

一类完全二部图删边子图中包含给定森林的生成树计数

闫倩倩

青海民族大学数学与统计学院, 青海 西宁

收稿日期: 2026 年 7 月 22 日; 录用日期: 2026 年 8 月 20 日; 发布日期: 2026 年 8 月 31 日

摘 要

本文主要构造了完全二部图删去星图边集后的电学等价图, 并且利用 Teufel-Wagner 公式的推广形式, 计算了其包含给定生成森林所有边的生成树数目。

关键词

生成树, 生成森林, 电网络

Counting Spanning Trees Containing a Given Forest in Edge-Deleted Subgraphs of a Class of Complete Bipartite Graphs

Qianqian Yan

School of Mathematics and Statistics, Qinghai Minzu University, Xining Qinghai

Received: July 22, 2026; accepted: August 20, 2026; published: August 31, 2026

Abstract

In this paper, we construct the electrical equivalent graph of the complete bipartite graph after deleting the edge set of a star, and by applying a generalized form of the Teufl-Wagner formula, we count the number of spanning trees that contain all edges of a given spanning forest.

Keywords

Spanning Tree, Spanning Forest, Electrical Network

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

图的生成树是包含图中所有顶点、边数最少且连通的无环子图。Kirchhoff 在研究电路网络时提出了矩阵树定理，为图的生成树计数提供了系统的方法。

若把图 G 的每一个点看作一个节点，每一条边看作一个电阻，然后在任意两个节点之间施加电压，那么这个图 G 就可以视为一个电网络，且每条边 e 的权 $\omega(e)$ 为该边的电导。在电网络中，边赋权图顶点可以对应电网络的节点，两点间的边可以对应边赋权为电导值的电阻，这使得图论中的边赋权图成为刻画物理电网络的有力工具。

电阻距离是指将图中每条边用电阻代替后构造的电网络中两个节点之间的等效电阻。由于构造图的电学等价图需要计算图中任意两个顶点之间的距离，因此构造一般图的电学等价图具有重大的挑战性。许多学者发现，可以利用电路理论中等效电阻的局部图变换来计算网络中生成树的数目。

图中生成树的计数问题仍面临较大挑战，尤其是针对包含给定生成森林的生成树计数研究，目前已有的结果较少。Moon [1] 首次给出了完全图中包含一个生成森林的所有边的生成树的计数公式。Dong 与 Ge [2] 给出了完全二部图中含有一个给定的生成森林的所有边的生成树的计数公式。Li 和 Yan [3] 进一步扩展了这个问题，利用构造电学等价图的方法研究并得到了包含给定生成森林的完全多部图的生成树的计算公式。构造图的电学等价图，是研究包含给定森林的生成树计

数的关键前提。目前,关于构造一个图的电学等价图还是比较困难的,并且有效方法比较少。本文将沿用传统的构造方法,聚焦于构造电学等价图来研究包含给定森林的生成树的计数问题。

从图结构方面, $K_{m,n} - E(K_{1,s})$ 只破坏一个顶点与另一部中 s 个顶点之间的邻接关系,而保留其余完全二部结构。因此,该图仍具有较强的对称性。研究这一图类有助于理解生成树数目在局部边失效下的变化规律,并为更一般的完全二部图删边子图及完全多部图删边子图的计数问题提供可推广的模型。

本文的章节安排如下:第二节,我们主要给出本文所需要的一些引理。第三节,我们构造了完全二部图删星图边集后的电学等价图。第四节,我们利用 Teuff-Wagner 公式的推广形式,计算了包含给定生成森林所有边的完全二部图删去星图边集后的生成树数目。第五节,我们通过一个具体例子验证所得公式。

2. 基本准备

设 $G = (V(G), E(G))$ 为一个图, $V(G)$ 表示顶点集, $E(G)$ 表示边集。 $N(u)$ 表示简单连通图 G 中顶点 u 的邻点集。令 G_{uv} 是通过将图 G 中的顶点 u 与 v 粘合后得到的图。星图,完全图和完全二部图分别记为 $K_{1,s}$ 、 K_n 和 $K_{m,n}$ 。我们用 $\omega(e)$ 表示图 G 每条边 e 的权重。令 H 是 G 的一个子图, H 的总权重 $\omega(H)$ 为 H 中所有边权重的乘积。设 G 为一个 n 阶边赋权图,允许出现平行边、零权边和负权边。定义其带权邻接矩阵为 $A^\omega(G) = (a_{ij})_{n \times n}$, 其中当 $i \neq j$ 时, a_{ij} 为连接顶点 v_i 与 v_j 的所有边的权之和,并令 $a_{ii} = 0$ 。顶点 v_i 的加权重定义为 $d_i^\omega = \sum_{j \neq i} a_{ij}$, 其加权重矩阵为 $D^\omega(G) = \text{diag}(d_1^\omega, d_2^\omega, \dots, d_n^\omega)$ 。图 G 的加权拉普拉斯矩阵定义为 $L^\omega(G) = D^\omega(G) - A^\omega(G)$ 。当所有边权均为 1 时,分别简记为 $A(G)$ 、 $D(G)$ 和 $L(G)$ 。

我们用 $\mathcal{T}(G)$ 表示 G 的生成树的集合。令 $t(G)$ 是 G 的所有生成树的总权重,即

$$t(G) = \sum_{T \in \mathcal{T}(G)} \prod_{e \in E(T)} \omega(e).$$

对于图 G 中的森林 F , 其分支为 $T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_c$ 。令 $\mathcal{T}_F(G)$ 是满足 $E(F) \subseteq E(T)$ 的生成树 $T \in \mathcal{T}(G)$ 的集合。令 G 中满足 $E(F) \subseteq E(T)$ 的生成树的权重的总和为 $t_F(G)$ 。

引理 2.1. ([4]) 对于任意一个 n 个顶点的图 G , 其所有生成树的数目等于该图的拉普拉斯矩阵 $L(G)$ 中任意元素的代数余子式, 即

$$\tau(G) = (-1)^{i+j} \det(L_{ij}(G)),$$

其中, $L_{ij}(G)$ 表示从 $L(G)$ 中删除第 i 行和第 j 列后得到的 $(n-1) \times (n-1)$ 子矩阵, 这里 $i, j \in [n]$ 。

特别地, 设 G 为一个有限边赋权图, 其边权允许为零或负数, 并允许平行边。则对于任意 $i, j \in [n]$, 均有 $t(G) = (-1)^{i+j} \det L_{ij}^\omega(G)$, 其中 $L_{ij}^\omega(G)$ 表示从 $L^\omega(G)$ 中删除第 i 行和第 j 列所得的子矩阵。

如果把电网络抽象成图 G , 则电网络中两点 x 与 y 之间的电阻值可通过生成树的比值来描述, 即 $\Omega_G(x, y) = \frac{t(G_{xy})}{t(G)}$ [4, 5]。Li 和 Yan [6] 给出了一种 K- 等价网络的等价定义:

定义 2.2. ([6]) 令 G 和 G' 是两个顶点集分别为 $V(G)$ 和 $V(G')$ 的电网络。令 $K \subseteq V(G) \cap V(G')$ 。如果对于任意一对顶点 $\{u, v\} \subseteq K$ 满足 $\Omega_G(u, v) = \Omega_{G'}(u, v)$, 我们就称 G 和 G' 是关于 K 电学等价的, 记作 K -等价网络。

令 $G = (V(G), E(G))$ 和 $G^* = (V(G^*), E(G^*))$ 是两个顶点集满足 $V(G) \subseteq V(G^*)$ 的 $V(G)$ -等价边赋权图。令 $F = T_1 \cup T_2 \cup \cdots \cup T_c$ 是 G 中的一个森林。定义 $G^* \cdot V(F)$ 为通过将 G^* 中 F 的每个连通分支 T_i 的顶点集 $V(T_i)$ 收缩为一个新顶点 u_i ($1 \leq i \leq c$) 得到的边赋权图。

Teufl 和 Wagner [5] 基于对电网络理论的研究, 提出了一个电阻等价替换法则如下:

引理 2.3. ([5]) 令 G 是边赋权连通图且 H 是 G 的连通子图。若 H^* 是满足 $V(H) \subseteq V(H^*)$ 的图, H 和 H^* 是 $V(H)$ -等价的且 $t(H)t(H^*) \neq 0$ 。令 G^* 是一个通过将 G 中的子图 H 用 H^* 替换得到的边赋权连通图。则

$$\frac{t(G)}{t(G^*)} = \frac{t(H)}{t(H^*)}.$$

李和晏 [6] 给出了计算包含给定生成森林的生成树数目的一个计数公式如下。

引理 2.4. ([6]) 令 $G = (V(G), E(G))$ 和 $G^* = (V(G^*), E(G^*))$ 是两个 $V(G)$ -等价边赋权连通图。对于 G 中任意给定的森林 $F = T_1 \cup T_2 \cup \cdots \cup T_k$, 令 $G^* \cdot V(F)$ 是一个边赋权图定义如上。则

$$\frac{t_F(G)/\omega(F)}{t(G^* \cdot V(F))} = \frac{t(G)}{t(G^*)}.$$

为了计算生成树数目, 我们介绍以下几个引理。

引理 2.5. ([5]) 令 $K_{1,s}^\omega$ 是一个边赋权星图, 其顶点集为 $\{v_1, v_2, \dots, v_s\} \cup \{o\}$, 边集为 $\{ov_1, ov_2, \dots, ov_s\}$, 其中边权函数满足: 对每个 $i = 1, 2, \dots, s$, $\omega(ov_i) = a_i$ 。假设 G 是一个边赋权图, 其存在一个边赋权的子图 H 与 $K_{1,s}^\omega$ 同构。令 G^* 是从 G 中通过将子图 H 替换为一个边赋权的完全图 K_s^ω 而得到的图, 其中完全图的顶点集为 $\{v_1, v_2, \dots, v_s\}$, 边权函数满足: 对每个 $1 \leq i \neq j \leq s$, 有 $\omega(v_i v_j) = \frac{a_i a_j}{\sum_{i=1}^s a_i}$ 。则

$$t(G) = (a_1 + a_2 + \cdots + a_s)t(G^*).$$

接下来, 我们引入一些关于计算有效电阻的结果。

引理 2.6. ([7]) 令 G 是一个包含两个不相邻的顶点 a 和 b 的图并且满足 $N(a) = N(b)$, 则 $R_{a,b} = \frac{2}{|N(a)|}$ 。

引理 2.7. ([8]) 令 G 是一个包含 n 个顶点的简单连通图。 G 的每条边 ij 的电阻为 r_{ij} 。对于 G 的任意两个顶点 u 和 v ,

$$\left(\sum_{x \in N(u)} \frac{1}{r_{ux}} \right) R_{uv} + \sum_{x \in N(u)} \frac{1}{r_{ux}} (R_{ux} - R_{vx}) = 2.$$

引理 2.8. ([9]) 对于完全 2-部图 $G = K_{m,n}$, $t(K_{m,n}) = m^{n-1}n^{m-1}$ 。

引理 2.9. ([7]) 完全二部图 $K_{m,n}$ 与一个边赋权双星 $DS(m,n)$ 关于 $V(K_{m,n})$ 电阻等价, 其中 $DS(m,n)$ 的顶点集为 $\{o_1, u_1, \dots, u_m\} \cup \{o_2, v_1, \dots, v_n\}$, 边集为 $\{o_1 o_2\} \cup \{o_1 u_i, o_2 v_j \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$, 边权函数满足: $\omega(o_1 u_i) = n$ ($1 \leq i \leq m$), $\omega(o_2 v_j) = m$ ($1 \leq j \leq n$), $\omega(o_1 o_2) = -mn$. 图结构如图 1 所示。

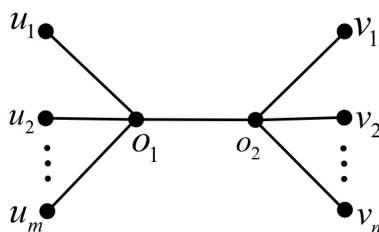


Figure 1. The edge-weighted double star $DS(m,n)$

图 1. 边赋权双星图 $DS(m,n)$

3. 构造电学等价图

在本节中, 我们构造了完全二部图删星图边集后的电学等价图。

对于图 G 的导出子图 H , 令 $G - E(H)$ 是图 G 删除图 H 的边后得到的子图。令 $G = K_{m,n} - E(K_{1,s})$ ($m, n \geq 2, 1 \leq s \leq m-1$) 是通过将顶点划分为 $U \cup V$ 且 $|U| = m, |V| = n$ 的完全二部图 $K_{m,n}$ 中的子图 $K_{1,s}$ ($1 \leq s \leq m-1$) 的边删掉得到的图。图 G 的顶点集为 $V(G) = \{u_1, u_2, \dots, u_m, v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $K_{1,s}$ 的顶点集为 $V(K_{1,s}) = \{v_1, u_1, u_2, \dots, u_s\}$ (其中 v_1 是 $K_{1,s}$ 的中心顶点)。令 G' 是通过将 G 中子图 $K_{m,n-1}$ 用边赋权双星 $DS_{m,n-1}^w$ 替换得到的边赋权图, 其中 G' 的边赋权函数 ω 满足: $\omega(o_1 v_i) = m$ ($2 \leq i \leq n$), $\omega(o_2 u_j) = n-1$ ($1 \leq j \leq m$), $\omega(v_1 u_k) = 1$ ($s+1 \leq k \leq m$), $\omega(o_1 o_2) = -m(n-1)$, 参见图 2。

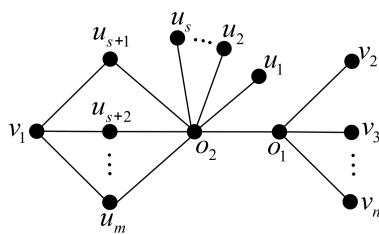


Figure 2. The edge-weighted graph G'

图 2. 边赋权图 G'

对于 $s+1 \leq k \leq m$, 定义 $K_{2,m-s}^\omega$ 是一个边赋权完全二部图满足 $\omega(v_1 u_k) = 1, \omega(o_2 u_k) = n-1$ 。显然, 图 $K_{2,m-s}^\omega$ 是图 G' 的一个子图, 参见图 3。

令 $DS(2, m-s)_w$ 是一个边赋权双星图满足 $\omega(o_2 o_3) = (n-1)(m-s), \omega(v_1 o_3) = m-s, \omega(o_3 o_4) = -n(m-s), \omega(o_4 u_k) = n$ 。令 G^* 是通过将 G' 中的子图 $K_{2,m-s}^\omega$ 用 $DS(2, m-s)_w$ 替换得到的边赋权图, 其中 G^* 的边赋权函数 ω 满足: $\omega(o_1 v_i) = m$ ($2 \leq i \leq n$), $\omega(o_1 o_2) = -m(n-1), \omega(o_2 u_j) =$

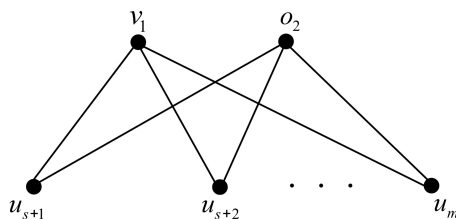


Figure 3. The edge-weighted graph $K_{2,m-s}^\omega$

图 3. 边赋权图 $K_{2,m-s}^\omega$

$n-1$ ($1 \leq j \leq s$), $\omega(o_2 o_3) = (n-1)(m-s)$, $\omega(v_1 o_3) = m-s$, $\omega(o_3 o_4) = -n(m-s)$, $\omega(o_4 u_k) = n$ ($s+1 \leq k \leq m$), 参见图 4。

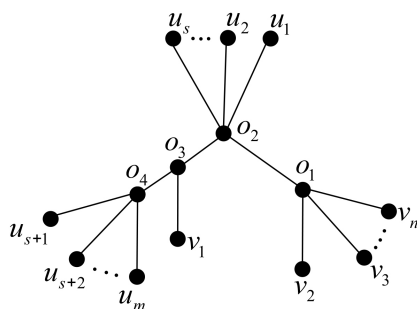


Figure 4. The edge-weighted graph G^*

图 4. 边赋权图 G^*

定理 3.1. 图 G 和图 G^* 是 $V(G)$ -等价的, G 和 G^* 定义如上。

证明 根据定义 2.2 和引理 2.9 可知, G 和 G' 是 $V(G)$ -等价的。对于 $K_{2,m-s}^\omega$, 我们首先计算其任意两点之间的电阻距离。由图 $K_{2,m-s}^\omega$ 的对称性, 我们设

$$\begin{cases} r_1 = R_{v_1 o_2} \\ r_2 = R_{u_i o_2}, & s+1 \leq i \leq m \\ r_3 = R_{v_1 u_i}, & s+1 \leq i \leq m \\ r_4 = R_{u_i u_j}, & s+1 \leq i, j \leq m \text{ 且 } i \neq j \end{cases}$$

根据引理 2.6 可得, $r_4 = \frac{2}{n}$ 。

对 $\{v_1, u_m\}$ 应用引理 2.7, 可得

$$(m-s)r_3 + r_3 + (m-s-1)(r_3 - r_4) = 2. \quad (1)$$

将 $r_4 = \frac{2}{n}$ 代入方程 1 可得, $r_3 = \frac{n+m-s-1}{n(m-s)}$ 。

对 $\{u_m, o_2\}$ 应用引理 2.7, 可得

$$(n-1)(m-s)r_2 + (n-1)(m-s-1)(r_2-r_4) + (n-1)r_2 = 2. \quad (2)$$

将 $r_4 = \frac{2}{n}$ 代入方程 2 可得, $r_2 = \frac{n+(n-1)(m-s-1)}{n(n-1)(m-s)}$.

对 $\{v_1, o_2\}$ 应用引理 2.7, 可得

$$(m-s)r_1 + (m-s)(r_3-r_2) = 2. \quad (3)$$

将 $r_2 = \frac{n+(n-1)(m-s-1)}{n(n-1)(m-s)}$ 和 $r_3 = \frac{n+m-s-1}{n(m-s)}$ 代入方程 3 可得, $r_1 = \frac{n}{(n-1)(m-s)}$. 因此可得,

$$\begin{cases} r_1 = \frac{n}{(n-1)(m-s)} \\ r_2 = \frac{n+(n-1)(m-s-1)}{n(n-1)(m-s)} \\ r_3 = \frac{n+m-s-1}{n(m-s)} \\ r_4 = \frac{2}{n} \end{cases}$$

由以上结果, 可以得到 $K_{2,m-s}^\omega$ 和 $DS(2, m-s)_\omega$ 是 $V(K_{2,m-s}^\omega)$ -等价的. 因此, 由定义 2.2 可知, G' 和 G^* 是 $V(G)$ -等价的.

综上所述, G 和 G^* 是 $V(G)$ -等价的. □

4. 包含给定生成森林的生成树计数

定理 4.1. 令 $G = K_{m,n} - E(K_{1,s})(m, n \geq 2, 1 \leq s \leq m-1)$, $F = T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_c$ 是图 G 的一个具有 c 个分量的生成森林, 沿用上述符号, 则

$$t_F(G) = \frac{\prod_{j=1}^c \alpha_j}{m^2 n^2 (n-1)^2 (m-s)^2} (-1)^{r+t} \det L_{r,t}^\omega(K_4^\omega).$$

其中, 对于 $j = 1, 2, \dots, c$, $\alpha_j = m_j m + n_j(n-1) + p_j(m-s) + q_j n$, $m_j = |\{v_2, v_3, \dots, v_n\} \cap V(T_j)|$, $n_j = |\{u_1, u_2, \dots, u_s\} \cap V(T_j)|$, $p_j = |\{v_1\} \cap V(T_j)|$, $q_j = |\{u_{s+1}, u_{s+2}, \dots, u_m\} \cap V(T_j)|$, 顶点集为 $\{o_1, o_2, o_3, o_4\}$ 的边赋权完全图 K_4^ω 的六条边的权分别为 $\omega_{12} = m(n-1)(\sum_{j=1}^c \frac{m_j n_j}{\alpha_j} - 1)$, $\omega_{13} = m(m-s) \sum_{j=1}^c \frac{m_j p_j}{\alpha_j}$, $\omega_{14} = mn \sum_{j=1}^c \frac{m_j q_j}{\alpha_j}$, $\omega_{23} = (n-1)(m-s)(\sum_{j=1}^c \frac{n_j p_j}{\alpha_j} + 1)$, $\omega_{24} = n(n-1) \sum_{j=1}^c \frac{n_j q_j}{\alpha_j}$, $\omega_{34} = n(m-s)(\sum_{j=1}^c \frac{p_j q_j}{\alpha_j} - 1)$. $L^\omega(K_4^\omega) = (\ell_{ik})_{4 \times 4}$ 为 K_4^ω 的加权拉普拉斯矩阵,

$$\ell_{ik} = \begin{cases} -\omega_{ik}, & i \neq k, \\ \sum_{h \neq i} \omega_{ih}, & i = k. \end{cases}$$

对于任意 $r, t \in \{1, 2, 3, 4\}$, $L_{r,t}^\omega(K_4^\omega)$ 为从 $L^\omega(K_4^\omega)$ 中删去第 r 行和第 t 列所得的子矩阵, $(-1)^{r+t} \det L_{r,t}^\omega$ 为相应的代数余子式。

证明 由引理 2.1, 我们可以得到 $t(G) = (m-s)(n-1)^s m^{n-2} n^{m-s-1}$ 。由定理 3.1, 可以得出 $t(G^*) = m^n(m-s)^3 n^{m-s+1}(n-1)^{s+2}$ 。进而可以得到 $\frac{t(G^*)}{t(G)} = m^2 n^2 (n-1)^2 (m-s)^2$ 。

由 $G^* \cdot V(F)$ 的定义我们可以得到, $G^* \cdot V(F)$ 的边赋权函数满足: 对于 $j = 1, 2, \dots, c$, $\omega(o_1 o_2) = -m(n-1)$, $\omega(o_2 o_3) = (n-1)(m-s)$, $\omega(o_3 o_4) = -n(m-s)$, $\omega(o_1 l_j) = m_j m$, $\omega(o_2 l_j) = n_j(n-1)$, $\omega(o_3 l_j) = p_j(m-s)$, $\omega(o_4 l_j) = q_j n$ 。观察 $G^* \cdot V(F)$ 的结构可知, $G^* \cdot V(F)$ 包含 c 个边赋权星图 $K_{1,4}^{(l_1)}, K_{1,4}^{(l_2)}, \dots, K_{1,4}^{(l_c)}$, 其中 $K_{1,4}^{(l_j)}$ 的顶点集为 $\{l_j, o_1, o_2, o_3, o_4\}$, 并且 $K_{1,4}^{(l_j)}$ 的边赋权函数满足: 对于 $j = 1, 2, \dots, c$, $\omega(o_1 l_j) = m_j m$, $\omega(o_2 l_j) = n_j(n-1)$, $\omega(o_3 l_j) = p_j(m-s)$, $\omega(o_4 l_j) = q_j n$ 。运用引理 2.5 c 次, 将 $G^* \cdot V(F)$ 中的子图 $K_{1,4}^{(l_1)}, K_{1,4}^{(l_2)}, \dots, K_{1,4}^{(l_c)}$ 分别用 $K_4^{(l_1)}, K_4^{(l_2)}, \dots, K_4^{(l_c)}$ 替换, 将会得到一个 c 重边的边赋权完全图 K_4^ω , 其中 $K_4^{(l_j)}$ ($1 \leq j \leq c$) 的顶点集均为 $\{o_1, o_2, o_3, o_4\}$, 并且 $K_4^{(l_j)}$ 的边赋权函数满足: $\alpha_j = m_j m + n_j(n-1) + p_j(m-s) + q_j n$,

$$\begin{aligned}\omega(o_1 o_2) &= \frac{m_j n_j m(n-1)}{\alpha_j}, \omega(o_1 o_3) = \frac{m_j p_j m(m-s)}{\alpha_j}, \\ \omega(o_1 o_4) &= \frac{m_j q_j m n}{\alpha_j}, \omega(o_2 o_3) = \frac{n_j p_j (n-1)(m-s)}{\alpha_j}, \\ \omega(o_2 o_4) &= \frac{n_j q_j n(n-1)}{\alpha_j}, \omega(o_3 o_4) = \frac{p_j q_j n(m-s)}{\alpha_j}.\end{aligned}$$

因此, K_4^ω 的边赋权函数满足:

$$\begin{aligned}\omega(o_1 o_2) &= \left(\sum_{j=1}^c \frac{m_j n_j}{\alpha_j} - 1\right) m(n-1), \omega(o_1 o_3) = \sum_{j=1}^c \frac{m_j p_j}{\alpha_j} m(m-s), \\ \omega(o_1 o_4) &= \sum_{j=1}^c \frac{m_j q_j}{\alpha_j} m n, \omega(o_2 o_3) = \left(\sum_{j=1}^c \frac{n_j p_j}{\alpha_j} + 1\right) (n-1)(m-s), \\ \omega(o_2 o_4) &= \sum_{j=1}^c \frac{n_j q_j}{\alpha_j} n(n-1), \omega(o_3 o_4) = \left(\sum_{j=1}^c \frac{p_j q_j}{\alpha_j} - 1\right) n(m-s).\end{aligned}$$

根据引理 2.5 可得,

$$t(G^* \cdot V(F)) = \left(\prod_{j=1}^c \alpha_j\right) t(K_4^\omega).$$

对任意 $r, t \in \{1, 2, 3, 4\}$ 均有

$$t(K_4^\omega) = (-1)^{r+t} \det L_{r,t}^\omega(K_4^\omega).$$

由引理 2.4 以及

$$\frac{t(G^*)}{t(G)} = m^2 n^2 (n-1)^2 (m-s)^2$$

可得

$$t_F(G) = \frac{\prod_{j=1}^c \alpha_j}{m^2 n^2 (n-1)^2 (m-s)^2} (-1)^{r+t} \det L_{r,t}^\omega(K_4^\omega).$$

□

5. 实例验证

取 $m = n = 3$ 且 $s = 1$ 。令 $G = K_{3,3} - u_1v_1$ ，其中二部划分为 $U = \{u_1, u_2, u_3\}, V = \{v_1, v_2, v_3\}$ 。选取生成森林 $F = T_1 \cup T_2 \cup T_3$ ，其中 $T_1 = v_1u_2, T_2 = u_1v_2, T_3 = v_3u_3$ 。我们很容易地可以得到图 G 中包含 F 的生成树，参见图 5。

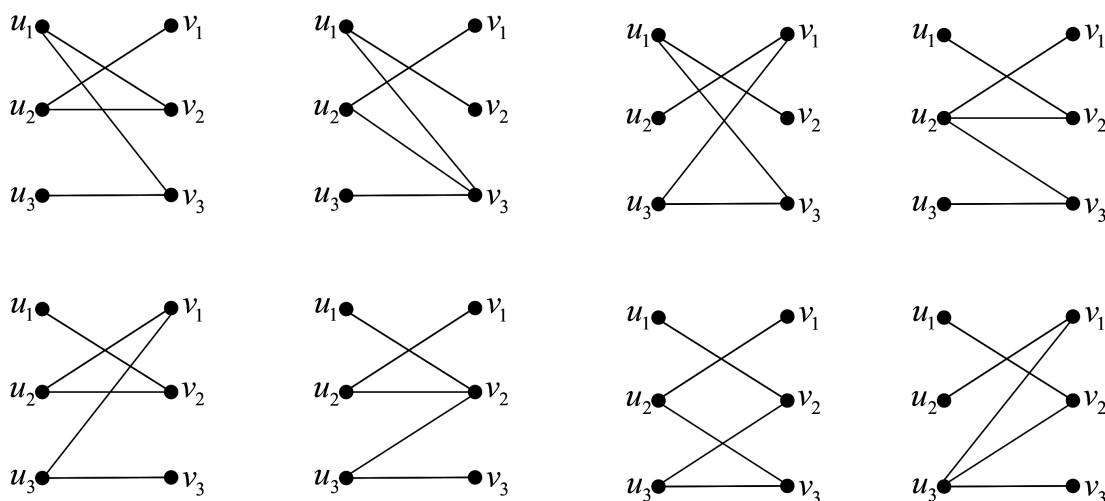


Figure 5. Spanning trees of G containing F

图 5. 图 G 中包含 F 的生成树

从而 $t_F(G) = 8$ 。

下面我们使用定理 4.1，来计算图 G 中包含 F 的生成树数目。对于 T_1 ，我们有 $m_j = 0, n_j = 0, p_j = 1, q_j = 1, \alpha_j = 5$ ；对于 T_2 ，我们有 $m_j = 1, n_j = 1, p_j = 0, q_j = 0, \alpha_j = 5$ ；对于 T_3 ，我们有 $m_j = 1, n_j = 0, p_j = 0, q_j = 1, \alpha_j = 6$ 。因此 $\prod_{j=1}^3 \alpha_j = 150, \omega_{12} = -\frac{24}{5}, \omega_{13} = 0, \omega_{14} = \frac{3}{2}, \omega_{23} = 4, \omega_{24} = 0, \omega_{34} = -\frac{24}{5}$ 。相应的加权拉普拉斯矩阵为

$$L^\omega(K_4^\omega) = \begin{pmatrix} -\frac{33}{10} & \frac{24}{5} & 0 & -\frac{3}{2} \\ \frac{24}{5} & -\frac{4}{5} & -4 & 0 \\ 0 & -4 & -\frac{4}{5} & \frac{24}{5} \\ -\frac{3}{2} & 0 & \frac{24}{5} & -\frac{33}{10} \end{pmatrix}.$$

删去第四行和第四列可得

$$\det L_{4,4}^{\omega}(K_4^{\omega}) = \det \begin{pmatrix} -\frac{33}{10} & \frac{24}{5} & 0 \\ \frac{24}{5} & -\frac{4}{5} & -4 \\ 0 & -4 & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} = \frac{1728}{25}.$$

由定理 4.1, 我们可以得到

$$t_F(G) = \frac{150}{3^2 \cdot 3^2 \cdot (3-1)^2 \cdot (3-1)^2} \cdot \frac{1728}{25} = 8.$$

该结果与直接枚举一致, 从而验证了定理 4.1 在本例中的一致性。

参考文献

- [1] Moon, J.W. (1964) The Second Moment of the Complexity of a Graph. *Mathematika*, **11**, 95-98. <https://doi.org/10.1112/s0025579300004290>
- [2] Dong, F. and Ge, J. (2022) Counting Spanning Trees in a Complete Bipartite Graph Which Contain a Given Spanning Forest. *Journal of Graph Theory*, **101**, 79-94. <https://doi.org/10.1002/jgt.22812>
- [3] Li, D., Chen, W. and Yan, W. (2023) Enumeration of Spanning Trees of Complete Multipartite Graphs Containing a Fixed Spanning Forest. *Journal of Graph Theory*, **104**, 160-170. <https://doi.org/10.1002/jgt.22954>
- [4] Bollobas, B. (1998) Modern Graph Theory. Springer.
- [5] Teufl, E. and Wagner, S. (2010) Determinant Identities for Laplace Matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, **432**, 441-457. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2009.08.028>
- [6] Li, D. and Yan, W. (2025) A Variant of the Teufl-Wagner Formula and Applications. *Journal of Graph Theory*, **109**, 68-75. <https://doi.org/10.1002/jgt.23220>
- [7] Gervacio, S.V. (2016) Resistance Distance in Complete n -Partite Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **203**, 53-61. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2015.09.017>
- [8] Chen, H. (2010) Random Walks and the Effective Resistance Sum Rules. *Discrete Applied Mathematics*, **158**, 1691-1700. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2010.05.020>
- [9] Fiedler, M. and Sedláček, J. (1958) On w -Bases of Directed Graphs. *Časopis pro pěstování matematiky*, **83**, 214-225. <https://doi.org/10.21136/cpm.1958.108301>