

具次线性机制的趋化系统古典解的整体有界性

邹佳运

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2026年5月14日; 录用日期: 2026年6月16日; 发布日期: 2026年6月29日

摘要

本文研究光滑有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) 中带有奇异敏感性与次线性产生项的抛物-抛物趋化系统

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \chi \nabla \cdot \left(\frac{u}{v^\alpha} \nabla v \right), \\ v_t = \Delta v - v + u^\beta, \end{cases}$$

其中 $\alpha \in (0, 1), \beta \in (0, 1), \chi > 0$. 本文证明: 当 $\alpha \in (0, 1), \beta \in \left(0, \frac{2}{n}\right)$ 且 $\chi > 0$, 则系统存在唯一的整体有界古典解. 这表明次线性产生项有助于保证具有奇异趋化机制的抛物-抛物趋化系统整体有界古典解的存在性.

关键词

趋化性, 奇异敏感性, 有界性

Global Boundedness in A Parabolic-Parabolic Chemotaxis System with Singular Sensitivity and Sublinear Production

Jiayun Zou

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: May 14th, 2026; accepted: Jun. 16th, 2026; published: Jun. 29th, 2026

Abstract

We consider a parabolic-parabolic chemotaxis system with singular sensitivity and sublinear production in a smooth bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$)

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \chi \nabla \cdot \left(\frac{u}{v^\alpha} \nabla v \right), \\ v_t = \Delta v - v + u^\beta, \end{cases}$$

where $\alpha \in (0, 1)$, $\beta \in (0, 1)$, and $\chi > 0$. It is proven that the system has a globally bounded classical solution under the conditions $\alpha \in (0, 1)$, $\beta \in (0, \frac{2}{n})$, and $\chi > 0$. This shows that the sublinear production effect is indeed beneficial in ensuring the existence of a globally bounded classical solution for the parabolic-parabolic chemotaxis system with a singular chemotactic mechanism.

Keywords

Chemotaxis, Singular Sensitivity, Boundedness

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

趋化性是细胞沿化学信号浓度梯度的定向运动,在多细胞生物生命活动中扮演关键角色.为刻画趋化聚集等重要生物现象,数理生物学中引入如下抛物-抛物型Keller-Segel系统

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \chi \nabla \cdot \left(\frac{u}{v^\alpha} \nabla v \right), & \text{在 } \Omega \times (0, T), \\ v_t = \Delta v - v + u, & \text{在 } \Omega \times (0, T), \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\chi > 0, \alpha \in (0, 1)$. Li和Xie在文献 [1]中针对抛物-抛物奇异趋化系统研究发现,在二维情况

下,当 $\alpha \geq \frac{1}{4}$ 时,奇异敏感性可完全排除Dirac型奇性的产生;当 $\alpha \in (0, \frac{1}{4})$ 且初值 L^1 范数适当小时,系统存在整体广义解;进一步在 $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ 且初值满足小性条件时,该广义解最终有界光滑,并趋于空间均衡态.

上述研究的是信号线性产生情形,而信号产生项的增长速率是影响趋化系统整体适定性的另一核心因素.Zhao与Xiao在文献 [2]中针对抛物-椭圆奇异趋化系统的研究表明,在二维及以上的情况下,当 $\alpha \in (0, 1)$ 且 $\beta \in (0, \frac{2}{n})$ 时,次线性源的正则化效应足够强,使得对任意趋化系数 $\chi > 0$,系统都存在整体有界古典解;当 $\alpha = 1$ 且 $\beta \in (0, 1)$ 时,只需趋化系数适当小,同样能保证解整体有界.次线性产生项 u^β 可进一步削弱趋化聚集效应,相较于线性产生项,次线性增长放缓了化学信号的生成速度,能有效缓解细胞聚集带来的奇性风险,显著放大奇异敏感性的正则化作用,甚至可在无趋化系数限制的条件下保证解整体有界.受上述研究启发,本文将次线性产生项引入抛物-抛物奇异趋化系统,探究奇异敏感性与次线性产生项的协同正则化效应,具体研究光滑有界区域 $\mathbb{R}^n (n \geq 2)$ 中光滑有界开区域 Ω 上的趋化系统

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \chi \nabla \cdot \left(\frac{u}{v^\alpha} \nabla v \right), & \text{在 } \Omega \times (0, T), \\ v_t = \Delta v - v + u^\beta, & \text{在 } \Omega \times (0, T), \end{cases} \quad (2)$$

其中 $\chi > 0, \alpha \in (0, 1), \beta \in \left(0, \frac{2}{n}\right), T \in (0, \infty]$ 为最大存在时间.初值满足

$$\begin{cases} u_0 \in C^0(\bar{\Omega}) \text{是非负的,且} \int_{\Omega} u_0 dx > 0, \\ v_0 \in W^{1,\infty}(\Omega), \text{且} v_0 > 0 \text{在 } \Omega. \end{cases} \quad (3)$$

系统满足齐次Neumann 边界条件

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, \quad \text{在 } \partial\Omega \times (0, T). \quad (4)$$

本研究带次线性产生项的抛物-抛物型奇异趋化系统(2),并证明定理1.1.

定理1.1. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n (n \geq 2)$ 为光滑有界开区域.若 $\alpha \in (0, 1), \beta \in \left(0, \frac{2}{n}\right)$ 且 $\chi > 0$,则系统存在唯一的整体有界古典解 (u, v) .

注1.本研究的核心难点在于,趋化变量 v 同时受到线性衰减机制与奇异项的双向作用,两种效应相互拮抗,而次线性源项 u^β 正是用于平衡该竞争关系,本文的主要目标就是证明在上述完全抛物框架下,次线性源项能够有效阻止 v 发生爆破,并最终得到 v 趋于零的整体有界性结论.为克服这一障碍,我们引入如下能量泛函

$$y(t) = \int_{\Omega} u^p dx + \int_{\Omega} \frac{u^p}{v^q} dx,$$

结合该泛函与关键先验估计,我们建立了 u 的 L^p 有界性,最终得到其一致有界性.

2. 预备知识

系统(2)古典解的局部存在性与唯一性可通过文献 [2]中的标准压缩映射方法得到.

引理2.1. 若初值满足(3), $\chi > 0$ 且 $\alpha, \beta \in (0, 1)$, 则存在 $T \in (0, \infty]$ 和唯一的非负函数对 (u, v) 使得

$$\begin{cases} u \in C^0(\bar{\Omega} \times [0, T)) \cap C^{2,1}(\bar{\Omega} \times (0, T)), \\ v \in C^0(\bar{\Omega} \times [0, T)) \cap C^{2,1}(\bar{\Omega} \times (0, T)) \cap L^\infty((0, T); W^{1,\infty}(\Omega)) \end{cases}$$

且在 $\Omega \times (0, T)$ 内有 $u, v > 0$, 在古典意义下满足系统(1.1).此外, 要么 $T = \infty$, 要么

$$\limsup_{t \nearrow T} (\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v(\cdot, t)\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}) = \infty.$$

在此, 我们给出线性抛物方程解的两个经典估计.

引理2.2. [3, 引理4.1] 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) 为光滑有界开区域.假设 $p \geq 1, q \geq 1$ 满足

$$\begin{cases} q < \frac{np}{n-p}, & \text{当 } p < n, \\ q < \infty, & \text{当 } p = n, \\ q = \infty, & \text{当 } p > n, \end{cases}$$

且 $V_0 \in W^{1,q}(\Omega)$.设 V 为下述系统的古典解

$$\begin{cases} V_t = \Delta V - \alpha V + f & \text{在 } \Omega \times (0, T), \\ \frac{\partial V}{\partial \nu} = 0 & \text{在 } \partial\Omega \times (0, T), \\ V(\cdot, 0) = V_0 & \text{在 } \Omega, \end{cases}$$

其中 $\alpha > 0, T \in (0, \infty]$.若 $f \in L^\infty((0, T); L^p(\Omega))$, 则 $V \in L^\infty([0, T]; W^{1,q}(\Omega))$.

引理2.3. [4, 引理2.3] 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), $p \in (n, \infty), T \in (0, \infty]$.则存在正常数 $L_1 = L_1(n, p, \Omega)$, 使得对任意 $t \in (t_0, T)$ (其中 $t_0 := \max\{1, \frac{T}{2}\}$), 下述不等式成立

$$\int_{t_0}^t e^{\frac{ps}{2}} \int_{\Omega} |\Delta g|^p dx ds \leq L_1 \left(\int_{t_0}^t e^{\frac{ps}{2}} \int_{\Omega} |f|^p dx ds + e^{\frac{pt_0}{2}} \|\Delta g(\cdot, t_0)\|_{L^p(\Omega)}^p \right),$$

其中 $f \in L^p(\Omega \times (0, T))$, g 为下述带初值 $g_0 \in W^{2,p}(\Omega)$ 系统的古典解

$$\begin{cases} g_t = \Delta g - g + f & \text{在 } \Omega \times (0, T), \\ \frac{\partial g}{\partial \nu} = 0 & \text{在 } \partial\Omega \times (0, T), \\ g(\cdot, 0) = g_0 & \text{在 } \Omega. \end{cases}$$

3. 先验估计

设 u, v 是引理2.1 中系统(2) 的局部古典解.我们给出一些基本估计.

引理3.1. 设 $\chi > 0, \alpha \in (0, 1)$ 且 $\beta \in (0, \frac{2}{n})$.则

$$\int_{\Omega} u dx = m_0, \quad t \in (0, T), \tag{5}$$

其中 $m_0 = \int_{\Omega} u_0 dx$. 对 $p \geq 1$, 存在 $L_2 = L_2(p) > 0$ 使得

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} \leq L_2, \quad t \in (0, T). \tag{6}$$

此外, 对 $p > 1$, 存在 $L_3 = L_3(p) > 0$ 使得

$$\int_{\Omega} \frac{|\nabla v|^{2p}}{v^p} dx \leq L_3 \int_{\Omega} |\Delta v|^p dx + L_3 \int_{\Omega} v^p dx, \quad t \in (0, T). \tag{7}$$

证明. (5) 是对(2) 中第一个方程积分的直接结果. 对(2) 中第二个方程应用常数变易法, 并结合Neumann 热半群 $\{e^{t\Delta}\}_{t \geq 0}$ 的性质与(5), 对 $p \geq 1$ 可得

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^p(\Omega)} &\leq \|e^{t(\Delta-1)}v_0\|_{L^p(\Omega)} + \int_0^t \|e^{(t-s)(\Delta-1)}u^\beta\|_{L^p(\Omega)} ds \\ &\leq \|v_0\|_{L^p(\Omega)} + k_1 \int_0^t \left(1 + (t-s)^{-(1-\frac{n}{2p})} e^{-\lambda_1(t-s)}\right) \|u^\beta\|_{L^{\frac{n}{2}}(\Omega)} ds \\ &\leq \|v_0\|_{L^p(\Omega)} + k_1 |\Omega|^{\frac{2-\beta n}{n}} \int_0^t \left(1 + (t-s)^{-(1-\frac{n}{2p})} e^{-\lambda_1(t-s)}\right) \|u\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{4}{\beta n^2}} ds, \quad t \in (0, T), \end{aligned} \tag{8}$$

其中 $k_1, \lambda_1 > 0$, 由此可得(6), 其中 $L_2 = \|v_0\|_{L^p(\Omega)} + k_1 |\Omega|^{\frac{2-\beta n}{n}} m_0^{\frac{4}{\beta n^2}} \int_0^\infty \left(1 + \sigma^{-(1-\frac{n}{2p})} e^{-\lambda_1 \sigma}\right) d\sigma$. (7) 是文献 [5] 中引理2.4 的结果. □

在引理3.1给出质量守恒与函数 v 的 L^p 有界性基础上, 我们进一步研究函数 u 的高阶可积性, 针对次临界情形 $\beta \in (0, \frac{2}{n})$ 建立其 L^p 一致估计, 为后续解的 L^∞ 范数分析与爆破准则的应用提供关键支撑.

引理3.2. 设 $\alpha \in (0, 1)$ 且 $\beta \in (0, \frac{2}{n})$. 存在 $L_4 > 0$, 使得对任意 $p > 1$, 有

$$\int_{\Omega} u^p dx \leq L_4, \quad t \in (0, T). \tag{9}$$

证明. 对(2) 中第一个方程乘以 pu^{p-1} ($p > 1$) 在 Ω 进行积分, 并分部积分可得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^p dx &= -p(p-1) \int_{\Omega} u^{p-2} |\nabla u|^2 dx + p(p-1) \chi \int_{\Omega} u^{p-1} v^{-\alpha} \nabla u \cdot \nabla v dx \\ &= -p(p-1) \int_{\Omega} u^{p-2} |\nabla u|^2 dx + \chi \alpha (p-1) \int_{\Omega} u^p v^{-1-\alpha} |\nabla v|^2 dx - \chi (p-1) \int_{\Omega} u^p v^{-\alpha} \Delta v dx, \end{aligned} \tag{10}$$

$t \in (0, T)$. 此外, 对 $q > 0$, 由(2) 可知

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^p v^{-q} dx &= -p(p-1) \int_{\Omega} u^{p-2} v^{-q} |\nabla u|^2 dx + \chi p (p-1) \int_{\Omega} u^{p-1} v^{-q-\alpha} \nabla u \cdot \nabla v dx \\ &\quad - \chi p q \int_{\Omega} u^p v^{-q-\alpha-1} |\nabla v|^2 dx + 2pq \int_{\Omega} u^{p-1} v^{-q-1} \nabla u \cdot \nabla v dx \\ &\quad - q(q+1) \int_{\Omega} u^p v^{-q-2} |\nabla v|^2 dx + q \int_{\Omega} u^p v^{-q} dx - q \int_{\Omega} u^{p+\beta} v^{-q-1} dx, \end{aligned} \tag{11}$$

$t \in (0, T)$. 对 $p > 1$ 且 $q \in (\max\{0, 1 - 2\alpha\}, \frac{p}{\beta})$, 应用Young 不等式可得

$$\begin{aligned} \left(\frac{p+\beta}{2\beta} + q\right) \int_{\Omega} u^p v^{-q} dx &\leq \frac{q}{2} \int_{\Omega} u^{p+\beta} v^{-q-1} dx + C_1 \int_{\Omega} u^{p-\beta q} dx \\ &\leq \frac{q}{2} \int_{\Omega} u^{p+\beta} v^{-q-1} dx + \int_{\Omega} u^{p+\beta} dx + C_2, \end{aligned} \tag{12}$$

其中 $C_1 = (\frac{q}{2})^{-q} (\frac{p+\beta}{2\beta} + q)^{q+1}$, $C_2 = C_1^{\frac{p+\beta}{\beta q + \beta}} |\Omega|$, 且

$$\frac{p+\beta}{2\beta} \int_{\Omega} u^p dx \leq \int_{\Omega} u^{p+\beta} dx + C_3, \tag{13}$$

其中 $C_3 = \left(\frac{p+\beta}{2\beta}\right)^{\frac{p+\beta}{\beta}} |\Omega|$, 且

$$2pq \int_{\Omega} u^{p-1} v^{-q+1} \nabla u \cdot \nabla v dx \leq (p(p-1) - \varepsilon_1) \int_{\Omega} u^{p-2} v^{-q} |\nabla u|^2 dx + \frac{p^2 q^2}{p(p-1) - \varepsilon_1} \int_{\Omega} u^p v^{-q-2} |\nabla v|^2 dx, \tag{14}$$

其中 $\varepsilon_1 \in (0, p(p-1))$, 且

$$\begin{aligned} \chi p(p-1) \int_{\Omega} u^{p-1} v^{-q-\alpha} \nabla u \cdot \nabla v dx &\leq \varepsilon_1 \int_{\Omega} u^{p-2} v^{-q} |\nabla u|^2 dx + \frac{\chi^2 p^2 (p-1)^2}{4\varepsilon_1} \int_{\Omega} u^p v^{-q-2\alpha} |\nabla v|^2 dx \\ &\leq \varepsilon_1 \int_{\Omega} u^{p-2} v^{-q} |\nabla u|^2 dx + \varepsilon_2 \int_{\Omega} u^p v^{-q-2} |\nabla v|^2 dx + C_4 \int_{\Omega} u^p \frac{|\nabla v|^2}{v} dx, \end{aligned} \tag{15}$$

其中 $\varepsilon_2 > 0$, $C_4 = \left(\frac{\chi p(p-1)^2}{4\varepsilon_1}\right)^{\frac{q+1}{2-2\alpha}} \varepsilon_2^{-\frac{q+2\alpha-1}{2-2\alpha}}$. 再由Young 不等式可得

$$\chi \alpha (p-1) \int_{\Omega} u^p v^{-1-\alpha} |\nabla v|^2 dx \leq \varepsilon_2 \int_{\Omega} u^p v^{-q-2} |\nabla v|^2 dx + C_5 \int_{\Omega} u^p \frac{|\nabla v|^2}{v} dx, \tag{16}$$

其中 $\varepsilon_2 > 0$, $C_5 = (\chi \alpha (p-1))^{\frac{q+1}{q+1-\alpha}} \varepsilon_2^{-\frac{\alpha}{q+1-\alpha}}$, 且对 $q > 0$ 有

$$\begin{aligned} -\chi (p-1) \int_{\Omega} u^p v^{-\alpha} \Delta v dx &\leq \int_{\Omega} |\Delta v|^{\frac{p+\beta}{\beta}} dx + (\chi (p-1))^{\frac{p+\beta}{p}} \int_{\Omega} u^{p+\beta} v^{-\frac{\alpha}{p}(p+\beta)} dx \\ &\leq \int_{\Omega} |\Delta v|^{\frac{p+\beta}{\beta}} dx + \frac{q}{2} \int_{\Omega} u^{p+\beta} v^{-q-1} dx + C_6 \int_{\Omega} u^{p+\beta} dx, \end{aligned} \tag{17}$$

其中 $C_6 = (\frac{q}{2})^{-\frac{\alpha(p+\beta)}{pq+(1-\alpha)p-\alpha\beta}} (\chi(p+1))^{\frac{(p+\beta)(q+1)}{qp+(1-\alpha)p-\alpha\beta}}$. 令 $\mathcal{F}(t) := \int_{\Omega} u^p dx + \int_{\Omega} u^p v^{-q} dx$, 若 $p > 1$ 且 $q \in (\max\{0, 1 - 2\alpha\}, \frac{p}{\beta})$, 联立(10)-(17) 可得

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'(t) + \frac{p+\beta}{2\beta} \mathcal{F}(t) &\leq -p(p-1) \int_{\Omega} u^{p-2} |\nabla u|^2 dx + \left[2\varepsilon_2 + \frac{p^2 q^2}{p(p-1) - \varepsilon_1} - q(q+1)\right] \int_{\Omega} u^p v^{-q-2} |\nabla v|^2 dx \\ &\quad + (C_4 + C_5) \int_{\Omega} u^p \frac{|\nabla v|^2}{v} dx + (C_6 + 2) \int_{\Omega} u^{p+\beta} dx + \int_{\Omega} |\Delta v|^{\frac{p+\beta}{\beta}} dx + C_2 + C_3, \end{aligned} \tag{18}$$

$t \in (0, T)$. 若 $p > 1$ 且 $q \in (0, p-1)$, 则 $\frac{p^2 q^2}{p(p-1)} - q(q+1) < 0$, 令 $\varepsilon_1 = \frac{p(p-q-1)}{2(q+1)}$, $\varepsilon_2 = \frac{q(q+1)}{2} - \frac{p^2 q^2}{2(p(p-1)-\varepsilon_1)}$ 使得

$$2\varepsilon_2 + \frac{p^2 q^2}{p(p-1) - \varepsilon_1} - q(q+1) \leq 0.$$

再次由Young不等式与(7)可得

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u^p \frac{|\nabla v|^2}{v} dx &\leq \int_{\Omega} u^{p+\beta} dx + \int_{\Omega} \left(\frac{|\nabla v|^2}{v} \right)^{\frac{p+\beta}{\beta}} dx \\ &\leq \int_{\Omega} u^{p+\beta} dx + L_3 \int_{\Omega} |\Delta v|^{\frac{p+\beta}{\beta}} dx + L_3 \int_{\Omega} v^{\frac{p+\beta}{\beta}} dx, \end{aligned} \tag{19}$$

联立(6),(18)和(19)可得

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'(t) + \frac{p+\beta}{2\beta} \mathcal{F}(t) &\leq -p(p-1) \int_{\Omega} u^{p-2} |\nabla u|^2 dx + \left[2\varepsilon_2 + \frac{p^2 q^2}{p(p-1) - \varepsilon_1} - q(q+1) \right] \int_{\Omega} u^p v^{-q-2} |\nabla v|^2 dx \\ &\quad + C_7 \int_{\Omega} u^{p+\beta} dx + C_8 \int_{\Omega} |\Delta v|^{\frac{p+\beta}{\beta}} dx + C_9 \\ &\leq -p(p-1) \int_{\Omega} u^{p-2} |\nabla u|^2 dx + C_7 \int_{\Omega} u^{p+\beta} dx + C_8 \int_{\Omega} |\Delta v|^{\frac{p+\beta}{\beta}} dx + C_9, \end{aligned} \tag{20}$$

$t \in (0, T)$, 其中 $C_7 = C_4 + C_5 + C_6 + 2$, $C_8 = (C_4 + C_5)L_3 + 1$, $C_9 = C_2 + C_3 + (C_4 + C_5)L_2^{\frac{p+\beta}{\beta}} L_3$. 当 $\beta \in (0, \frac{2}{n})$ 时, 结合文献 [2, 引理2.2] 中Gagliardo-Nirenberg不等式与Young不等式, 并利用(5)可得

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u^{p+\beta} dx &= \left\| u^{\frac{p+\beta}{2}} \right\|_{L^{\frac{2(p+\beta)}{p}}(\Omega)}^2 \\ &\leq \left(C_{GN} \left(\|\nabla u^{\frac{p+\beta}{2}}\|_{L^2(\Omega)}^{\theta} \left\| u^{\frac{p+\beta}{2}} \right\|_{L^{\frac{2}{p}}(\Omega)}^{1-\theta} + \left\| u^{\frac{p+\beta}{2}} \right\|_{L^{\frac{2}{p}}(\Omega)} \right) \right)^{\frac{2(p+\beta)}{p}} \\ &\leq (2C_{GN})^{\frac{2(p+\beta)}{p}} m_0^{(p+\beta)(1-\theta)} \left(\int_{\Omega} |\nabla u^{\frac{p+\beta}{2}}|^2 dx \right)^{\frac{(p+\beta)\theta}{p}} + (2C_{GN})^{\frac{2(p+\beta)}{p}} m_0^{p+\beta} \\ &\leq \varepsilon_3 \int_{\Omega} u^{p-2} |\nabla u|^2 dx + C_{10}, \end{aligned} \tag{21}$$

其中 $\theta = \frac{\frac{p}{2} - \frac{p}{2(p+\beta)}}{\frac{p}{2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2}} \in (0, 1)$, 且由 $\beta \in (0, \frac{2}{n})$ 得 $\frac{p+\beta}{p}\theta < 1$, $C_{GN}, \varepsilon_3 > 0$, 同时 $C_{10} = (2C_{GN})^{\frac{2(p+\beta)}{p}} m_0^{p+\beta} + \varepsilon_3^{-\frac{(p+\beta)\theta}{p-(p+\beta)\theta}} (2C_{GN})^{\frac{2(p+\beta)}{p-(p+\beta)\theta}} m_0^{\frac{p(p+\beta)(1-\theta)}{p-(p+\beta)\theta}}$. 将(20)乘以 $e^{\frac{p+\beta}{2\beta}t}$ 并在 (t_0, t) 上积分, 其中 $t_0 = \max\{1, \frac{T}{2}\}$, 对 $p > n$, 由引理2.3与(21)可得

$$\begin{aligned} e^{\frac{p+\beta}{2\beta}t} \mathcal{F}(t) - e^{\frac{p+\beta}{2\beta}t_0} \mathcal{F}(t_0) &\leq -p(p-1) \int_{t_0}^t e^{\frac{p+\beta}{2\beta}s} \int_{\Omega} u^{p-2} |\nabla u|^2 dx + C_7 \int_{t_0}^t e^{\frac{p+\beta}{2\beta}s} \int_{\Omega} u^{p+\beta} dx \\ &\quad + C_8 \int_{t_0}^t e^{\frac{p+\beta}{2\beta}s} \int_{\Omega} |\Delta v|^{\frac{p+\beta}{\beta}} dx + \frac{2\beta C_9}{p+\beta} e^{\frac{p+\beta}{2\beta}t} - \frac{2\beta C_9}{p+\beta} e^{\frac{p+\beta}{2\beta}t_0} \\ &\leq [\varepsilon_3 (C_7 + C_8 L_1) - p(p-1)] \int_{t_0}^t e^{\frac{p+\beta}{2\beta}s} \int_{\Omega} u^{p-2} |\nabla u|^2 dx ds \\ &\quad + C_8 L_1 e^{\frac{p+\beta}{2\beta}t_0} \int_{\Omega} |\Delta v(x, t_0)|^{\frac{p+\beta}{\beta}} dx + \frac{2\beta C_{11}}{p+\beta} e^{\frac{p+\beta}{2\beta}t}, \quad t \in (t_0, T), \end{aligned} \tag{22}$$

其中 $C_{11} = C_9 + C_{10}(C_7 + C_8L_1)$. 取 $\varepsilon_3 = \frac{p(p-1)}{2(C_7+C_8L_1)}$, 并将(22)两边同除以 $e^{\frac{p+\beta}{2\beta}t}$, 则对 $p > n$ 有

$$\mathcal{F}(t) \leq \mathcal{F}(t_0) + C_8L_1 \int_{\Omega} |\Delta v(x, t_0)|^{\frac{p+\beta}{\beta}} dx + \frac{2\beta C_{11}}{p + \beta} \leq C_{12}, \quad t \in (t_0, T), \tag{23}$$

其中 $C_{12} > 0$. 因此, 对 $p \in (1, n]$ 应用Young不等式, 并结合引理2.1, 即可完成估计(9)的证明. \square

4. 主要结果的证明

现在, 我们建立 v 的一致正下界.

引理4.1. 设 $\alpha \in (0, 1)$, $\beta \in (0, \frac{2}{n})$ 且 $\chi > 0$. 存在 $L_5 > 0$ 使得

$$v(x, t) \geq L_5, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T). \tag{24}$$

证明. 选取 $p_0 > 1$, 由Holder不等式可得

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u dx &= \int_{\Omega} u^{\frac{\beta(p_0-1)}{p_0-\beta}} u^{1-\frac{\beta(p_0-1)}{p_0-\beta}} dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega} u^{\beta} \right)^{\frac{p_0-1}{p_0-\beta}} \left(\int_{\Omega} u^{p_0} \right)^{\frac{1-\beta}{p_0-\beta}}. \end{aligned} \tag{25}$$

因此, 联立(5)和引理3.2, 我们有

$$\int_{\Omega} u^{\beta} dx \geq m_0^{\frac{p_0-\beta}{p_0-1}} L_4^{\frac{\beta-1}{p_0-1}}. \tag{26}$$

对(2)中第二个方程, 利用常数变易公式与Neumann热半群 $\{e^{t\Delta}\}_{t \geq t_0}$, 可得

$$\begin{aligned} v(x, t) &= e^{t(\Delta-1)}v_0 + \int_0^t e^{(t-s)(\Delta-1)}u^{\beta}(x, s) ds \\ &\geq \int_0^t \frac{1}{4\pi(t-s)} e^{-\left((t-s) + \frac{(\text{diam } \Omega)^2}{4(t-s)}\right)} \left(\int_{\Omega} u^{\beta}(x, s) dx \right) ds \\ &\geq m_0^{\frac{p_0-\beta}{p_0-1}} L_4^{\frac{\beta-1}{p_0-1}} \int_0^{t_0} \frac{1}{4\pi r} e^{-\left(r + \frac{(\text{diam } \Omega)^2}{4r}\right)} dr, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \end{aligned} \tag{27}$$

其中 $t_0 = \max\{1, \frac{T}{2}\}$. 取 $L_5 = m_0^{\frac{p_0-\beta}{p_0-1}} L_4^{\frac{\beta-1}{p_0-1}} \int_0^{t_0} \frac{1}{4\pi r} e^{-\left(r + \frac{(\text{diam } \Omega)^2}{4r}\right)} dr$, 可得(24)即完成证明. \square

结合前文建立的关键先验估计, 我们现在可以集中证明 u 的 L^{∞} 范数有界性. 通过精细应用常数变易公式并结合Neumann热半群的性质, 我们即可得到所需估计.

定理1.1的证明. 对(2)中第一个方程应用常数变易公式, 并利用Neumann热半群 $\{e^{t\Delta}\}_{t \geq 0}$ 的保序性, 可得

$$u(x, t) = e^{t\Delta}u_0 - \chi \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \nabla \cdot \left(\frac{u}{v^{\alpha}} \nabla v \right) ds, \quad t \in (0, T). \tag{28}$$

利用引理3.2,对任意 $p > n$ 有 $u^\beta \in L^\infty((0, T); L^p(\Omega))$,再由引理2.2 可知

$$\|\nabla v(x, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq L_6, \quad t \in (0, T). \quad (29)$$

结合引理4.1 与(29),可得

$$\left\| \frac{u}{v^\alpha} \nabla v \right\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{L_6}{L_5^\alpha} \|u\|_{L^p(\Omega)}, \quad t \in (0, T). \quad (30)$$

结合文献 [6, 引理1.3],(28) 与(30),对于 $p > n$ 有

$$\begin{aligned} \|u(x, t)\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq \|e^{t\Delta} u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \chi \int_0^t \left\| e^{(t-s)\Delta} \nabla \cdot \left(\frac{u}{v^\alpha} \nabla v \right) \right\|_{L^\infty(\Omega)} ds \\ &\leq \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \chi k_2 \int_0^t \left(1 + (t-s)^{-\frac{1}{2} - \frac{n}{2p}} e^{-\lambda_2(t-s)} \right) \left\| \frac{u}{v^\alpha} \nabla v \right\|_{L^p(\Omega)} ds \\ &\leq \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + C_{13} \int_0^t \left(1 + (t-s)^{-\frac{1}{2} - \frac{n}{2p}} e^{-\lambda_2(t-s)} \right) \|u\|_{L^p(\Omega)} ds, \quad t \in (0, T), \quad (31) \end{aligned}$$

其中 $C_{13} = \chi k_2 \frac{L_6}{L_5^\alpha}$.在式(31) 中,当 $p > n$ 时积分核的指数 $-\left(\frac{1}{2} + \frac{n}{2p}\right) > -1$,满足Gamma积分的收敛条件.同时,引理3.2已说明 u 的 L^p 范数在 $(0, T)$ 上全局有界.结合以上两点即可保证该积分收敛.

由积分收敛性可进一步推得 u 的 L^∞ 范数全局有界.结合引理2.1 中的爆破准则“若 $T < \infty$, 则解必无界”,可得 $T = \infty$.再结合引理2.2 中 v 的有界性结论,最终证得系统(2) 存在唯一的整体有界古典解. \square

参考文献

- [1] Li, B. and Xie, L. (2024) Can Dirac-Type Singularities in Keller-Segel Systems Be Ruled Out by Power-Type Singular Sensitivities? *Journal of Differential Equations*, **379**, 413-467. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2023.10.013>
- [2] Zhao, X. and Xiao, L. (2024) Global Boundedness in a Parabolic-Elliptic Chemotaxis System with Singular Sensitivity and Sublinear Production. *Journal of Evolution Equations*, **24**, Article No. 89. <https://doi.org/10.1007/s00028-024-01017-x>
- [3] Horstmann, D. and Winkler, M. (2005) Boundedness vs. Blow-Up in a Chemotaxis System. *Journal of Differential Equations*, **215**, 52-107. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2004.10.022>
- [4] Wang, W., Zhuang, M. and Zheng, S. (2018) Positive Effects of Repulsion on Boundedness in a Fully Parabolic Attraction-Repulsion Chemotaxis System with Logistic Source. *Journal of Differential Equations*, **264**, 2011-2027. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2017.10.011>
- [5] Le, M. (2025) Global Boundedness in the Higher-Dimensional Fully Parabolic Chemotaxis with Weak Singular Sensitivity and Logistic Source. *Discrete and Continuous Dynamical Systems—B*, **30**, 4858-4869. <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2025087>

- [6] Winkler, M. (2010) Aggregation vs. Global Diffusive Behavior in the Higher-Dimensional Keller-Segel Model. *Journal of Differential Equations*, **248**, 2889-2905.
<https://doi.org/10.1016/j.jde.2010.02.008>