

带Markov切换Poisson跳的随机泛函微分方程解的存在性和稳定性

李光洁

广东外语外贸大学数学与统计学院, 广东 广州

收稿日期: 2026年7月3日; 录用日期: 2026年8月4日; 发布日期: 2026年8月25日

摘 要

本文研究了一类带Markov切换Poisson跳的随机泛函微分方程。运用Lyapunov函数方法和随机分析技巧, 研究了该类方程全局解的存在唯一性以及平凡解的均方指数稳定性和几乎必然稳定性。

关键词

随机泛函微分方程, Markov切换, Poisson跳, 存在性, 稳定性

Existence and Stability of Solutions to Stochastic Functional Differential Equations with Markovian Switching and Poisson Jumps

Guangjie Li

School of Mathematics and Statistics, Guangdong University of Foreign Studies, Guangzhou Guangdong

Received: July 3, 2026; accepted: August 4, 2026; published: August 25, 2026

Abstract

This paper investigates a class of stochastic functional differential equations with Markovian switching and Poisson jumps. By means of the Lyapunov function method and stochastic analysis techniques, this study establishes the existence and uniqueness of the global solution to such equations, as well as the mean-square exponential stability and the almost sure stability of the trivial solution.

Keywords

Stochastic Functional Differential Equations, Markovian Switching, Poisson Jumps, Existence, Stability

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

泛函微分方程广泛应用于各类实际情景。研究表明,在排队系统、生物与生态系统、金融经济、控制工程、网络化系统、有线与无线通信及其他相关领域等实际工程中,都不可避免的会遇到时滞现象。此类系统具有动力学的记忆效应,且其状态依赖于历史信息(参阅文献[1, 2])。同时,现实场景中许多动力系统又会遇到内外随机因素的影响,对这样的系统常用随机微分方程来刻画(见专著[3])。鉴于现实应用的需求,随机泛函微分方程及其相关应用得到了广泛研究,相关成果可参阅文献[4]。文献[5-7]及其参考文献讨论了随机泛函微分方程的几类稳定性,包括矩稳定性、几乎必然稳定性以及依概率稳定性等其他稳定性。

常用的随机系统模型是由 Brown 运动驱动的,然而 Brown 运动是一个连续的随机过程,一些系统会遇到一些突发的扰动,导致系统出现跳跃现象。能准确地刻画这种跳跃现象很有必要,因此将 Poisson 跳引入随机系统来刻画这种跳跃现象很有价值(参阅文献[8-10])。另一方面,大量随机系统也存在结构突变的现象,系统状态会从一种状态变换到另一种状态,这类动力学行为可用一组带 Markov 切换的随机系统模型来刻画(见文献[11])。因此,需在随机系统框架中引入 Markov 切换机制,相关理论可参阅专著[12]。

文献 [13] 研究了一类带 Markov 切换 Poisson 跳的随机时滞微分方程解的稳定性。文献 [14] 研

究了一类带 Markov 切换 Poisson 跳的随机时滞微分方程解的 p 阶矩稳定性与几乎必然稳定性。文献 [15] 运用 Razumikhin 和 Lyapunov 方法研究了一类带 Markov 切换 Lévy 噪声的随机时滞微分方程的 p 阶矩稳定性。基于上述研究, 本文利用 Lyapunov 函数方法及随机分析技巧, 研究了一类带 Markov 切换 Poisson 跳的随机泛函微分方程全局解的存在唯一性以及平凡解的均方指数稳定性和几乎必然稳定性。

本文结构如下: 第 2 节介绍了一些预备知识; 第 3 节给出了主要结果, 证明了所研究方程平凡解的几乎必然稳定性和均方指数稳定性以及全局解的存在唯一性。

2. 预备知识

记 $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$, $\mathbf{R}^+ = [0, +\infty)$. $\mathbf{R}^n$ 表示 n -维欧式空间。对任意的 $x \in \mathbf{R}^n$, $|x| = \sqrt{x^T x}$ 表示其 Euclid 范数。若 $\mathbf{A}$ 是一个向量或矩阵, 则 $\mathbf{A}^T$ 代表其转置, 且 $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)}$ 表示其范数, $|\mathbf{A}| = \sqrt{\text{trace}(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)}$ 。对 $\forall x, y \in \mathbf{R}^n$, $x^T y$ 表示 x 与 y 的内积。记 $W([-\tau, 0]; \mathbf{R}^n)$ 是定义在 $[-\tau, 0]$ 上且满足 $\int_{-\tau}^0 \eta(s) ds = 1$ 的所有非负有界的 Borel 可测函数 $\eta(s)$ 的集合。 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是一个完备的概率空间。当 $\tau > 0$, $C([-\tau, 0]; \mathbf{R}^n)$ 表示所有连续的函数 $\varphi: [-\tau, 0] \rightarrow \mathbf{R}^n$ 的集合。 $C_{\mathcal{F}_0}^b(\Omega; \mathbf{R}^n)$ 是所有 $\mathcal{F}_0$ -可测且有界的 $C([-\tau, 0]; \mathbf{R}^n)$ 函数的集合, 其范数是 $\|\varphi\| = \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} |\varphi(\theta)|$ 。 $\{r(t)\}_{t \geq 0}$ 表示的是完备概率空间上的一个右连续 Markov 链, 且其在一个有限的状态空间 $S = \{1, 2, \dots, N\}$ 上取值, 生成元 $\Gamma = (\gamma_{ij})_{N \times N}$ 满足

$$\mathbb{P}\{r(t + \Delta) = j | r(t) = i\} = \begin{cases} \gamma_{ij}\Delta + o(\Delta), & \text{if } i \neq j, \\ 1 + \gamma_{ii}\Delta + o(\Delta), & \text{if } i = j, \end{cases}$$

其中 $\Delta > 0$, $\lim_{\Delta \rightarrow 0} o(\Delta)/\Delta = 0$, 当 $i \neq j$ 时, $\gamma_{ij} \geq 0$ 表示的是从 i 到 j 的转移速率, $\gamma_{ii} = -\sum_{j \neq i} \gamma_{ij}$. $r(\cdot)$ 的几乎每条样本轨道均为右连续的阶梯函数, 且在 $\mathbf{R}^+$ 的任意有限子区间内仅存在有限个简单跳跃(参阅文献 [12])。

本文考虑如下带 Markov 切换 Poisson 跳的随机泛函微分方程:

$$dx(t) = f(x_t, r(t), t)dt + g(x_t, r(t), t)dB(t) + h(x_t, r(t), t)dN(t), \quad t \geq 0, \quad (2.1)$$

初始值

$$x_0 = \varphi = \{\varphi(\rho) : -\tau \leq \rho \leq 0\} \in C_{\mathcal{F}_0}^b(\Omega; \mathbf{R}^n) \text{ 和 } r(0) = i_0 \in S, \quad (2.2)$$

其中, $f, g, h : C([-\tau, 0]; \mathbf{R}^n) \times S \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^n$, $x_t = \{x(t + \theta) : -\tau \leq \theta \leq 0\}$ 是 $C([-\tau, 0]; \mathbf{R}^n)$ 上的一个随机过程, $B(t)$ 是一个标准的 Brown 运动, $N(t)$ 是一个强度为 $\lambda > 0$ 的 Poisson 过程。 $\tilde{N}(t) = N(t) - \lambda t$ 是补偿的 Poisson 过程。这里假设 $B(t)$, $N(t)$ 和 $r(t)$ 是相互独立的。对 $\forall t \in \mathbf{R}^+$ 和 $\forall i \in S$, 假设 $f(0, i, t) = g(0, i, t) = h(0, i, t) = 0$ 。

接下来研究方程 (2.1) 全局解的存在唯一性和平凡解的稳定性。假设对 $\forall x, \bar{x}, y, \bar{y} \in \mathbf{R}^n$, $\forall t \in \mathbf{R}^+$ 和 $\forall i \in S$ 有如下假设条件成立。

假设: 对任意的实数 $h > 0$, 存在一个常数 $L_h > 0$ 使得

$$\begin{aligned} & |f(x, i, t) - f(\bar{x}, i, t)| \vee |g(x, i, t) - g(\bar{x}, i, t)| \\ & \vee |h(x, i, t) - h(\bar{x}, i, t)| \leq L_h(|x - \bar{x}| + |y - \bar{y}|), \end{aligned} \quad (2.3)$$

其中, $|x| \vee |\bar{x}| \vee |y| \vee |\bar{y}| \leq h$ 。

令 $C^{2,1}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^+; \mathbf{R}^+)$ 是定义在 $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^+$ 上的所有非负函数 $V(x, t)$ 的集合, 这里 $V(x, t)$ 关于 x 是二阶可导的, 关于 t 是一阶可导的。定义算子 $LV : C([-\tau, 0]; \mathbf{R}^n) \times S \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned} LV(\varphi, i, t) = & V_t(\varphi(0), t) + V_x(\varphi(0), t)f(\varphi, i, t) \\ & + \frac{1}{2}\text{trace}[g^T(\varphi, i, t)V_{xx}(\varphi(0), t)g(\varphi, i, t)] \\ & + \lambda[V(\varphi(0) + h(\varphi, i, t), t) - V(\varphi(0), t)], \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned} V_t(x, t) &= \frac{\partial V(x, t)}{\partial t}, V_x(x, t) = \left(\frac{\partial V(x, t)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V(x, t)}{\partial x_n} \right), \\ V_{xx}(x, t) &= \left(\frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{n \times n}. \end{aligned}$$

定义 1 对任意的初始值 (2.2), 若有

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log |x(t)| < 0 \quad a.s.,$$

则称 (2.1) 的平凡解是几乎必然稳定的。

定义 2 对任意的初始值 (2.2), 若存在一对正常数 $\tilde{\gamma}$ 和 $\tilde{C}$ 满足

$$\mathbb{E}|x(t)|^2 \leq \tilde{C}\mathbb{E}\|\varphi\|^2 e^{-\tilde{\gamma}t}, \quad \forall t \geq 0,$$

则称方程 (2.1) 的平凡解是均方指数稳定的。

3. 主要结果

定理 假设条件 (2.3) 成立。对任意的 $(i, t) \in S \times \mathbf{R}^+$ 和 $\varphi \in C([-\tau, 0]; \mathbf{R}^n)$, 若存在正常数 $\alpha_k (k = 1, 2, 5, 6)$, 常数 $\alpha_k (k = 3, 4)$ 和函数 $\eta_j(\cdot) \in W([-\tau, 0]; \mathbf{R}^n) (j = 1, 2, 3, 4)$ 满足

$$2\varphi^T(0)f(\varphi, i, t) \leq -\alpha_1|\varphi(0)|^2 + \alpha_2 \int_{-\tau}^0 |\varphi(s)|^2 \eta_1(s) ds, \quad (3.4)$$

$$2\varphi^T(0)h(\varphi, i, t) \leq \alpha_3|\varphi(0)|^2 + \alpha_4 \int_{-\tau}^0 |\varphi(s)|^2 \eta_2(s) ds, \quad (3.5)$$

$$|g(\varphi, i, t)|^2 \leq \alpha_5 \int_{-\tau}^0 |\varphi(s)|^2 \eta_3(s) ds, \quad (3.6)$$

$$|h(\varphi, i, t)|^2 \leq \alpha_6 \int_{-\tau}^0 |\varphi(s)|^2 \eta_4(s) ds, \quad (3.7)$$

且

$$\alpha_1 > \alpha_2 + \alpha_5 + \lambda(\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6), \quad (3.8)$$

则方程 (2.1) 存在唯一的全局解 $x(t) (t \geq -\tau)$, 且方程 (2.1) 的平凡解是几乎必然稳定的和均方指数稳定的。

证明 (1) 先证方程 (2.1) 的平凡解是几乎必然稳定的和均方指数稳定的。取 $V(x, t) = x^2$ 。计算可得

$$\begin{aligned} LV(\varphi, i, t) &= 2\varphi^T(0)f(\varphi, i, t) + |g(\varphi, i, t)|^2 + \lambda[(\varphi(0) + h(\varphi, i, t))^2 - \varphi^2(0)] \\ &= 2\varphi^T(0)f(\varphi, i, t) + |g(\varphi, i, t)|^2 + \lambda[2\varphi^T(0)h(\varphi, i, t) + |h(\varphi, i, t)|^2] \\ &\leq -\alpha_1|\varphi(0)|^2 + \alpha_2 \int_{-\tau}^0 |\varphi(s)|^2 \eta_1(s) ds + \alpha_5 \int_{-\tau}^0 |\varphi(s)|^2 \eta_3(s) ds \\ &\quad + \lambda\alpha_6 \int_{-\tau}^0 |\varphi(s)|^2 \eta_4(s) ds + \lambda\alpha_3|\varphi(0)|^2 + \lambda\alpha_4 \int_{-\tau}^0 |\varphi(s)|^2 \eta_2(s) ds \\ &= -(\alpha_1 - \lambda\alpha_3)|\varphi(0)|^2 + [\alpha_2 + \alpha_5 + \lambda(\alpha_4 + \alpha_6)] \int_{-\tau}^0 |\varphi(s)|^2 \pi(s) ds, \end{aligned} \quad (3.9)$$

其中,

$$\pi(s) = \frac{\alpha_2\eta_1(s) + \alpha_5\eta_3(s) + \lambda[\alpha_4\eta_2(s) + \alpha_6\eta_4(s)]}{\alpha_2 + \alpha_5 + \lambda(\alpha_4 + \alpha_6)},$$

易验证 $\int_{-\tau}^0 \pi(s) ds = 1$, 故 $\pi(s) \in W([- \tau, 0]; \mathbf{R}^n)$ 。从而由文献 [10] 中定理 1 的证明可知方程 (2.1) 的平凡解是几乎必然稳定的和均方指数稳定的。

(2) 证明全局解的存在唯一性。由假设 (2.3) 可知方程 (2.1) 在 $t \in [-\delta, \sigma_e]$ 上有唯一的最大局部解 $x(t)$, 其中 σ_e 是爆破时间。接下来要证 $x(t)$ 是全局的, 只需证 $\sigma_e = \infty$ 。令 m_0 是一个充分大的整数且 $|x(0)| < m_0$ 。对任意的整数 $m > m_0$, 定义停时 $\sigma_m = \inf\{t \in [0, \sigma_e) : |x(t)| \geq m\}$ 。规定 $\inf \emptyset = \infty$, 这里 $\emptyset$ 是一个空集。根据 σ_m 的定义可知 σ_m 是递增的, 并且 $\sigma_\infty = \lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_m \leq \sigma_e$ 。由证明(1)可知方程 (2.1) 的平凡解是均方指数稳定的, 从而存在 $\tilde{C}_1$ 和 $\tilde{\gamma}_1$ 满足

$$\mathbb{E}|x(t)|^2 \leq \tilde{C}_1 \mathbb{E}\|\varphi\|^2 e^{-\tilde{\gamma}_1 t} < \infty (\forall t \geq 0).$$

又因为 $\mathbb{P}(\sigma_m \leq t) \mathbb{E}|x(\sigma_m)|^2 \leq \mathbb{E}|x(t \wedge \sigma_m)|^2 < \infty$, 且 $|x(\sigma_m)|^2 = m^2 \rightarrow \infty (m \rightarrow \infty)$, 所以 $\mathbb{P}(\sigma_m \leq t) \rightarrow 0 (m \rightarrow \infty)$, 故 $\sigma_\infty = \infty$ a. s.. 由停时 σ_m 的定义可得 $\sigma_e = \infty$ 。即, 对任意的初始值 (2.2), 方程 (2.1) 存在唯一的全局解。证毕。

参考文献

- [1] Appleby, J.A.D. and Mao, X. (2005) Stochastic Stabilisation of Functional Differential Equations. *Systems & Control Letters*, **54**, 1069-1081.
<https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2005.03.003>
- [2] Zong, X., Yin, G., Wang, L.Y., Li, T. and Zhang, J. (2018) Stability of Stochastic Functional Differential Systems Using Degenerate Lyapunov Functionals and Applications. *Automatica*, **91**, 197-207. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2018.01.038>
- [3] Mao, X. (1997) Stochastic Differential Equations and Application. Horwood Publication Ltd.
- [4] Mohammed, S.E.A. (1986) Stochastic Functional Differential Equations. Longman.
- [5] Zhao, X. and Deng, F. (2014) New Type of Stability Criteria for Stochastic Functional Differential Equations via Lyapunov Functions. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **52**, 2319-2347. <https://doi.org/10.1137/130948203>
- [6] Bao, J., Yin, G. and Yuan, C. (2016) Asymptotic Analysis for Functional Stochastic Differential Equations. Springer.
- [7] Kadiev, R. and Ponosov, A. (2022) The W-Method in Stability Analysis of Stochastic Functional Differential Equations. *Functional Differential Equations*, **29**, 167-181.
<https://doi.org/10.26351/fde/29/3-4/4>
- [8] Mariton, M. (1990) Jump Linear Systems in Automatic Control. Taylor & Francis.
- [9] Hanson, F.B. (2007) Applied Stochastic Processes and Control for Jump-Diffusion. SIAM.
- [10] Mo, H., Li, M., Deng, F. and Mao, X. (2018) Exponential Stability of the Euler-Maruyama Method for Neutral Stochastic Functional Differential Equations with Jumps. *Science China Information Sciences*, **61**, Article No. 70214. <https://doi.org/10.1007/s11432-017-9301-y>
- [11] Anderson, W.J. (1991) Continuous-Time Markov Chains. Springer.
- [12] Mao, X. and Yuan, C. (2006) Stochastic Differential Equations with Markovian Switching. Imperial College Press.
- [13] Swishchuk, A.V. and Kazmerchuk, Y.I. (2001) Stability of Stochastic Differential Delay It's Equations with Poisson Jumps and with Markovian Switchings: Application to Financial Models. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, **64**, 141-151.
- [14] Zhang, W., Ye, J. and Li, H. (2014) Stability with General Decay Rates of Stochastic Differential Delay Equations with Poisson Jumps and Markovian Switching. *Statistics & Probability Letters*, **92**, 1-11. <https://doi.org/10.1016/j.spl.2014.04.024>

- [15] Zhu, Q. (2016) Razumikhin-Type Theorem for Stochastic Functional Differential Equations with Lévy Noise and Markov Switching. *International Journal of Control*, **90**, 1703-1712.
<https://doi.org/10.1080/00207179.2016.1219069>