

伽利略共形代数的双导子和线性交换映射

王国泰, 申 冉*

东华大学, 数学与统计学院, 上海

收稿日期: 2026 年 6 月 1 日; 录用日期: 2026 年 7 月 3 日; 发布日期: 2026 年 7 月 24 日

摘 要

本文研究了 $(d+1)$ 维时空中的伽利略共形代数的反对称双导子和线性交换映射。首先证明了该代数上的所有反对称双导子都是内双导子; 作为应用, 我们确定了一类包含该代数在内的李代数 L 上的任一线性交换映射 σ 都具有如下形式: 对任意的 $x \in L$, $\sigma(x) = \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{C}$ 。且该类代数包含了平面伽利略共形代数。

关键词

伽利略共形代数, 双导子, 线性交换映射

Biderivations and Linear Commuting Maps on the Galilean Conformal Algebra

Guotai Wang, Ran Shen*

School of Mathematics and Statistics, Donghua University, Shanghai

Received: June 1, 2026; accepted: July 3, 2026; published: July 24, 2026

Abstract

In this paper, we study skew-symmetric biderivations and linear commuting maps

* 通讯作者。

of the Galilean conformal algebra in $(d+1)$ -dimensional space-time. We first prove that each skew-symmetric biderivation of this algebra is inner. As an application of biderivations, we show that every linear commuting map σ on a certain class of Lie algebra L containing this algebra is of the form $\sigma(x) = \alpha x$ for all $x \in L$, where $\alpha \in \mathbb{C}$. This class of Lie algebras includes the planar Galilean conformal algebra.

Keywords

Galilean Conformal Algebra, Biderivation, Linear Commuting Map

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

作为研究环与代数结构的重要工具, 双导子和交换映射受到了广泛关注 [1]-[5]。2011 年, 双导子的概念在文献 [6] 中被引入李代数领域, 作者研究了单李代数的抛物子代数的双导子。近年来, Schrödinger-Virasoro 李代数、 $\mathcal{W}(a, b)$ 等李代数上的双导子和交换映射相继被研究。

$(d+1)$ 维时空中的无限维伽利略共形代数最初是 Bagchi 和 Gopakumar 在文献 [7] 中引入的, 目的是构建 AdS/CFT 猜想的系统性非相对论极限 [8]。 $d=1$ 时, $(1+1)$ 维时空中的无限维伽利略共形代数即为无中心的 $\mathcal{W}(2, 2)$ 代数, 韩等人在文献 [9] 中证明了该代数的反对称双导子是非内双导子, 作为应用, 进一步确定了其线性交换映射的非标准形式。 $d=2$ 时, $(2+1)$ 维时空中的无限维伽利略共形代数是 Aizawa 于 2013 年在 [10] 中命名的平面伽利略共形代数, 其结构和表示已有较多研究 [11]-[13]。特别地, 在文献 [14] 中作者证明了平面伽利略共形代数的反对称双导子均是内的, 并确定了其交换映射。当 $d \geq 3$ 时, 尚未有学者对其进行深入地研究。为了更好地完善无限维伽利略共形代数的结构理论, 本文将研究 $d \geq 3$ 时, $(d+1)$ 维时空中的无限维伽利略共形代数的双导子和交换线性映射。作为双导子的应用, 我们确定了一类李代数的任一线性交换映射, 且该结论包含了文献 [14] 中的结果。

$(d+1)$ 维时空中的无限维伽利略共形代数 $\mathfrak{G}$ 具有一组基 $\{J_{ij}^{(n)}, L^{(n)}, M_i^{(n)} \mid n \in \mathbb{Z}, i, j = 1, 2, \dots, d\}$, 满足如下李括号关系:

$$[L^{(m)}, L^{(n)}] = (m-n)L^{(m+n)}, [L^{(m)}, J_{ij}^{(n)}] = -nJ_{ij}^{(m+n)}, [L^{(m)}, M_i^{(n)}] = (m-n)M_i^{(m+n)},$$

$$[J_{ij}^{(n)}, J_{rs}^{(m)}] = \delta_{ir}J_{js}^{(m+n)} + \delta_{is}J_{rj}^{(m+n)} + \delta_{jr}J_{si}^{(m+n)} + \delta_{js}J_{ir}^{(m+n)},$$

$$[J_{ij}^{(n)}, M_k^{(m)}] = -(M_i^{(m+n)}\delta_{jk} - M_j^{(m+n)}\delta_{ik}),$$

$$[M_i^{(m)}, M_j^{(n)}] = 0,$$

其中 $m, n \in \mathbb{Z}$ 。

在本文中, 我们分别用 $\mathbb{Z}, \mathbb{C}$ 表示整数集和复数集。

2. 预备知识

定义 2.1. 设 L 是一个李代数, 若双线性映射 $\theta : L \times L \rightarrow L$ 关于它的两个变量都是导子, 即对任意的 $x, y, z \in L$, 有

$$\begin{aligned}\theta([x, y], z) &= [x, \theta(y, z)] + [\theta(x, z), y], \\ \theta(x, [y, z]) &= [\theta(x, y), z] + [y, \theta(x, z)].\end{aligned}$$

则称 θ 是 L 的双导子。

显然, 对任意 $x, y \in L$, 映射

$$\theta(x, y) = \eta[x, y], \quad \eta \in \mathbb{C},$$

是一个双导子。我们将这样的双导子称为内双导子。此外, 若双线性映射 $\theta : L \times L \rightarrow L$ 满足对任意的 $x, y \in L$,

$$\theta(x, y) = -\theta(y, x),$$

则称 θ 是反对称的。

定义 2.2. 设 L 是一个李代数, 若映射 $\sigma : L \rightarrow L$ 满足对任意的 $x \in L$, 有

$$[\sigma(x), x] = 0,$$

则称 σ 为交换映射。

定义 2.3. 设 L 是一个李代数, 称

$$Z(L) = \{x \in L \mid \forall y \in L, [x, y] = 0\},$$

为 L 的中心。

显然, $(d+1)$ 维时空中的无限维伽利略共形代数 $\mathfrak{G}$ 的中心为 0。

引理 2.4. [15] 设 θ 是李代数 L 上的反对称双导子, 则对任意的 $x, y, u, v \in L$, 都有

$$[\theta(x, y), [u, v]] = [[x, y], \theta(u, v)].$$

特别地, 若令 $u = x, v = y$, 则有

$$[\theta(x, y), [x, y]] = 0.$$

引理 2.5. [15] 设 θ 是李代数 L 上的反对称双导子, 若对 $x, y \in L$, 有 $[x, y] = 0$, 那么 $\theta(x, y) \in Z(L)$ 。特别地, 若 $Z(L) = 0$, 则 $\theta(x, y) = 0$ 。

3. 双导子

定理 3.1. $(d+1)$ 维时空中的伽利略共形代数 $\mathfrak{G}$ 上的每一个反对称双导子都是内双导子。

证明: 设 θ 是 $\mathfrak{G}$ 上的反对称双导子, 下面将分五步完成定理的证明。证明过程中所涉及有关 $[\sum_{i=1}^{d-1} \sum_{j=i+1}^d \sum_u \beta_{1u_{ij}} J_{ij}^{(u)}, J_{pq}^{(n)}]$ 类似的展开可参见附录。

1) 断言 1. 存在 $\alpha \in \mathbb{C}$, 使得对任意 $m, n \in \mathbb{Z}$, 都有

$$\theta(L^{(m)}, L^{(n)}) = \alpha[L^{(m)}, L^{(n)}].$$

对任意固定 $m, n \in \mathbb{Z}$, 设

$$\theta(L^{(m)}, L^{(n)}) = \sum_k \alpha_{1k} L^{(k)} + \sum_{i=1}^{d-1} \sum_{j=i+1}^d \sum_u \beta_{1u_{ij}} J_{ij}^{(u)} + \sum_{i=1}^d \sum_v \eta_{1v_i} M_i^{(v)}, \quad (3.1)$$

其中 $i, j, k, u, v \in \mathbb{Z}, \alpha_{1k}, \beta_{1u_{ij}}, \eta_{1v_i} \in \mathbb{C}$ 。若 $m = n$, 则 $[L^{(m)}, L^{(n)}] = 0$ 。由引理 2.5 知, $\theta(L^{(m)}, L^{(n)}) = 0$, 此时断言 1 成立。现假设 $m \neq n$, 由引理 2.4, 有

$$\frac{1}{m-n} [[L^{(m)}, L^{(n)}], \theta(L^{(m)}, L^{(n)})] = 0.$$

即

$$[L^{(m+n)}, \sum_k \alpha_{1k} L^{(k)} + \sum_{i=1}^{d-1} \sum_{j=i+1}^d \sum_u \beta_{1u_{ij}} J_{ij}^{(u)} + \sum_{i=1}^d \sum_v \eta_{1v_i} M_i^{(v)}] = 0.$$

展开为

$$\sum_k \alpha_{1k} (m+n-k) L^{(m+n+k)} + \sum_{i=1}^{d-1} \sum_{j=i+1}^d \sum_u u \beta_{1u_{ij}} J_{ij}^{(m+n+u)} + \sum_{i=1}^d \sum_v \eta_{1v_i} (m+n-v) M_i^{(m+n+v)} = 0.$$

比较等式两边基的系数可得:

$$\alpha_{1k} (m+n-k) = 0, \quad u \beta_{1u_{ij}} = 0, \quad \eta_{1v_i} (m+n-v) = 0.$$

所以, 当 $k \neq m+n$ 时, $\alpha_{1k} = 0$; 当 $u \neq 0$ 时, $\beta_{1u_{ij}} = 0$; 当 $v \neq m+n$ 时, $\eta_{1v_i} = 0$ 。因

此, (3.1) 式可简化为:

$$\theta(L^{(m)}, L^{(n)}) = \alpha_{1m+n} L^{(m+n)} + \sum_{i=1}^{d-1} \sum_{j=i+1}^d \beta_{10_{ij}} J_{ij}^{(0)} + \sum_{i=1}^d \eta_{1m+n_i} M_i^{(m+n)}. \quad (3.2)$$

由引理 2.4,

$$[\theta(L^{(m)}, L^{(n)}), [L^{(1)}, L^{(0)}]] = [[L^{(m)}, L^{(n)}], \theta(L^{(1)}, L^{(0)})].$$

展开为

$$\begin{aligned} & (m+n-1)\alpha_{1m+n} L^{(m+n+1)} + \sum_{i=1}^d \eta_{1m+n_i} (m+n-1) M_i^{(m+n+1)} \\ &= (m+n-1)(m-n)\alpha_{11} L^{(m+n+1)} + \sum_{i=1}^d \eta_{11_i} (m+n-1)(m-n) M_i^{(m+n+1)}. \end{aligned}$$

故当 $m+n \neq 1$ 时, 有

$$\alpha_{1m+n} = (m-n)\alpha_{11}, \quad \eta_{1m+n_i} = (m-n)\eta_{11_i}. \quad (3.3)$$

在 (3.3) 式中取 $m=2, n=0$, 则 $\alpha_{12} = 2\alpha_{11}, \eta_{12_i} = 2\eta_{11_i}$. 再由

$$[\theta(L^{(m)}, L^{(n)}), [L^{(2)}, L^{(0)}]] = [[L^{(m)}, L^{(n)}], \theta(L^{(2)}, L^{(0)})],$$

得

$$\begin{aligned} & 2(m+n-2)\alpha_{1m+n} L^{(m+n+2)} + 2 \sum_{i=1}^d \eta_{1m+n_i} (m+n-2) M_i^{(m+n+2)} \\ &= 2(m+n-2)(m-n)\alpha_{11} L^{(m+n+2)} + 2 \sum_{i=1}^d \eta_{11_i} (m+n-2)(m-n) M_i^{(m+n+2)}. \end{aligned}$$

故当 $m+n \neq 2$ 时, 仍有

$$\alpha_{1m+n} = (m-n)\alpha_{11}, \quad \eta_{1m+n_i} = (m-n)\eta_{11_i}. \quad (3.4)$$

因此, 由 (3.3) 式和 (3.4) 式情形可知, 对任意的 $m, n \in \mathbb{Z}$, 都有

$$\alpha_{1m+n} = (m-n)\alpha_{11}, \quad \eta_{1m+n_i} = (m-n)\eta_{11_i}.$$

将此结果代入 (3.2) 式, 令 $\alpha = \alpha_{11}$, 则对任意的 $m, n \in \mathbb{Z}$, 有

$$\theta(L^{(m)}, L^{(n)}) = \alpha [L^{(m)}, L^{(n)}] + \sum_{i=1}^{d-1} \sum_{j=i+1}^d \beta_{10_{ij}} J_{ij}^{(0)} + \sum_{i=1}^d \eta_{11_i} (m-n) M_i^{(m+n)}. \quad (3.5)$$

后面将会在第 (2) 步中完成断言 1 的证明。

2) 断言 2. 存在 $\alpha \in \mathbb{C}$, 使得对任意 $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$, 都有

$$\theta(L^{(m)}, J_{pq}^{(n)}) = \alpha[L^{(m)}, J_{pq}^{(n)}].$$

对任意固定的 $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$, 设

$$\theta(L^{(m)}, J_{pq}^{(n)}) = \sum_k \alpha_{2k} L^{(k)} + \sum_{i=1}^{d-1} \sum_{j=i+1}^d \sum_u \beta_{2u_{ij}} J_{ij}^{(u)} + \sum_{i=1}^d \sum_v \eta_{2v_i} M_i^{(v)}, \quad (3.6)$$

其中 $i, j, k, u, v \in \mathbb{Z}$, $\alpha_{2k}, \beta_{2u_{ij}}, \eta_{2v_i} \in \mathbb{C}$ 。若 $n = 0$, 则 $[L^{(m)}, J_{pq}^{(n)}] = 0$ 。由引理 2.5 知, $\theta(L^{(m)}, J_{pq}^{(n)}) = 0$, 此时断言 2 成立。现假设 $n \neq 0$, 由引理 2.4, 有

$$\frac{1}{n}[\theta(L^{(m)}, J_{pq}^{(n)}), [L^{(m)}, J_{pq}^{(n)}]] = 0.$$

即

$$[\sum_k \alpha_{2k} L^{(k)} + \sum_{i=1}^{d-1} \sum_{j=i+1}^d \sum_u \beta_{2u_{ij}} J_{ij}^{(u)} + \sum_{i=1}^d \sum_v \eta_{2v_i} M_i^{(v)}, -J_{pq}^{(m+n)}] = 0.$$

展开为

$$\begin{aligned} & \sum_k \alpha_{2k} (m+n) J_{pq}^{(m+n+k)} - \sum_{\substack{j=p+1 \\ j \neq q}}^d \sum_u \beta_{2u_{pj}} J_{jq}^{(m+n+u)} - \sum_{j=q+1}^d \sum_u \beta_{2u_{qj}} J_{pj}^{(m+n+u)} \\ & - \sum_{i=1}^{p-1} \sum_u \beta_{2u_{ip}} J_{qi}^{(m+n+u)} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^{q-1} \sum_u \beta_{2u_{iq}} J_{ip}^{(m+n+u)} + \sum_v \eta_{2v_p} M_q^{(m+n+v)} - \sum_v \eta_{2v_q} M_p^{(m+n+v)} = 0 \end{aligned}$$

比较等式两边基的系数可得:

$$a_{2k}(m+n) = 0, \quad \eta_{2v_p} = 0, \quad \eta_{2v_q} = 0, \quad \beta_{2u_{pj}} = 0 (j = p+1, \dots, d, j \neq q),$$

$$\beta_{2u_{qj}} = 0 (j = q+1, \dots, d), \quad \beta_{2u_{ip}} = 0 (i = 1, \dots, p-1), \quad \beta_{2u_{iq}} = 0 (i = 1, \dots, q-1, i \neq p).$$

据此, 由 m, n 的任意性知, (3.6) 式可简化为:

$$\theta(L^{(m)}, J_{pq}^{(n)}) = \sum_u \beta_{2u_{pq}} J_{pq}^{(u)} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p, q}}^{d-1} \sum_{\substack{j=i+1 \\ j \neq p, q}}^d \sum_u \beta_{2u_{ij}} J_{ij}^{(u)} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p, q}}^d \sum_v \eta_{2v_i} M_i^{(v)}. \quad (3.7)$$

由引理 2.4,

$$[\theta(L^{(m)}, J_{pq}^{(n)}), [L^{(1)}, L^{(0)}]] = [[L^{(m)}, J_{pq}^{(n)}], \theta(L^{(1)}, L^{(0)})],$$

展开得

$$\begin{aligned} & \sum_u \beta_{2u_{pq}} u J_{pq}^{(u+1)} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p, q}}^{d-1} \sum_{\substack{j=i+1 \\ j \neq p, q}}^d \sum_u \beta_{2u_{ij}} u J_{ij}^{(u+1)} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p, q}}^d \sum_v \eta_{2v_i} (v-1) M_i^{(v+1)} \\ &= -n(m+n) \alpha_{11} J_{pq}^{(m+n+1)} - n \sum_{\substack{j=p+1 \\ j \neq q}}^d \beta_{10_{pj}} J_{jq}^{(m+n)} - n \sum_{j=q+1}^d \beta_{10_{qj}} J_{pj}^{(m+n)} \\ & \quad - n \sum_{i=1}^{p-1} \beta_{10_{ip}} J_{qi}^{(m+n)} - n \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^{q-1} \beta_{10_{iq}} J_{ip}^{(m+n)} - n \eta_{11_p} M_q^{(m+n+1)} - n \eta_{11_q} M_p^{(m+n+1)} \end{aligned}$$

比较等式两边基的系数可知, 当 $u \neq m+n$ 时, $\beta_{2u_{pq}} u = 0$; 当 $u = m+n$ 时, $\beta_{2u_{pq}} = -n\alpha_{11}$; 当 $v \neq 1$ 时, $\eta_{2v_i} = 0$; 当 $u \neq 0$ 时, $\beta_{2u_{ij}} = 0 (i \neq p, q, j \neq p, q)$; 且有 $\beta_{10_{pj}} = 0 (j = p+1, \dots, d, j \neq q)$, $\beta_{10_{qj}} = 0 (j = q+1, \dots, d)$, $\beta_{10_{ip}} = 0 (i = 1, \dots, p-1)$, $\beta_{10_{iq}} = 0 (i = 1, \dots, q-1, i \neq p)$. 所以, (3.5) 式和 (3.7) 式可简化为:

$$\theta(L^{(m)}, J_{pq}^{(n)}) = -n\alpha_{11} J_{pq}^{(m+n)} + \beta_{20_{pq}} J_{pq}^{(0)} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p, q}}^{d-1} \sum_{\substack{j=i+1 \\ j \neq p, q}}^d \beta_{20_{ij}} J_{ij}^{(0)} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p, q}}^d \eta_{21_i} M_i^{(1)}. \quad (3.8)$$

$$\theta(L^{(m)}, L^{(n)}) = \alpha[L^{(m)}, L^{(n)}] + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p, q}}^{d-1} \sum_{\substack{j=i+1 \\ j \neq p, q}}^d \beta_{10_{ij}} J_{ij}^{(0)} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p, q}}^d \eta_{11_i} (m-n) M_i^{(m+n)}. \quad (3.9)$$

进一步由

$$[\theta(L^{(m)}, J_{pq}^{(n)}), [L^{(2)}, L^{(0)}]] = [[L^{(m)}, J_{pq}^{(n)}], \theta(L^{(2)}, L^{(0)})],$$

展开得

$$-2n\alpha_{11}(m+n) J_{pq}^{(m+n+2)} - 2 \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p, q}}^d \eta_{21_i} M_i^{(3)} = -2n\alpha_{11}(m+n) J_{pq}^{(m+n+2)},$$

故 $\eta_{21_i} = 0$, 所以, (3.8) 式进一步有

$$\theta(L^{(m)}, J_{pq}^{(n)}) = \alpha[L^{(m)}, J_{pq}^{(n)}] + \beta_{20_{pq}} J_{pq}^{(0)} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p, q}}^{d-1} \sum_{\substack{j=i+1 \\ j \neq p, q}}^d \beta_{20_{ij}} J_{ij}^{(0)}. \quad (3.10)$$

由 p, q 的任意性, 同理可得

$$\theta(L^{(m)}, J_{ps}^{(n)}) = \alpha[L^{(m)}, J_{ps}^{(n)}] + \beta_{30_{ps}} J_{ps}^{(0)} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p, s}}^{d-1} \sum_{\substack{j=i+1 \\ j \neq p, s}}^d \beta_{30_{ij}} J_{ij}^{(0)}.$$

再由引理 2.4, 有

$$[\theta(L^{(m)}, J_{ps}^{(n)}), [L^{(1)}, L^{(0)}]] = [[L^{(m)}, J_{ps}^{(n)}], \theta(L^{(1)}, L^{(0)})],$$

展开得

$$\begin{aligned} -n(m+n)\alpha_{11}J_{ps}^{(m+n+1)} &= -n(m+n)\alpha_{11}J_{ps}^{(m+n+1)} \\ &+ n\eta_{11s}M_p^{(m+n+1)} - n\sum_{\substack{j=s+1 \\ j \neq p,q}}^d \beta_{10sj}J_{jp}^{(m+n)} - n\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p,q}}^{s-1} \beta_{10is}J_{pi}^{(m+n)} \end{aligned}$$

比较等式两边两边基的系数可得

$$\eta_{11s} = 0, \quad \beta_{10sj} = 0(j = s+1, \dots, d, j \neq p, q), \quad \beta_{10is} = 0(i = 1, \dots, s-1, i \neq p, q)$$

因此, (3.9) 式的结果进一步有

$$\theta(L^{(m)}, L^{(n)}) = \alpha[L^{(m)}, L^{(n)}] + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p,q,s}}^{d-1} \sum_{\substack{j=i+1 \\ j \neq p,q,s}}^d \beta_{10ij}J_{ij}^{(0)} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p,q,s}}^d \eta_{11i}(m-n)M_i^{(m+n)}.$$

再由 s 的任意性知, 可使得上式中的 $i, j \neq 1, 2, \dots, d$, 故

$$\theta(L^{(m)}, L^{(n)}) = \alpha[L^{(m)}, L^{(n)}].$$

断言 1 得证。

后面将在第 (3) 步中完成断言 2 的证明。

3) 断言 3. 存在 $\alpha \in \mathbb{C}$, 使得对任意 $m, n, p \in \mathbb{Z}$, 都有

$$\theta(L^{(m)}, M_p^{(n)}) = \alpha[L^{(m)}, M_p^{(n)}].$$

对任意固定的 $m, n, p \in \mathbb{Z}$, 设

$$\theta(L^{(m)}, M_p^{(n)}) = \sum_k \alpha_{4k}L^{(k)} + \sum_{i=1}^{d-1} \sum_{j=i+1}^d \sum_u \beta_{4u_{ij}}J_{ij}^{(u)} + \sum_{i=1}^d \sum_v \eta_{4v_i}M_i^{(v)}, \quad (3.11)$$

其中 $i, j, k, u, v \in \mathbb{Z}, \alpha_{4k}, \beta_{4u_{ij}}, \eta_{4v_i} \in \mathbb{C}$. 若 $m = n$, 则 $[L^{(m)}, M_p^{(n)}] = 0$. 由引理 2.5 知, $\theta(L^{(m)}, M_p^{(n)}) = 0$, 此时断言 3 成立. 现假设 $m \neq n$, 由引理 2.4,

$$[\theta(L^{(m)}, M_p^{(n)}), [L^{(1)}, L^{(0)}]] = [[L^{(m)}, M_p^{(n)}], \theta(L^{(1)}, L^{(0)})], \quad (3.12)$$

展开得

$$\begin{aligned} & \sum_k \alpha_{4k}(k-1)L^{(k+1)} + \sum_{i=1}^{d-1} \sum_{j=i+1}^d \sum_u \beta_{4u_{ij}} u J_{ij}^{(u+1)} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^d \sum_v \eta_{4v_i}(v-1)M_i^{(v+1)} \\ & + \sum_v \eta_{4v_p}(v-1)M_p^{(v+1)} = (m-n)(m+n-1)\alpha_{11}M_p^{(m+n+1)} \end{aligned}$$

比较等式两边基的系数可知, 当 $k \neq 1$ 时, $\alpha_{4k} = 0$; 当 $u \neq 0$ 时, $\beta_{4u_{ij}} = 0$; 当 $v \neq 1$ 时, $\eta_{4v_i} = 0 (i \neq p)$; 当 $v \neq m+n$ 时, $\eta_{4v_p}(v-1) = 0$; 当 $v = m+n \neq 1$ 时, $\eta_{4v_p} = (m-n)\alpha_{11}$ 。再由

$$[\theta(L^{(m)}, M_p^{(n)}), [L^{(2)}, L^{(0)}]] = [[L^{(m)}, M_p^{(n)}], \theta(L^{(2)}, L^{(0)})], \quad (3.13)$$

展开得

$$\begin{aligned} & \sum_k 2\alpha_{4k}(k-2)L^{(k+2)} + \sum_{i=1}^{d-1} \sum_{j=i+1}^d \sum_u 2\beta_{4u_{ij}} u J_{ij}^{(u+2)} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^d \sum_v 2\eta_{4v_i}(v-2)M_i^{(v+2)} \\ & + \sum_v 2\eta_{4v_p}(v-2)M_p^{(v+2)} = 2(m-n)(m+n-2)\alpha_{11}M_p^{(m+n+2)} \end{aligned}$$

同理, 比较等式两边基的系数可知, 当 $k \neq 2$ 时, $\alpha_{4k} = 0$; 当 $u \neq 0$ 时, $\beta_{4u_{ij}} = 0$; 当 $v \neq 2$ 时, $\eta_{4v_i} = 0 (i \neq p)$; 当 $v \neq m+n$ 时, $\eta_{4v_p}(v-2) = 0$; 当 $v = m+n \neq 2$ 时, $\eta_{4v_p} = (m-n)\alpha_{11}$ 。因此, (3.11) 式可简化为:

$$\theta(L^{(m)}, M_p^{(n)}) = \alpha_{11}(m-n)M_p^{(m+n)} + \sum_{i=1}^{d-1} \sum_{j=i+1}^d \beta_{40_{ij}} J_{ij}^{(0)}. \quad (3.14)$$

由引理 2.4,

$$[\theta(L^{(m)}, M_p^{(n)}), [L^{(0)}, J_{pq}^{(1)}]] = [[L^{(m)}, M_p^{(n)}], \theta(L^{(0)}, J_{pq}^{(1)})],$$

展开得

$$\begin{aligned} & \alpha_{11}(m-n)M_q^{(m+n+1)} - \sum_{\substack{j=p+1 \\ j \neq q}}^d \beta_{40_{pj}} J_{jq}^{(1)} - \sum_{j=q+1}^d \beta_{40_{qj}} J_{pj}^{(1)} - \sum_{i=1}^{p-1} \beta_{40_{ip}} J_{qi}^{(1)} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^{q-1} \beta_{40_{iq}} J_{ip}^{(1)} \\ & = \alpha_{11}(m-n)M_q^{(m+n+1)} - (m-n)\beta_{20_{pq}}M_q^{(m+n)} \end{aligned}$$

比较等式两边基的系数可得

$$\beta_{20_{pq}} = 0, \quad \beta_{40_{pj}} = 0 (j = p+1, \dots, d, j \neq q),$$

$$\beta_{40_{qj}} = 0 (j = q+1, \dots, d), \quad \beta_{40_{ip}} = 0 (i = 1, \dots, p-1), \quad \beta_{40_{iq}} = 0 (i = 1, \dots, q-1, i \neq p).$$

因此, (3.10) 式和 (3.14) 式的结果进一步有

$$\theta(L^{(m)}, J_{pq}^{(n)}) = \alpha[L^{(m)}, J_{pq}^{(n)}] + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p, q}}^{d-1} \sum_{\substack{j=i+1 \\ j \neq p, q}}^d \beta_{20_{ij}} J_{ij}^{(0)}. \quad (3.15)$$

$$\theta(L^{(m)}, M_p^{(n)}) = \alpha[L^{(m)}, M_p^{(n)}] + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p, q}}^{d-1} \sum_{\substack{j=i+1 \\ j \neq p, q}}^d \beta_{40_{ij}} J_{ij}^{(0)}. \quad (3.16)$$

对任意的 $s \in \mathbb{Z}$, 再由

$$[\theta(L^{(m)}, M_p^{(n)}), [L^{(0)}, J_{ps}^{(1)}]] = [[L^{(m)}, M_p^{(n)}], \theta(L^{(0)}, J_{ps}^{(1)})],$$

可得 (3.16) 式简化后为:

$$\theta(L^{(m)}, M_p^{(n)}) = \alpha[L^{(m)}, M_p^{(n)}] + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p, q, s}}^{d-1} \sum_{\substack{j=i+1 \\ j \neq p, q, s}}^d \beta_{40_{ij}} J_{ij}^{(0)}.$$

所以, 由 s 的任意性知, 可使得上式中的 $i, j \neq 1, 2, \dots, d$, 故

$$\theta(L^{(m)}, M_p^{(n)}) = \alpha[L^{(m)}, M_p^{(n)}].$$

断言 3 得证。进一步, 再由

$$[\theta(L^{(m)}, M_s^{(n)}), [L^{(0)}, J_{pq}^{(1)}]] = [[L^{(m)}, M_s^{(n)}], \theta(L^{(0)}, J_{pq}^{(1)})],$$

同理可得 (3.15) 式简化后为:

$$\theta(L^{(m)}, J_{pq}^{(n)}) = \alpha[L^{(m)}, J_{pq}^{(n)}].$$

断言 2 得证。

4) 断言 4. 当 $X, Y \in \{J_{ij}^{(n)}, M_i^{(n)} \mid n \in \mathbb{Z}, i, j = 1, 2, \dots, d\}$, 且 $[X, Y] \neq 0$ 时, 存在 $\alpha \in \mathbb{C}$, 使得

$$\theta(X, Y) = \alpha[X, Y].$$

该断言的证明类似于断言 3 的证明过程。即对任意的 $\theta(X, Y)$, 先作相应的 (3.12) 式和 (3.13) 式的李括积, 再做相应的后续证明。

5) 断言 5. 当 $X, Y \in \{J_{ij}^{(n)}, M_i^{(n)} \mid n \in \mathbb{Z}, i, j = 1, 2, \dots, d\}$, 且 $[X, Y] = 0$ 时, 存在 $\alpha \in \mathbb{C}$, 使得

$$\theta(X, Y) = 0.$$

该断言由引理 2.5 直接可得。

综上, 据断言 1-5, 对任意 $x, y \in \mathfrak{G}$, 存在 $\alpha \in \mathbb{C}$, $\theta(x, y) = \alpha[x, y]$ 。即 θ 是内双导子。 $\square$

4. 线性交换映射

设 L 是一个李代数, σ 是 L 上的线性交换映射, 则对任意 $x, y \in L$, 由 $[\sigma(x - y), x - y] = 0$ 。有

$$[\sigma(x), y] = [x, \sigma(y)].$$

定理 4.1. 设 L 是一个李代数, 满足如下条件:

- 1) $Z(L) = 0$;
- 2) L 的任一反对称双导子都是内的。

设 σ 是 L 上的任一线性交换映射, 则对任意的 $x \in L$, 存在 $\eta \in \mathbb{C}$, 使得

$$\sigma(x) = \eta x.$$

证明: 设 σ 是 L 上的一个线性交换映射, 定义

$$\theta : L \times L \rightarrow L,$$

对任意的 $x, y \in L$, $\theta(x, y) = [\sigma(x), y]$, 固定 x , 可得到一映射 $y \mapsto \theta(x, y)$, 易知它是 L 的一个导子。所以, 对任意 $y, z \in L$, 有

$$\theta(x, [y, z]) = [\theta(x, y), z] + [y, \theta(x, z)].$$

又因为 $[\sigma(x), y] = [x, \sigma(y)]$, 所以 θ 关于它的第一部分也是导子, 即

$$\theta([x, y], z) = [x, \theta(y, z)] + [\theta(x, z), y].$$

因此, θ 是 L 上的双导子。此外, 因为

$$\theta(x, y) = [\sigma(x), y] = [x, \sigma(y)] = -[\sigma(y), x] = -\theta(y, x),$$

所以, θ 是 L 上的反对称双导子。故由 (ii) 知, 存在 $\eta \in \mathbb{C}$, 使得对任意的 $x, y \in L$, 有

$$\theta(x, y) = \eta[x, y],$$

因此, 对任意的 $y \in L$,

$$[\sigma(x) - \eta x, y] = 0.$$

此式意味着 $\sigma(x) - \eta x = 0$, 即 $\sigma(x) - \eta x \in Z(L)$ 。由 (i) 知, 命题得证。□

推论 4.2. 设 σ 是 $(d+1)$ 维时空中的伽利略共形代数 $\mathfrak{G}$ 上的任一线性交换映射, 则对任意的 $x \in \mathfrak{G}$, 存在 $\alpha \in \mathbb{C}$, 使得

$$\sigma(x) = \alpha x.$$

证明: 由 $Z(\mathfrak{G}) = 0$ 及定理 3.1, 推论得证。□

5. 讨论

在本节中, 将分析 $(d+1)$ 维时空中的伽利略共形代数的反对称双导子和线性交换映射在 $d=1$ 和 $d \geq 2$ 两种情形下的结构差异。并给出伽利略共形代数在所有时空维度上的反对称双导子和线性交换映射。

当 $d=1$ 时, $(1+1)$ 维时空中的伽利略共形代数即为无中心的 $\mathcal{W}(2,2)$ 代数。其基为 $\{L_m, I_m \mid m \in \mathbb{Z}\}$, 韩秀等人给出了该代数的双导子和线性交换映射的相关结果: 对任意的 $x, y \in \mathcal{W}(2,2)$, 设 φ 是 $\mathcal{W}(2,2)$ 代数上的反对称双导子, 则 $\varphi(x, y) = \lambda[x, y] + \mu\varphi_0(x, y)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\varphi_0(x, y)$ 是非内双导子。作为双导子的应用, 确定了该代数线性交换映射的结构: 设 ψ 是 $\mathcal{W}(2,2)$ 代数上的线性交换映射, 对任意的 $x \in \mathcal{W}(2,2)$, 则 $\psi(x) = \lambda x + \mu\psi_0(x)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\psi_0(x)$ 是非标准的。

当 $d=2$ 时, $(2+1)$ 维时空中的伽利略共形代数是平面伽利略共形代数 $\mathfrak{g}$, 其基为 $\{L_m, H_m, I_m, J_m \mid m \in \mathbb{Z}\}$, 池丽丽等人给出了该代数的双导子和线性交换映射的相关结果: 对任意的 $x, y \in \mathfrak{g}$, 设 φ 是 $\mathfrak{g}$ 上的反对称双导子, 则 $\varphi(x, y) = \lambda[x, y]$, $\lambda \in \mathbb{C}$, 即均为内双导子。作为双导子的应用, 确定了该代数线性交换映射的结构: 设 ψ 是 $\mathfrak{g}$ 上的线性交换映射, 对任意的 $x \in \mathfrak{g}$, 则 $\psi(x) = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{C}$, 即均是标准的。

当 $d \geq 3$ 时, 即本文的研究结果, 该种情形下的结论与 $d=2$ 时的结论保持一致。

因此, $(d+1)$ 维时空中的伽利略共形代数的反对称双导子和线性交换映射的结构会出现两种情形: $d=1$ 和 $d \geq 2$ 。当 $d=1$ 时, $\{J_{ij}^{(n)}, L^{(n)}, M_i^{(n)} \mid n \in \mathbb{Z}, i, j = 1, 2, \dots, d\}$ 中 $J_{ij}^{(n)}$ 分量未出现, 即该情形下的代数缺少 $J_{ij}^{(n)}$ 这类基元素, 结构更特殊, 会衍生出非内双导子, 交换映射也会出现非标准形式。而当 $d \geq 2$ 时, 该种情形下的代数新增 $J_{ij}^{(n)}$ 基向量, 基的完备性、李括号的约束关系变强, 从根源上限制了双导子的构造方式, 把所有反对称双导子都约束成内双导子, 交换映射也会只能是标准形式。

下面, 给出伽利略共形代数反对称双导子和线性交换映射的结果。

定理 5.1. 设 θ 是 $(d+1)$ 维时空中的伽利略共形代数 $\mathfrak{L}$ 的反对称双导子, 则

$$\theta(x, y) = \begin{cases} \lambda[x, y] + \mu\theta_0(x, y) & d=1, \\ \lambda[x, y] & d \geq 2. \end{cases}$$

其中 $x, y \in \mathfrak{L}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\theta_0(x, y)$ 是非内双导子。

定理 5.2. 设 ψ 是 $(d+1)$ 维时空中的伽利略共形代数 $\mathfrak{L}$ 的线性交换映射, 则

$$\psi(x) = \begin{cases} \lambda x + \mu \psi_0(x) & d = 1, \\ \lambda x & d \geq 2. \end{cases}$$

其中 $x \in \mathfrak{L}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\psi_0(x, y)$ 是非标准的。

参考文献

- [1] Xia, C.G., Wang, D.Y. and Han, X. (2016) Linear Super-Commuting Maps and Super-Biderivations on the Super-Virasoro Algebras. *Communications in Algebra*, **44**, 5342-5350. <https://doi.org/10.1080/00927872.2016.1172617>
- [2] Fan, G.Z. and Dai, X.S. (2016) Super-Biderivations of Lie superalgebras. *Linear and Multilinear Algebra*, **65**, 58-66. <https://doi.org/10.1080/03081087.2016.1167815>
- [3] Brešar, M. (1995) On Generalized Biderivations and Related Maps. *Journal of Algebra*, **172**, 764-786. <https://doi.org/10.1006/jabr.1995.1069>
- [4] Cheng, X., Wang, M., Sun, J. and Zhang, H. (2017) Biderivations and Linear Commuting Maps on the Lie Algebra. *Linear and Multilinear Algebra*, **65**, 2483-2493. <https://doi.org/10.1080/03081087.2016.1277688>
- [5] Chen, Z. (2016) Biderivations and Linear Commuting Maps on Simple Generalized Witt Algebras over a Field. *The Electronic Journal of Linear Algebra*, **31**, 1-12. <https://doi.org/10.13001/1081-3810.3100>
- [6] Wang, D.Y., Yu, X.X. and Chen, Z.X. (2011) Biderivations of the Parabolic Subalgebras of Simple Lie Algebras. *Communications in Algebra*, **39**, 4097-4104. <https://doi.org/10.1080/00927872.2010.517820>
- [7] Bagchi, A. and Gopakumar, R. (2009) Galilean Conformal Algebras and AdS/CFT. *Journal of High Energy Physics*, **2009**, Article 37. <https://doi.org/10.1088/1126-6708/2009/07/037>
- [8] Maldacena, J. (1999) The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity. *AIP Conference Proceedings*, **484**, 51-63. <https://doi.org/10.1063/1.59653>
- [9] Han, X., Wang, D.Y. and Xia, C.G. (2016) Linear Commuting Maps and Biderivations on the Lie Algebras $W(a, b)$. *Journal of Lie Theory*, **26**, 777-786. <https://doi.org/10.5802/jolt.912>
- [10] Aizawa, N. (2013) Some Properties of Planar Galilean Conformal Algebras. In: Dobrev, V., Ed., *Lie Theory and Its Applications in Physics*, Springer, 301-309. https://doi.org/10.1007/978-4-431-54270-4_21

- [11] Gao, D.F. and Gao, Y. (2022) Representations of the Planar Galilean Conformal Algebra. *Communications in Mathematical Physics*, **391**, 199-221.
<https://doi.org/10.1007/s00220-021-04302-9>
- [12] Gao, S.L., Liu, D. and Pei, Y. (2016) Structure of the Planar Galilean Conformal Algebra. *Reports on Mathematical Physics*, **78**, 107-122. [https://doi.org/10.1016/s0034-4877\(16\)30052-0](https://doi.org/10.1016/s0034-4877(16)30052-0)
- [13] Chen, Q.F. and He, Y. (2023) 2-Local Derivations on the Planar Galilean Conformal Algebra. *International Journal of Mathematics*, **34**, Article ID: 2350023.
<https://doi.org/10.1142/s0129167x23500234>
- [14] Chi, L.L., Sun, J.C. and Yang, H.Y. (2017) Biderivations and Linear Commuting Maps on the Planar Galilean Conformal Algebra. *Linear and Multilinear Algebra*, **66**, 1606-1618.
<https://doi.org/10.1080/03081087.2017.1364340>
- [15] Wang, D.Y. and Yu, X.X. (2013) Biderivations and Linear Commuting Maps on the Schrödinger-Virasoro Lie Algebra. *Communications in Algebra*, **41**, 2166-2173.
<https://doi.org/10.1080/00927872.2012.654551>

附 录

对于李括积 $[\sum_{i=1}^{d-1} \sum_{j=i+1}^d \sum_u \beta_{1u_{ij}} J_{ij}^{(u)}, J_{pq}^{(n)}]$, 我们先分析在 $\sum_{i=1}^{d-1} \sum_{j=i+1}^d \sum_u \beta_{1u_{ij}} J_{ij}^{(u)}$ 中能与 $J_{pq}^{(n)}$ 匹配上的项有哪些, 即结果不为 0 的项。由定义知, 共有四种情况: $i = p; i = q; j = p; j = q$ 。当 $i = p$ 时, 显然 $j \neq q$, 故对应项为: $\sum_{\substack{j=p+1 \\ j \neq q}}^d \sum_u \beta_{1u_{pj}} J_{pj}^{(u)}$ 。其余同理。