2(p+2)} |\varphi|^{p+2} \right) \mathrm{d}x \tag{9}$$

以及Pohozaev-Nehari不变流形

$$\mathcal{K}_+ := \left\{ \varphi \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right) \mid P(\varphi) > 0, I(\varphi) < 0 \right\},$$

$$\mathcal{K}_- := \left\{ \varphi \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right) \mid P(\varphi) < 0, I(\varphi) < 0 \right\},$$

$$\mathcal{M} := \left\{ \varphi \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right) \mid P(\varphi) = 0, I(\varphi) < 0 \right\} \setminus \{0\}.$$

为了说明$J(\varphi)$的临界点是方程$I(\varphi) = 0$与$P(\varphi) = 0$的解，给出下面的引理.

引理2.1. *若φ为(7)的基态解，则$I(\varphi) = 0$且$P(\varphi) = 0$.*

证明. 首先，当$\lambda > 0$时，直接计算可得

$$J(\lambda\varphi) = \frac{\lambda^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla\varphi|^2 + |\varphi|^2 \right) \mathrm{d}x - \frac{\lambda^{p+2}}{p+2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\varphi|^{p+2} \right) \mathrm{d}x$$

和

$$I(\lambda\varphi)=\lambda^2\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla\varphi|^2+|\varphi|^2\right)\mathrm{d}x-\lambda^{p+2}\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\varphi|^{p+2}\right)\mathrm{d}x.$$

可以观察到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}J(\lambda\varphi)=\frac{1}{\lambda}I(\lambda\varphi). \tag{10}$$

由于φ是(7)的基态解，因此φ是$J(\varphi)$的临界点. 于是由(10)可得$I(\varphi)=0$.

接下来证明$P(\varphi)=0$. 将(7)两边同乘以$x\cdot\nabla\varphi$，并在$\mathbb{R}^N$ 上积分，得

$$-\int_{\mathbb{R}^N}\Delta\varphi(x\cdot\nabla\varphi)\,\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^N}\varphi(x\cdot\nabla\varphi)\,\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi|^p\varphi(x\cdot\nabla\varphi)\,\mathrm{d}x=0. \tag{11}$$

对于第一项

$$\begin{aligned}-\int_{\mathbb{R}^N}\Delta\varphi(x\cdot\nabla\varphi)\,\mathrm{d}x&=\int_{\mathbb{R}^N}\nabla(x\cdot\nabla\varphi)\nabla\varphi\mathrm{d}x\\&=\int_{\mathbb{R}^N}\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N\frac{\partial}{\partial x_i}\left(x_j\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\mathrm{d}x\\&=\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\varphi|^2\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N x_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}x\\&=\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\varphi|^2\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}x\cdot\nabla|\nabla\varphi|^2\,\mathrm{d}x\\&=\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\varphi|^2\,\mathrm{d}x-\frac{N}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\varphi|^2\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{12}$$

第二项又可以写为

$$\int_{\mathbb{R}^N}\varphi(x\cdot\nabla\varphi)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}x\cdot\nabla\left(|\varphi|^2\right)\mathrm{d}x=-\frac{N}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi|^2\,\mathrm{d}x. \tag{13}$$

最后一项可以表示为

$$\begin{aligned}-\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi|^p\varphi(x\cdot\nabla\varphi)\,\mathrm{d}x&=-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}x\cdot\left(\left(|\varphi|^2\right)^{\frac{p}{2}}\nabla\left(|\varphi|^2\right)\right)\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{p+2}\int_{\mathbb{R}^N}x\cdot\nabla\left(|\varphi|^2\right)^{\frac{p+2}{2}}\mathrm{d}x\\&=\frac{N}{p+2}\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi|^{p+2}\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{14}$$

观察(11)-(14)式，我们可以得

$$\frac{N-2}{N}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\varphi|^2\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi|^2\,\mathrm{d}x-\frac{2}{p+2}\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi|^{p+2}\,\mathrm{d}x=0. \tag{15}$$

DOI: 10.12677/pm.2026.166156

(15)式两边再同乘$\frac{N}{2}$，有

$$\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\varphi|^2\mathrm{d}x+\frac{N}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi|^2\,\mathrm{d}x-\frac{N}{p+2}\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi|^{p+2}\,\mathrm{d}x=0,$$

再结合$I(\varphi)=0$可知$P(\varphi)=0$. □

接着，我们陈述 [6, 7]中为Cauchy 问题(1)建立的解的局部适定性.

命题2.1 (局部存在性 [7, 8]). 若$N\geqslant 3$，则对任意$\varphi_0\in H^1(\mathbb{R}^N)$，存在$T>0$以及唯一局部解$\varphi(x,t)$满足柯西问题*(1)*并且$\varphi(x,t)\in C\left([0,T];H^1(\mathbb{R}^N)\right)\cap C^1\left([0,T];H^{-1}(\mathbb{R}^N)\right)$. 此外，质量守恒与能量守恒成立，即

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi(t)|^2\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi_0|^2\,\mathrm{d}x\text{（质量守恒）}, \tag{16}$$

$$E(\varphi(t))=E(\varphi_0)\text{（能量守恒）}. \tag{17}$$

进一步，若

$$T_{\max}=\sup\left\{T>0:\varphi=\varphi(x,t)\text{ 在 }[0,T]\right\}<\infty,$$

则

$$\lim_{t\to T_{\max}}\|\nabla\varphi\|=\infty\text{（爆破）}.$$

否则$T=\infty$（整体存在）.

virial 恒等式是在薛定谔方程背景下证明爆破结果的一个著名且有效的工具，下面给出Cauchy 问题的virial 恒等式.

命题2.2 (Virial 恒等式 [9]). 令$\varphi\in C\left([0,T];H^1(\mathbb{R}^N)\right)\cap C^1([0,T];H^{-1}(\mathbb{R}^N))$为（*1*）的解，定义

$$\mathcal{J}:=(t)\int_{\mathbb{R}^N}|x|^2\,|\varphi|^2\,\mathrm{d}x,$$

则

$$\mathcal{J}''(t)=8\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\varphi|^2\,\mathrm{d}x-\frac{4Np}{p+2}\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi|^{p+2}\,\mathrm{d}x=8P(\varphi(t)). \tag{18}$$

3. 整体存在与有限时间爆破的门槛条件

由于集合$\mathcal{M}$，$\mathcal{K}_+$和$\mathcal{K}_-$含多重约束，需先说明其非空性.

引理3.1. 集合$\mathcal{M}$，$\mathcal{K}_+$和$\mathcal{K}_-$均非空.

证明. 由引理2.1可知，存在$\varphi\in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}$ 使得

$$I(\varphi)=0\text{且}P(\varphi)=0. \tag{19}$$

取$\varphi\in\mathcal{M}$，并定义缩放函数

$$\varphi_\lambda:=\lambda^{\frac{2}{p}}\varphi(\lambda x)，\ \lambda>0. \tag{20}$$

设

$$\gamma := \frac{4}{p} + 2 - N，\ \beta := \frac{4}{p} - N \tag{21}$$

由(2)和(21)可得

$$\lambda > 0，\ \beta \leqslant 0，\ \gamma = \beta + 2.$$

由(4)、(9)、(20)和(21)计算得到

$$I\left(\varphi_\lambda\right) = \lambda^\gamma \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla\varphi|^2 - |\varphi|^{p+2}\right) \mathrm{d}x + \lambda^\beta \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^2 \,\mathrm{d}x, \tag{22}$$

以及

$$P\left(\varphi_\lambda\right) = \lambda^\gamma \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla\varphi|^2 - \frac{Np}{2(p+2)} |\varphi|^{p+2}\right) \mathrm{d}x. \tag{23}$$

结合(19)和(22)，可得

$$\begin{aligned} I\left(\varphi_\lambda\right) &= \lambda^\beta \left(\lambda^2 \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla\varphi|^2 - |\varphi|^{p+2}\right) \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\right) \\ &= \lambda^\beta \left(\lambda^2 I(\varphi) + \left(1 - \lambda^2\right) \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\right) \\ &= \lambda^\beta \left(1 - \lambda^2\right) \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^2 \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

因此，对任意$\lambda > 1$，都有$I\left(\varphi_\lambda\right) < 0$. 同理，由(19)和(23)及$P(\varphi) = 0$可知，对任意$\lambda > 1$，均有$P\left(\varphi_\lambda\right) = 0$. 于是当$\lambda > 1$ 时，$\varphi^\lambda \in \mathcal{M}$，从而$\mathcal{M}$非空.

接下来证明$\mathcal{K}_+$非空. 取$\varphi \in \mathcal{M}$，则

$$I(\varphi) < 0，\ P(\varphi) = 0. \tag{24}$$

令$u\lambda\varphi$，其中$\lambda \to 1^-$，则$u \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$. 由(4)、(9)及(24)可得

$$I(u) = \lim_{\lambda \to 1^-} I(\lambda\varphi) < 0，\ P(u) = \lim_{\lambda \to 1^-} P(\lambda\varphi) > 0.$$

因此$u \in \mathcal{K}_+$，从而$\mathcal{K}_+$非空.

最后证明$\mathcal{K}_-$非空. 仍取满足(24) 的φ，令$\nu\lambda\varphi$，其中$\lambda > 1$，则$\nu \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$. 由(4)、(9)及(24)可知，对任意$\lambda > 1$，均有

$$I(\nu) < 0，\ P(\nu) < 0, \tag{25}$$

即$\nu \in \mathcal{K}_-$，因此$\mathcal{K}_-$非空.

综上所述，集合$\mathcal{M}$，$\mathcal{K}_+$和$\mathcal{K}_-$均非空. □

接下来讨论引理3.2 中给出的基态的变分刻画，该引理在建立Cauchy 问题(1) 的交叉不变流形

时起着关键作用. 为方便引入这一引理，考虑如下交叉约束极小化问题：

$$d_{\mathcal{M}} := \inf_{\varphi \in \mathcal{M}} J(\varphi) \tag{26}$$

引理3.2. 设p满足(2)式，有$d_{\mathcal{M}} \geqslant d \geqslant 0$.

证明. 首先证明$d > 0$. 由d的定义可知，当$I(\varphi) = 0$时，有

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla \varphi|^2 + |\varphi|^2 \right) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^{p+2} \, \mathrm{d}x, \tag{27}$$

因此

$$0 < \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi|^2 \, \mathrm{d}x.$$

为便于后续证明，取常数$\hat{C} > 0$，使得

$$0 < \hat{C} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi|^2 \, \mathrm{d}x \leqslant \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi|^2 \, \mathrm{d}x. \tag{28}$$

由(28)与Sobolev嵌入$H^1\left(\mathbb{R}^N\right) \hookrightarrow L^{p+2}\left(\mathbb{R}^N\right)$得

$$\begin{aligned} \hat{C} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi|^2 \, \mathrm{d}x &< \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla \varphi|^2 + |\varphi|^2 \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^{p+2} \, \mathrm{d}x \\ &\leqslant C^{p+2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{p+2}{2}}, \end{aligned} \tag{29}$$

其中$C > 0$为Sobolev嵌入常数. 令$\bar{C} = \hat{C}^{\frac{2}{p}} C^{\frac{-2(p+2)}{p}}$，由(29)可得

$$0 < \bar{C} \leqslant \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi|^2 \, \mathrm{d}x. \tag{30}$$

结合(29)，(30)和$I(\varphi) = 0$可得

$$\begin{aligned} J(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 + \frac{1}{2} |\varphi|^2 - \frac{1}{p+2} |\varphi|^{p+2} \right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{p}{2(p+2)} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla \varphi|^2 + |\varphi|^2 \right) \mathrm{d}x + \frac{1}{p+2} I(\varphi) \\ &\geqslant \frac{\bar{C} \hat{C} p}{2(p+2)}, \end{aligned} \tag{31}$$

即$J(\varphi)$在约束集$I(\varphi) = 0$上有正下界，从而$d > 0$.

接下来证明$d_{\mathcal{M}} \geqslant d$. 回顾(22)，可知$\lim_{\lambda \to 0^+} I(\varphi_\lambda) > 0$且$I(\varphi) < 0$，这可推出存在唯一$0 < \lambda^* < 1$，使得$I(\varphi_{\lambda^*}) = 0$. 显然$\varphi \neq 0$且$\varphi_{\lambda^*} \neq 0$. 由(23)及$P(\varphi) = 0$可知，对任意$\lambda > 0$，均

有$P\left(\varphi_{\lambda}\right)=0$. 因此，

$$J(v_{\lambda})=\lambda^{\gamma}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{Np-4}{4(p+2)}|v|^{p+2}\,\mathrm{d}x+\lambda^{\beta}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{2}|v|^2\,\mathrm{d}x \tag{32}$$

和

$$I(v_{\lambda})=\lambda^{\gamma}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{Np-2p-4}{2(p+2)}|v|^{p+2}\,\mathrm{d}x+\lambda^{\beta}\int_{\mathbb{R}^N}|v|^2\,\mathrm{d}x. \tag{33}$$

由(21)注意到

$$Np-4=-\beta p，Np-2p-4=-\gamma p,$$

因此由(32)与(33)可得

$$\lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}J\left(\varphi_{\lambda}\right)=\frac{1}{2}\beta I\left(\varphi_{\lambda}\right).$$

从而存在唯一的$\lambda^{*}\in(0,1)$，使得$J\left(\varphi_{\lambda}\right)$在$\lambda=\lambda^{*}$处取得最小值. 进一步，由于$1>\lambda^{*}$，有

$$J\left(\varphi\right)=J\left(\varphi_{\lambda}\right)\geqslant J\left(\varphi_{\lambda^{*}}\right). \tag{34}$$

结合(8)的定义，可得

$$J\left(\varphi_{\lambda^{*}}\right)\geqslant d. \tag{35}$$

由(34) 与(35) 立即推出$J\left(\varphi\right)\geqslant d$，从而$d_{\mathcal{M}}\geqslant d$. 综上所述，引理得证. □

不变流形是位势井理论的核心，通过稳定流形决定解的整体存在性，通过不稳定流形决定解的爆破解，从而给出初值的阈值条件. 下面构造Cauchy 问题(1) 的不变流形.

定理3.1 (**不变流形**). *若$J\left(\varphi_0\right)<d$，则$\mathcal{K}_{+},\mathcal{K}_{-},\mathcal{R}_{+}$和$\mathcal{R}_{-}$关于时间$t$均为不变集.*

证明. 首先，由守恒律(16)与(17)可得

$$J\left(\varphi\left(t\right)\right)=J\left(\varphi_0\right),t\in[0,T), \tag{36}$$

其中T表示解$\varphi\left(t\right)$的最大存在时间. 由假设$J\left(\varphi_0\right)<d$，有

$$J\left(\varphi\left(t\right)\right)<d，t\in[0,T). \tag{37}$$

现设$\varphi_0\in\mathcal{K}_{+}$，只需证明对任意$t\in(0,T)$，均有$\varphi\left(t\right)\in\mathcal{K}_{+}$. 首先证明对任意$t\in[0,T)$，都有$I\left(\varphi\left(t\right)\right)<0$. 采用反证法. 注意到$I\left(\varphi\left(t\right)\right)$关于$t$连续，假设存在最小的$t_1\in(0,T)$，使得$I\left(\varphi\left(t_1\right)\right)=0$，且对任意$t\in[0,t_1)$，都有$P\left(\varphi\left(t\right)\right)>0$. 显然$\varphi\left(t_1\right)\neq0$，否则由(16)可得$\varphi_0=0$，这与假设$I\left(\varphi_0\right)<0$矛盾. 于是根据$d$的定义，有

$$J\left(\varphi\left(t_1\right)\right)\geqslant d,$$

这与(37)矛盾. 因此，对任意$t\in[0,T)$，必有$I\left(\varphi\left(t\right)\right)<0$.

接下来证明对任意$t\in[0,T)$，都有$P\left(\varphi\left(t\right)\right)>0$. 同样利用连续性并采用反证法证明. 假设存在最小的$t_2\in(0,T)$，使得$P\left(\varphi\left(t_2\right)\right)=0$. 由于已证对所有$t\in[0,T)$有$I\left(\varphi\left(t\right)\right)<0$，于是$\varphi\left(t_2\right)\in\mathcal{M}$.

由引理3.2 可得

$$J(\varphi(t_2)) \geqslant d_{\mathcal{M}} \geqslant d,$$

这同样与(37)矛盾. 因此，对任意$t \in [0, T)$，必有$P(\varphi(t)) > 0$.

综上所述，当$\varphi_0 \in \mathcal{K}_+$时，对任意$t \in (0, T)$，均有$\varphi(t) \in \mathcal{K}_+$. 通过完全类似的论证，可以得到$\mathcal{K}_-$、$\mathcal{R}_+$与$\mathcal{R}_-$关于时间$t$也均为不变集. 定理得证. □

由$\mathcal{K}_+$与$\mathcal{R}_+$的不变性，可证明Cauchy问题(1)解的整体存在性，见定理3.4.

定理3.2 (**整体存在**). *设p满足(2)，若$J(\varphi_0) < d$且$\varphi_0 \in \mathcal{R}_+ \cup \mathcal{K}_+$，则Cauchy 问题(1) 的解$\varphi(x,t)$在时间上整体存在.*

证明. 证明分为两种情况：$\varphi_0 \in \mathcal{R}_+$和$\varphi_0 \in \mathcal{K}_+$.

情形(1)：$\varphi_0 \in \mathcal{R}_+$.

若$\varphi_0 = 0$，则由质量守恒律(16) 可知$\varphi(t) \equiv 0$为平凡解，显然在时间上整体存在. 若$\varphi_0 \neq 0$，由定理3.1 可知，对任意$t \in [0, T)$，都有$\varphi(x,t) \in \mathcal{R}_+ \setminus \{0\}$. 因此，由公式(31) 得

$$d > J(\varphi) > \frac{p}{2(p+2)} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla\varphi|^2 + |\varphi|^2\right) \mathrm{d}x, \tag{38}$$

结合不等式(28)，可推出

$$0 < \int_{\mathbb{R}^N} \left(\hat{C}|\nabla\varphi|^2 + |\varphi|^2\right) \mathrm{d}x < \frac{2d(p+2)}{p}.$$

由命题2.1（局部存在性），可将局部解的存在时间T延拓至无穷大，从而得到整体存在性. 因此，当$J(\varphi) < d$且$\varphi_0 \in \mathcal{R}_+$时，Cauchy 问题(1) 的解整体存在.

情形(2)：$\varphi_0 \in \mathcal{K}_+$.

由定理3.3 可知，对任意$t \in [0, T)$，均有$\varphi(t) \in \mathcal{K}_+$，即$P(\varphi(t)) > 0$. 由条件(2)及能量泛函的表达式，可得

$$\begin{aligned} d > J(\varphi) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{Np}\right) \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla\varphi|^2 + |\varphi|^2\right) \mathrm{d}x \\ &\quad + \frac{2}{Np} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla\varphi|^2 + |\varphi|^2 - \frac{Np}{2(p+2)} |\varphi|^{p+2}\right) \mathrm{d}x \\ &> \frac{Np-4}{2Np} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\varphi|^2 + |\nabla\varphi|^2\right) \mathrm{d}x + \frac{2}{Np} \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^2 \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{39}$$

由于在$p = \frac{4}{N}$的情形下，式(39) 中不再显式包含$\|\nabla\varphi\|_{L^2}$项，因此该情形的证明需要进一步区分指数范围.

情形(a)：$\frac{4}{N} < p < \frac{4}{N-2}$.

由(28)与(39) 可得

$$0 < \int_{\mathbb{R}^N} \left(\hat{C}|\nabla\varphi|^2 + |\varphi|^2\right) \mathrm{d}x < \frac{2Npd}{Np-4},$$

其余证明过程与情形(1) 完全类似，从而可推出解在时间上整体存在.

情形(b)：$p=\frac{4}{N}$.

此时，式(39) 化为

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi|^2\,\mathrm{d}x<d. \tag{40}$$

定义$\varphi_\mu(x)\,\mu^{\frac{N}{p+2}}\varphi(\mu x)$，$\mu>0$. 由Pohozaev 泛函的定义可得

$$P(\varphi_\mu)=\mu^{\frac{4-(N-2)p}{p+2}}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\varphi|^2\,\mathrm{d}x-\frac{Np}{2(p+2)}\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi|^{p+2}\,\mathrm{d}x. \tag{41}$$

当$p=\frac{4}{N}$时，由于$\frac{4-(N-2)p}{p+2}=\frac{1}{2+N}>0$且$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\varphi|^2\,\mathrm{d}x>0$，此时$P(\varphi_\mu)$是关于$\mu$的严格递增函数. 结合$\lim\limits_{\mu\to0^+}P(\varphi_\mu)<0$与$P(\varphi)>0$，可知存在唯一的$\mu^*\in(0,1)$，使得$P(\varphi_{\mu^*})=0$.进一步，由(6)、(9)及$p=\frac{4}{N}$，可得

$$J(\varphi_{\mu^*})=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi_{\mu^*}|^2\,\mathrm{d}x=\frac{\mu^{*\frac{-Np}{p+2}}}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi|^2\,\mathrm{d}x,$$

联立(40)推出

$$J(\varphi_{\mu^*})<\mu^{*\frac{-Np}{p+2}}d. \tag{42}$$

接下来分析$I(\varphi_\mu)$. 注意到

$$I(\varphi_\mu)=\mu^{\frac{4-(N-2)p}{p+2}}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\varphi|^2\,\mathrm{d}x+\mu^{\frac{-Np}{p+2}}\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi|^2\,\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi|^{p+2}\,\mathrm{d}x, \tag{43}$$

当$p=\frac{4}{N}$时，有$\lim\limits_{\mu\to0^+}I(\varphi_\mu)>0$. 结合对任意$t\in[0,T)$有$I(\varphi(t))<0$，可分两种情形讨论：

情形(i)：若$I(\varphi_{\mu^*})<0$.

由(26)、引理3.2 及$P(\varphi_{\mu^*})=0$，可得

$$J(\varphi_{\mu^*})\geqslant d_{\mathcal{M}}\geqslant d>J(\varphi)$$

从而推出

$$\left(1-\mu^{*\frac{4-(N-2)p}{p+2}}\right)\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v|^2dx+\left(1-\mu^{*-\frac{Np}{p+2}}\right)\int_{\mathbb{R}^N}|v|^2\,dx<0. \tag{44}$$

由$\mu^*\in(0,1)$、(28)、(40)与(44)，可推出

$$0<\hat{C}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v|^2\,dx<\frac{\mu^{*-\frac{Np}{p+2}}-1}{1-\mu^{*\frac{4-(N-2)p}{p+2}}}\int_{\mathbb{R}^N}|v|^2\,dx<2d\frac{\mu^{*-\frac{Np}{p+2}}-1}{1-\mu^{*\frac{4-(N-2)p}{p+2}}}. \tag{45}$$

可得$\int|\nabla v|^2\mathrm{d}x$有界.

情形(ii)：若$I(\varphi_{\mu^*})\geqslant0$.

由(42) 可得

$$J(v_{\mu^*})-\frac{1}{p+2}I(v_{\mu^*})<\mu^{*-\frac{Np}{p+2}}\,d.$$

等价于

$$\mu^{*\frac{4-(N-2)p}{p+2}}\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla v|^2+\frac{\alpha}{|x|^2}|v|^2\right)dx+\mu^{*-\frac{Np}{p+2}}\int_{\mathbb{R}^N}|v|^2\,dx<\frac{2(p+2)}{p}\,\mu^{*-\frac{Np}{p+2}}\,d.$$

结合(34)，可推出

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\varphi|^2\,\mathrm{d}x<\frac{2d\,(p+2)}{p\mu^{*2}\hat{C}}.$$

综合情形(i)和(ii)，可得在质量临界情形$p=\frac{4}{N}$下，对任意$t\in[0,T)$，$\|\nabla\varphi\,(t)\|_{L^2}$有界.

综上，在两种情形$\varphi_0\in\mathcal{R}_+$或$\varphi_0\in\mathcal{K}_+$下，Cauchy 问题(1) 的解均在时间上整体存在. 定理得证. □

借助不稳定不变流形及引理2.3 中的virial 恒等式，现可证明定理3.5.

定理3.3 (**有限时间爆破**). *设p满足条件(2). 若$J\,(\varphi_0)<d$且$\varphi_0\in\mathcal{K}_-$，则Cauchy 问题(1)的解$\varphi\,(x,t)$在有限时间内爆破.*

证明. 由$J\,(\varphi_0)<d$、$\varphi_0\in\mathcal{K}_-$以及定理3.3，可$\varphi\in\mathcal{K}_-$，即$I\,(\varphi)<0$且$P\,(\varphi)<0$.若令

$$\varphi_\mu=\mu^{\frac{N}{p+2}}\varphi\,(\mu x)\ \ (\mu>0)\,,$$

由(2)、(41)以及$P\,(\varphi)<0$可推出：存在唯一的$\mu^*>1$，使得$P\,(\varphi_{\mu^*})=0$. 此外，当$1\leqslant\mu\leqslant\mu^*$时，有$P\,(\varphi_\mu)<0$. 利用(2)、(43)以及$I\,(\varphi)<0$，我们对$I\,(\varphi_\mu)$ 分析两种可能情形：当$1<\mu\leqslant\mu^*$时，$I\,(\varphi_\mu)<0$；至少存在一个ε满足$1<\varepsilon<\mu^*$，使得$I\,(\varphi_\varepsilon)=0$. 下面对这两种情形分别讨论.

情形(1)：当$1<\mu\leqslant\mu^*$时，$I\,(\varphi_\mu)<0$.

该情形蕴含$I\,(\varphi_{\mu^*})<0$，$P\,(\varphi_{\mu^*})=0$. 因此由(26) 与引理3.2，我们得到

$$J\,(\varphi_{\mu^*})\geqslant d_{\mathcal{M}}\geqslant d. \tag{46}$$

此外，

$$\begin{aligned}J\,(\varphi)-J\,(\varphi_{\mu^*})=&\frac{1}{2}\left(1-(\mu^*)^{\frac{4-(N-2)p}{p+2}}\right)\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\varphi|^2\,\mathrm{d}x\\&+\frac{1}{2}\left(1-(\mu^*)^{-\frac{Np}{p+2}}\right)\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi|^2\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{47}$$

类似地，

$$P\,(\varphi)-P\,(\varphi_{\mu^*})=\left(1-(\mu^*)^{\frac{4-(N-2)p}{p+2}}\right)\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\varphi|^2\,\mathrm{d}x. \tag{48}$$

由于$\mu^*>1$，有$\mu^{*-\frac{Np}{p+2}}<1$. 结合(47)与(48)可得

$$J\,(\varphi)-J\,(\varphi_{\mu^*})>\frac{1}{2}P\,(\varphi)-\frac{1}{2}P\,(\varphi_{\mu^*})=\frac{1}{2}P\,(\varphi)\,. \tag{49}$$

进一步，由(46)与(49) 得

$$P\,(\varphi)<2\,(J\,(\varphi)-J\,(\varphi_{\mu^*}))<2\,(J\,(\varphi)-d_{\mathcal{M}})\leqslant 2\,(J\,(\varphi)-d)\,. \tag{50}$$

情形(2)：至少存在一个ε满足$1<\varepsilon<\mu^*$，使得$I\,(\varphi_\varepsilon)=0$.

该情形蕴含$I\left(\varphi_{\varepsilon}\right)=0$、$P\left(\varphi_{\varepsilon}\right)<0$. 为此，我们由(48)与(49) 得到

$$J\left(\varphi\right)-J\left(\varphi_{\varepsilon}\right)>\frac{1}{2}P\left(\varphi\right)-\frac{1}{2}P\left(\varphi_{\varepsilon}\right)\geqslant\frac{1}{2}P\left(\varphi\right). \tag{51}$$

此外，由(11) 有$J\left(\varphi_{\varepsilon}\right)\geqslant d$. 因此，由(51) 与$J\left(\varphi_{\varepsilon}\right)\geqslant d$我们同样可推出

$$P\left(\varphi\right)<2\left(J\left(\varphi\right)-d\right) \tag{52}$$

由(9)、(18)、(37)、(50) 与(52) 可得

$$\mathcal{J}''\left(t\right)=8P\left(\varphi\right)<16\big(\mathcal{J}\left(\varphi_0\right)-d\big). \tag{53}$$

对(53)两边从0到t积分，我们有

$$\mathcal{J}'\left(t\right)-\mathcal{J}'\left(0\right)<16\left(\mathcal{J}\left(\varphi_0\right)-d\right)t,\ \ t>0,$$

进一步得到

$$\mathcal{J}\left(t\right)<\mathcal{J}\left(0\right)+\mathcal{J}'\left(0\right)t+8\left(\mathcal{J}\left(\varphi_0\right)-d\right)t^2. \tag{54}$$

由$\varphi\in\mathcal{K}_-$可知$\varphi\neq0$，且$J\left(\varphi_0\right)<d$. 因此由(54)推出存在$T_1\in(0,\infty)$，使得$\mathcal{J}\left(T_1\right)=0$，并且当$t\in(0,T_1)$时$\mathcal{J}\left(t\right)>0$. 此外，由Cauchy - Schwarz 不等式，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi|^2\,\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_{\mathbb{R}^N}|x|^2|\varphi|^2\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-2}|\varphi|^2\,\mathrm{d}x\right) \tag{55}$$

结合质量守恒(16)以及$\mathcal{J}\left(T_1\right)=0$，可得

$$\lim_{t\to T_1}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\varphi|^2\,\mathrm{d}x=\infty. \tag{56}$$

因此，只要$\varphi_0\in\mathcal{K}_-$，Cauchy 问题(1)的解$\varphi\left(x,t\right)$必在有限时间内爆破. □

注3.1. 位势井理论的核心是揭示非线性偏微分方程解对初值的依赖关系. 具体而言，该理论可通过对初值进行最佳划分，给出方程定解问题整体存在与有限时间爆破的判别条件. 其中，势能泛函与Nehari泛函发挥着关键作用：一方面，位势井深度将能量泛函划分为次临界、临界与超临界三个能级；另一方面，Nehari 流形将解空间分为稳定集与不稳定集，分别对应解的整体存在与有限时间爆破。本文在次临界初始能级$J\left(\mu_0\right)<d$下，针对Cauchy问题(1)开展解的门槛条件研究，正是以位势井理论为基础. 其核心思路是借助约束变分结构对初值空间进行划分：当初值属于稳定集时，对应解整体存在；当初值属于不稳定集时，对应解在有限时间内爆破. 相比之下，引言中提及的Holmer Roudenko 型判据是针对自由聚焦非线性薛定谔方程建立的质量 - 能量型阈值判据，主要通过尺度变换技巧对质量、能量与初值进行组合分析. 两种方法均得到了解存在与非存在的最优条件，但本文侧重揭示初值对解动力学行为的影响，而文献 [5] 更关注基态解与初值之间的制约关系. 此外，本文所研究模型的非线性指标范围更广，且无需施加文献 [5]中关于初值径向对称的假设.

基金项目

本工作得到了湖南省大学生创新训练计划项目资金支持(项目号：S202510536081).

参考文献

[1] Masaki, S. (2017) On Minimal Nonscattering Solution for Focusing Mass-Subcritical Nonlinear Schrödinger Equation. *Communications in Partial Differential Equations*, **42**, 626-653. https://doi.org/10.1080/03605302.2017.1286672

[2] Merle, F. and Raphael, P. (2004) On Universality of Blow-Up Profile for L^2 Critical Nonlinear Schrödinger Equation. *Inventiones Mathematicae*, **156**, 565-672. https://doi.org/10.1007/s00222-003-0346-z

[3] Merle, F. and Raphael, P. (2005) On a Sharp Lower Bound on the Blow-Up Rate for the L^2 Critical Nonlinear Schrödinger Equation. *Journal of the American Mathematical Society*, **19**, 37-90. https://doi.org/10.1090/s0894-0347-05-00499-6

[4] Weinstein, M.I. (1983) Nonlinear Schrödinger Equations and Sharp Interpolation Estimates. *Communications in Mathematical Physics*, **87**, 567-576. https://doi.org/10.1007/bf01208265

[5] Holmer, J. and Roudenko, S. (2008) A Sharp Condition for Scattering of the Radial 3D Cubic Nonlinear Schrödinger Equation. *Communications in Mathematical Physics*, **282**, 435-467. https://doi.org/10.1007/s00220-008-0529-y

[6] Mukherjee, D., Nam, P.T. and Nguyen, P. (2021) Uniqueness of Ground State and Minimal-Mass Blow-Up Solutions for Focusing NLS with Hardy Potential. *Journal of Functional Analysis*, **281**, Article ID: 109092. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2021.109092

[7] Okazawa, N., Suzuki, T. and Yokota, T. (2012) Energy Methods for Abstract Nonlinear Schrödinger Equations. *Evolution Equations and Control Theory*, **1**, 337-354. https://doi.org/10.3934/eect.2012.1.337

[8] Bensouilah, A., Dinh, V.D. and Zhu, S. (2018) On Stability and Instability of Standing Waves for the Nonlinear Schrödinger Equation with an Inverse-Square Potential. *Journal of Mathematical Physics*, **59**, Article ID: 101505. https://doi.org/10.1063/1.5038041

[9] Murphy, J. (2019) The Nonlinear Schrödinger Equation with an Inverse-Square Potential. In: Zheng, S.J., *et al.*, Eds., *Nonlinear Dispersive Waves and Fluids*, American Mathematical Society, 215-225.