

一类具有广义饱和发生率与饱和治疗函数的随机SIR模型动力学分析

王艳霞

西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州

收稿日期: 2026年8月31日; 录用日期: 2026年9月29日; 发布日期: 2026年10月29日

摘要

本文建立并研究了一类具有广义饱和发病率与饱和治疗函数的随机 SIR 传染病模型, 其中饱和发病率采用形式 $g(S, I) = \frac{\beta SI}{1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I}$, 以更全面地描述疾病传播过程中的心理抑制效应与接触饱和现象. 我们证明了随机 SIR 模型存在唯一的全局正解, 并分析了其平衡点的稳定性. 通过构造 Lyapunov 函数, 我们得到了疾病灭绝(当 $\mathcal{R}_0 \leq 1$) 与持续存在(当 $\mathcal{R}_0 > 1$) 的充分条件. 进一步, 我们探讨了白噪声对系统动态的影响, 通过数值模拟验证了理论结果的有效性. 本研究为随机环境下的传染病控制提供了理论依据与数值支持.

关键词

随机 SIR 模型, 广义饱和发病率, 饱和治疗函数, p 阶矩指数稳定性

Dynamic Analysis of a Stochastic SIR Model with Generalized Saturated Incidence Rate and Saturated Treatment Function

Yanxia Wang

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Abstract

In this paper, we establish and investigate a class of stochastic SIR epidemic models with a generalized saturated incidence rate and a saturated treatment function. The saturated incidence rate takes the form $g(S, I) = \frac{\beta SI}{1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I}$, which provides a more comprehensive description of psychological inhibition effects and contact saturation during disease transmission. We prove the existence and uniqueness of a global positive solution to the stochastic SIR model and analyze the stability of its equilibrium points. By constructing Lyapunov functions, we derive sufficient conditions for disease extinction (when $\mathcal{R}_0 \leq 1$) and persistence (when $\mathcal{R}_0 > 1$). Furthermore, we explore the impact of white noise on the system dynamics and validate the theoretical results through numerical simulations. This study provides theoretical foundations and numerical support for epidemic control in stochastic environments.

Keywords

Stochastic SIR Model, Generalized Saturated Incidence Rate, Saturated Treatment Function, p-th Moment Exponential Stability

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

传染病动力学模型是研究疾病传播规律、揭示流行机制以及制定疾病防控策略的重要数学工具. 自 Kermack 和 McKendrick 建立经典 SIR (Susceptible-Infected-Recovered) 模型以来, 数学模型已被广泛应用于分析传染病传播过程中的传播阈值、平衡状态以及长期动力学行为 [1]. 然而, 经典 SIR 模型通常采用双线性发生率, 假设感染传播速率与易感者和感染者数量呈线性关系, 这一假设在实际传播过程中存在一定局限性. 随着感染规模增加, 个体防护意识增强、社会接触模式改变以及有效接触机会减少等因素可能导致传播效率降低, 因此需要引入更加符合实际传播规律的非线性发生率函数.

针对传统发生率函数的不足, 研究者提出了多种非线性发生率形式, 以描述疾病传播过程中存

在的接触限制和行为调节效应. 其中, Capasso 和 Serio 首次提出了包含饱和和发生率的传染病模型, 用于刻画传播过程中由于接触频率限制导致的传播饱和现象 [2]. 随后, 非线性发生率被广泛应用于 SIR、SIRS 等传染病模型, 并被证明能够显著影响疾病传播阈值、平衡状态以及系统动力学行为 [3–5]. 此外, 由于实际疾病控制过程中医疗资源和治疗能力具有有限性, 当感染人数增加时, 治疗能力可能受到限制, 因此饱和治疗函数逐渐被引入传染病模型, 用于描述有限医疗资源条件下疾病控制过程中的资源约束效应 [6–8].

近年来, 为进一步描述疾病传播过程中的记忆效应和历史依赖性, 分数阶传染病模型受到广泛关注. 与传统整数阶模型相比, 分数阶模型通过引入非整数阶微分算子, 可以更加灵活地描述系统的非局部动力学特征. 已有研究基于 Caputo 型分数阶导数建立了包含非线性发生率和治疗机制的 SIR 模型, 并研究了分数阶阶数对疾病传播过程的影响 [9]. 相关研究表明, 分数阶模型为传染病动力学分析提供了一种新的理论视角, 但其主要关注系统记忆效应, 对于随机环境因素引起的不确定性影响仍需要进一步研究. 另一方面, 实际疾病传播过程不可避免地受到环境变化、人口流动以及社会行为波动等随机因素影响, 因此随机传染病模型逐渐成为研究复杂传播系统的重要方向. 已有研究表明, 随机扰动可能改变疾病传播阈值、系统稳定性以及疾病灭绝和持续性行为 [10–12]. 针对随机环境下的非线性传播过程, 部分研究进一步考虑了饱和和发生率对随机传染病模型动力学行为的影响, 并获得了相应的阈值条件和稳定性结果 [13, 14]. 此外, Rajasekar 等研究了同时包含饱和和发生率以及饱和治疗函数的随机 SIR 模型, 为随机环境下考虑传播限制和治疗约束提供了重要参考 [15].

然而, 已有研究大多侧重于随机扰动、非线性发生率或治疗机制中的某一方面, 对于同时考虑广义饱和和发生率、饱和治疗函数以及随机环境扰动作用下传染病系统动力学性质的研究仍有进一步拓展空间. 特别是在更一般化的饱和和传播机制下, 随机扰动对疾病灭绝、持续性以及稳定性行为的影响仍需要深入分析.

针对上述问题, 本文建立了一类具有广义饱和和发生率以及饱和治疗函数的随机 SIR 模型. 具体而言, 考虑易感者、感染者和恢复者之间的相互作用关系, 在感染传播过程中引入随机扰动项, 以描述环境因素对疾病传播速率的影响; 同时采用广义饱和和发生率:

$$g(S, I) = \frac{\beta SI}{1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I}, \quad (1.1)$$

描述传播过程中的接触限制效应, 并引入饱和治疗函数:

$$h(I) = \frac{rI}{1 + \alpha I},$$

刻画有限医疗资源条件下治疗能力的约束作用. 此外, 为描述环境波动对疾病传播过程的影响, 在感染传播项中引入白噪声随机扰动项: $\sigma dW(t)$, 从而构建如下随机 SIR 模型:

$$\begin{cases} dS = \left(A - \rho S - \frac{\beta SI}{1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I} \right) dt - \frac{\sigma SI}{1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I} dW(t), \\ dI = \left(\frac{\beta SI}{1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I} - (\rho + \vartheta + \mu)I - \frac{rI}{1 + \alpha I} \right) dt + \frac{\sigma SI}{1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I} dW(t), \\ dR = \left(\mu I + \frac{rI}{1 + \alpha I} - \rho R \right) dt. \end{cases} \quad (1.2)$$

该模型综合考虑了传播非线性、治疗资源限制以及随机环境因素之间的相互作用, 为研究复杂随机环境下传染病传播动力学行为提供了数学框架. 基于所建立的随机 SIR 模型, 本文利用随机微分方程理论和 Lyapunov 函数方法, 研究模型正解的全局存在性、稳定性以及疾病灭绝和持续性行为.

本文的主要贡献如下:

- (1)建立了一类包含广义饱和和发生率和饱和治疗函数的随机 SIR 模型, 在统一框架下考虑传播饱和和效应、治疗资源限制以及随机扰动因素的共同影响;
- (2)利用随机分析方法和 Lyapunov 函数理论, 证明模型正解的全局存在性, 并分析系统稳定性;
- (3)获得疾病灭绝和持续性的充分条件, 揭示随机扰动及关键参数变化对疾病长期动力学行为的影响.

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ 是一个具有滤波 $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ 的完备概率空间, 该滤波满足标准条件(即它是递增且右连续的, 同时 $\mathcal{F}_0$ 包含所有 $\mathbb{P}$ 零集).

考虑形式如下的 d 维随机微分方程

$$dx(t) = f(x(t), t)dt + g(x(t), t)dW(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1.3)$$

其中 $t_0 \leq t \leq T < \infty$, 函数 $f: \mathbb{R}^d \times [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ 和 $g: \mathbb{R}^d \times [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{d \times m}$ 是 Borel 可测的. $W = \{W(t)\}_{t \geq t_0}$ 是一个 R^m 值的维纳过程, x_0 是定义在完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的 R^d 值随机变量.

用 $\mathcal{C}^{2,1}(\mathbb{R}^d \times [t_0, \infty); \mathbb{R}_+)$ 表示所有定义在 $\mathbb{R}^d \times [t_0, \infty)$ 上的非负函数 $V(x, t)$ 的族, 这些函数在 x 上二阶连续可微, 在 t 上一阶连续可微. 与随机微分方程(1.3)相关的无穷小生成元 $\mathcal{L}$ 定义为

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^d f_i(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d (g(x, t)g^T(x, t))_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (1.4)$$

若算子 $\mathcal{L}$ 作用于函数 $V \in \mathcal{C}^{2,1}(\mathbb{R}^d \times [t_0, \infty); \mathbb{R}_+)$, 则

$$\mathcal{L}V(x, t) = V_t(x, t) + V_x(x, t)f(x, t) + \frac{1}{2}\text{trace}[g^T(x, t)V_{xx}(x, t)g(x, t)],$$

其中

$$V_t = \frac{\partial V}{\partial t}, V_x = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_d} \right), V_{xx} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{d \times d}$$

根据Itô公式, 如果 $x(t) \in \mathbb{R}^d$, 则

$$dV(x(t), t) = \mathcal{L}V(x(t), t)dt + V_x(x(t), t)g(x(t), t)dW(t).$$

2. 主要结果

2.1. 全局正解的存在唯一性

在研究动态行为之前, 首要关注的是解是否存在全局性. 此外, 对于随机 SIR 模型, 还需考虑解

是否为非负. 因此, 在这部分内容中, 我们着重指出随机系统(1.2)的解是整体存在的且为非负.

定理 2.1.1. 集合 $\mathbb{D} = \left\{ (S, I, R) \in \mathbb{R}_+^3 : S > 0, I > 0, R > 0, 0 < S + I + R \leq \frac{A}{\rho} \right\}$ 是随机系统(1.2)的一个正不变集. 即若初始值 $X(0) = (S(0), I(0), R(0)) \in \mathbb{D}$, 则对任意 $t \geq 0$, 解 $X(t) = (S(t), I(t), R(t))$ 几乎必然满足 $X(t) \in \mathbb{D}$.

证明: 由系统(1.2)可得总人口 $S(t) + I(t) + R(t)$ 满足

$$d(S + I + R) = (A - \rho(S + I + R) - \vartheta I) dt \leq (A - \rho(S + I + R)) dt$$

和

$$S(t) + I(t) + R(t) \leq \frac{A}{\rho} + e^{-\rho t} (S(0) + I(0) + R(0)) \quad \forall t \geq 0, a.s..$$

从而 $\limsup_{t \rightarrow \infty} (S(t) + I(t) + R(t)) \leq \frac{A}{\rho}$, 对于任意的 $s \in [0, t]$, 有 $S(s), I(s), R(s) \in \left(0, \frac{A}{\rho}\right)$, $a.s..$

因此, 该集合

$$\mathbb{D} = \left\{ (S, I, R) \in \mathbb{R}_+^3 : S > 0, I > 0, R > 0, 0 < S + I + R \leq \frac{A}{\rho} \right\}$$

是随机系统(1.2)的一个正不变集. 故我们总是假设 $X_0 = X(0) = (S(0), I(0), R(0)) \in \mathbb{D}$.

我们通过运用李雅普诺夫方法证明方程(1.2)的解是正的且全局存在.

定理 2.1.2 对于任意初始条件 $X_0 = X(0) \in \mathbb{D}$, 随机系统(1.2) 在 $t \geq 0$ 上存在唯一解 $X_t = X(t)$, 且该解几乎必然保持在 $\mathbb{D}$ 内, 即 $X(t) = (S(t), I(t), R(t)) \in \mathbb{D}, \forall t \geq 0, a.s.$

证明: 设 $X_0 = X(0) \in \mathbb{D}$, 由于随机系统(1.2)的系数是局部 Lipschitz 连续的, 则对任意给定的初始值 $X_0 = X(0) \in \mathbb{D}$, 在 $t \in [0, \tau_e)$ 存在唯一的局部解 $X(t) = (S(t), I(t), R(t))$, 其中 τ_e 是爆炸时间 [16]. 为证明解是全局的且保持正性, 只需证明 $\tau_e = \infty$ $a.s.$ 且永不触及边界. 下面分两步进行论证.

定义停时

$$\tau_1^* = \inf\{t \in [0, \tau_e) : S(t) \leq 0 \text{ 或 } I(t) \leq 0 \text{ 或 } R(t) \leq 0\}.$$

采用标准格式 $\inf \phi = \infty$, 其中 ϕ 表示空集. 显然 $\tau^* \leq \tau_e$; 若能证明 $\tau_1^* \leq \tau_e$; $a.s.$ 则 $\tau_e = \infty$ 且 $X(t) \in \mathbb{D}, \forall t \geq 0$.

假设 $\tau_1^* < \infty$, 则存在一个 $T > 0$ 使得 $\mathbb{P}(\tau^* < T) > 0$.

为验证随机系统解的全局正性, 需要排除解在有限时间内趋近边界的可能性. 因此, 选取包含各状态变量对数项的 Lyapunov 函数 V_1 , 利用其在变量趋近于零时趋向负无穷的性质, 对解的非爆破性和正性进行刻画. 该函数能够有效反映易感者、感染者和恢复者三个状态变量同时保持正值的约束条件.

考虑 Lyapunov 函数 $V_1: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}, V_1(S, I, R) = \ln(SIR)$.

$$dV_1(S, I, R) = \ln(SIR) = \ln S + \ln I + \ln R. \quad (2.1)$$

由Itô公式 [17], 我们得到 $\omega \in (\tau_1^* < T)$, 且 $\forall t \in [0, \tau^*)$

$$dV_1 = \mathcal{L}V_1 dt + \left(\frac{\sigma(S-I)}{1+\alpha_1 S + \alpha_2 I} \right) dW(t), \quad (2.2)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V_1(S, I, R) = & \frac{1}{S} \left(A - \rho S - \frac{\beta SI}{1+\alpha_1 S + \alpha_2 I} \right) + \frac{1}{R} \left(\mu I + \frac{rI}{1+\alpha I} - \rho R \right) \\ & + \frac{1}{I} \left(\frac{\beta SI}{1+\alpha_1 S + \alpha_2 I} - (\rho + \vartheta + \mu)I - \frac{rI}{1+\alpha I} \right) - \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 S^2 I^2}{(1+\alpha_1 S + \alpha_2 I)^2} \frac{1}{S^2} \\ & - \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 S^2 I^2}{(1+\alpha_1 S + \alpha_2 I)^2} \frac{1}{I^2}. \end{aligned}$$

进一步合并同类项可得: $-\frac{\beta I}{1+\alpha_1 S + \alpha_2 I} + \frac{\beta S}{1+\alpha_1 S + \alpha_2 I} = \frac{\beta(S-I)}{1+\alpha_1 S + \alpha_2 I}$, 且三个自然死亡项满足: $-\rho - \rho - \rho = -3\rho$.

因此,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V_1(S, I, R) = & \frac{A}{S} + \frac{\beta(S-I)}{1+\alpha_1 S + \alpha_2 I} - 3\rho - (\vartheta + \mu) - \frac{r}{1+\alpha I} + \frac{\mu I}{R} + \frac{rI}{R(1+\alpha I)} \\ & - \frac{\sigma^2(S^2 + I^2)}{2(1+\alpha_1 S + \alpha_2 I)^2}. \end{aligned}$$

在区域 $\mathbb{D}$ 中, 由 $S, I, R \leq \frac{A}{\rho}$ 且 $1+\alpha_1 S + \alpha_2 I \geq 1$, 则我们应用

$$\frac{I}{1+\alpha_1 S + \alpha_2 I} \leq \frac{A}{\rho}, \quad \frac{S^2}{(1+\alpha_1 S + \alpha_2 I)^2} \leq \left(\frac{A}{\rho} \right)^2, \quad \frac{I^2}{(1+\alpha_1 S + \alpha_2 I)^2} \leq \left(\frac{A}{\rho} \right)^2,$$

有

$$\mathcal{L}V_1(S, I, R) \geq -3\rho - (\vartheta + \mu) - \beta \frac{A}{\rho} - r - \sigma^2 \left(\frac{A}{\rho} \right)^2 =: g. \quad (2.3)$$

因此,

$$dV_1 \geq g dt + \frac{\sigma(S-I)}{1+\alpha_1 S + \alpha_2 I} dW(t). \quad (2.4)$$

对式(2.4)从 0 到 t 进行积分, 可得

$$V_1(S(t), I(t), R(t)) \geq V_1(S(0), I(0), R(0)) + gt + \sigma \int_0^t \frac{S-I}{1+\alpha_1 S + \alpha_2 I} dW(s). \quad (2.5)$$

若某些分量趋于 0, 则 $\lim_{t \rightarrow \tau_1^*} V_1(X(t)) = -\infty$.

令 $t \rightarrow \tau_1^*$, 有

$$-\infty \geq V_1(X(0)) + g\tau_1^* + \sigma \int_0^{\tau_1^*} \frac{S-I}{1+\alpha_1 S + \alpha_2 I} dW(s) > -\infty,$$

这与假设形成对比. 因此 $\tau_e = \infty$ a.s., 解全局存在且保持正性.

设 $X_0 = X(0) \in \mathbb{D}$. N 为足够大的正整数, 注意到有界集 $\left(\frac{1}{N}, \frac{A}{\rho}\right]$ 包含每个 X_0 的隔室, 对每个整数 $n \geq N$,

定义停时

$$\tau_n = \inf \left\{ t > 0 : X(t) \in \mathbb{D} \text{ 且 } S(t) \notin \left(\frac{1}{n}, \frac{A}{\rho}\right] \text{ 或 } I(t) \notin \left(\frac{1}{n}, \frac{A}{\rho}\right] \text{ 或 } R(t) \notin \left(\frac{1}{n}, \frac{A}{\rho}\right] \right\},$$

$$\tau_2^* = \inf \{ t > 0 : X(t) \notin \mathbb{D} \}.$$

我们需要确认 $\mathbb{P}(\tau_2^* = \infty) = 1$, 即 $\forall t > 0$, 有 $\mathbb{P}(\tau_2^* < t) = 0$.

显然, $\mathbb{P}(\tau_2^* < t) \leq \mathbb{P}(\tau_n < t)$. 因此只需证明 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\tau_n < t) = 0$.

尽管前述分析保证了解保持正性, 但仍需进一步证明系统轨迹不会离开正向区域. 因此, 构造倒数型 Lyapunov 函数 V_2 , 利用其在状态变量接近边界时趋于无穷大的特性, 建立边界排斥条件, 从而证明随机系统解始终保持在定义域内部.

考虑 Lyapunov 函数:

$$V_2(S, I, R) = \frac{1}{S} + \frac{1}{I} + \frac{1}{R}. \quad (2.6)$$

应用Itô公式, 可得

$$\begin{aligned} dV_2(S, I, R) = & \left(-\frac{A}{S^2} + \frac{\rho}{S} + \frac{\beta I}{S(1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I)} + \frac{\sigma^2 I^2}{S(1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I)^2} \right) ds \\ & + \left(\frac{-\beta S}{I(1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I)} + \frac{\rho + \vartheta + \mu}{I} + \frac{r}{I(1 + \alpha I)} + \frac{\sigma^2 s^2}{I(1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I)^2} \right) ds \\ & + \left(-\left(\mu + \frac{r}{1 + \alpha I} \right) \frac{I}{R^2} + \frac{\rho}{R} \right) ds + \frac{\sigma I}{S(1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I)} dW(s) \\ & - \frac{\sigma S}{I(1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I)} dW(s). \end{aligned}$$

在区域 $\mathbb{D}$ 中, 由 $S, I, R \leq \frac{A}{\rho}$ 且 $1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I \geq 1$, 则我们利用

$$\frac{\rho}{S} \leq \rho V_2, \quad \frac{\beta I}{S(1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I)} \leq \frac{\beta A}{\rho S} \leq \frac{\beta A}{\rho} V_2, \quad \frac{\sigma^2 I^2}{S(1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I)^2} \leq \frac{\sigma^2 A^2}{\rho^2 S} \leq \frac{\sigma^2 A^2}{\rho^2} V_2, \quad \frac{\sigma^2 s^2}{I(1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I)^2} \leq \frac{\sigma^2 A^2}{\rho^2 I} \leq \frac{\sigma^2 A^2}{\rho^2} V_2,$$

$$\begin{aligned} dV_2 \leq & \left(\frac{\rho}{S} + \frac{\beta I}{S(1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I)} + \frac{\sigma^2 I^2}{S(1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I)^2} \right) ds \\ & + \left(\frac{\rho + \vartheta + \mu}{I} + \frac{r}{I(1 + \alpha I)} + \frac{\sigma^2 s^2}{I(1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I)^2} \right) ds + \left(\frac{\rho}{R} \right) ds \\ & + \frac{\sigma I}{S(1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I)} dW(s) - \frac{\sigma S}{I(1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I)} dW(s) \\ \leq & \left((3\rho + \vartheta + \mu + r) + \frac{\beta A}{\rho} + \frac{2\sigma^2 A^2}{\rho^2} \right) V_2 ds \\ & + \left(\frac{\sigma I}{S(1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I)} - \frac{\sigma S}{I(1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I)} \right) dW(s). \end{aligned}$$

令 $\eta = (3\rho + \vartheta + \mu + r) + \frac{\beta A}{\rho} + \frac{2\sigma^2 A^2}{\rho^2}$, 则

$$dV_2(S, I, R) \leq \eta V_2(S, I, R) ds + \left(\frac{\sigma I}{S(1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I)} - \frac{\sigma S}{I(1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I)} \right) dW(s). \quad (2.7)$$

对式(2.7)进行积分并取期望值, 再应用 Fubini's 定理 [18] 和 Gronwall's 不等式, 则

$$\forall s \in [0, t \wedge \tau_n], \mathbb{E}V_2(S, I, R) \leq V_2(S(0), I(0), R(0))e^{\eta s}, \text{ 有}$$

$$\mathbb{E}V_2((S, I, R)(t \wedge \tau_n)) \leq V_2(S(0), I(0), R(0))e^{\eta(t \wedge \tau_n)} \leq V_2(S(0), I(0), R(0))e^{\eta t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.8)$$

由于 $V_2((S, I, R)(t \wedge \tau_n)) > 0$ 且 $X(\tau_n)$ 的少数隔间小于或等于 $\frac{1}{n}$, 则

$$\mathbb{E}V_2((S, I, R)(t \wedge \tau_n)) \geq \mathbb{E}[V_2((S, I, R)(\tau_n))\chi_{\{\tau_n < t\}}] \geq n\mathbb{P}(\tau_n < t). \quad (2.9)$$

结合不等式(2.8)和(2.9), 得到 $\forall t \geq 0, \mathbb{P}(\tau_n < t) \leq \frac{V_2(S(0), I(0), R(0))e^{\eta t}}{n}$.

因此, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\tau_n < t) = 0$, 从而证明完毕.

2.2. 持续性

定义2.2.1. 若随机系统(1.2)满足

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t S(s)ds > 0, \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I(s)ds > 0, \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t R(s)ds > 0.$$

则称其在均值意义下是持久的. 其中 $(S(t), I(t), R(t))$ 是随机系统的任意正解.

令

$$\tilde{\mathcal{R}}_0 = \frac{\beta A}{(\rho + \alpha_1 A)(\rho + \vartheta + \mu + r)} - \frac{\sigma^2 A^2}{2(\rho + \alpha_1 A)^2(\rho + \vartheta + \mu + r)}$$

定理2.2.2. [19] 设 $f \in \mathcal{C}([0, \infty) \times \Omega; (0, \infty))$.

(i) 若存在正常数 l_0, l_1 使得对所有 $t \geq 0$, 有

$$\ln f(t) \geq l_1 t - l_0 \int_a^t f(s)ds + F(t), \quad a.s. \quad \forall t \geq 0,$$

其中 $F \in \mathcal{C}([0, \infty) \times \Omega; \mathbb{R})$ 且 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{F(t)}{t} = 0, a.s.$, 则

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(s)ds \geq \frac{l_1}{l_0}, \quad a.s.;$$

(ii) 若存在正常数 l_0, l_1 使得对所有 $t \geq 0$, 有

$$\ln f(t) \leq l_1 t - l_0 \int_0^t f(s)ds + F(t), \quad a.s. \quad \forall t \geq 0,$$

其中 $F \in \mathcal{C}([0, \infty) \times \Omega; \mathbb{R})$ 且 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{F(t)}{t} = 0$, a.s., 则

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds \leq \frac{l_1}{l_0}, \text{ a.s..}$$

定理2.2.3. 若修正的基本再生数 $\tilde{\mathcal{R}}_0 > 1$, 那么对任意初始值 $X(0) \in \mathbb{D}$, 随机系统(1.2)的解 $X(t)$ 满足以下性质:

$$(i) \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t S(\tau) d\tau \geq \frac{A\rho}{\rho^2 + \lambda A}, \text{ a.s..}$$

$$(ii) \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I(\tau) d\tau \geq \frac{(\tilde{\mathcal{R}}_0 - 1)(\rho + \vartheta + \mu + r)}{\frac{\beta}{\rho}(\rho + \vartheta + \mu + r) + \alpha_2(\rho + \vartheta + \mu + r)}, \text{ a.s..}$$

$$(iii) \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t R(\tau) d\tau \geq \frac{1}{\rho} \left(\mu + \frac{r\rho}{\rho + \alpha A} \right) \cdot \frac{(\tilde{\mathcal{R}}_0 - 1)(\rho + \vartheta + \mu + r)}{\frac{\beta}{\rho}(\rho + \vartheta + \mu + r) + \alpha_2(\rho + \vartheta + \mu + r)}, \text{ a.s..}$$

证明:(i) 根据定理2.1, 考虑 $I(t) \leq \frac{A}{\rho}$ 和 $\frac{-1}{1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I} \geq -1$.

由随机系统(1.2)的第一个方程可知

$$\begin{aligned} dS(t) &= \left(A - \rho S - \frac{\beta SI}{1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I} \right) dt - \frac{\sigma SI}{1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I} dW(t) \\ &\geq \left(A - \rho S(t) - \beta S(t) \frac{A}{\rho} \right) dt - \sigma S(t) \frac{A}{\rho} dW(t). \end{aligned} \quad (2.10)$$

对式(2.10)进行积分, 并将两边同时除以 t , 我们得到

$$\begin{aligned} \frac{S(t) - S(0)}{t} &\geq A - \left(\rho + \frac{\beta A}{\rho} \right) \cdot \frac{1}{t} \int_0^t S(\tau) d\tau - \frac{\sigma A}{\rho} \cdot \frac{1}{t} \int_0^t S(\tau) dW(\tau), \\ \left(\rho + \frac{\beta A}{\rho} \right) \cdot \frac{1}{t} \int_0^t S(\tau) d\tau &\geq A - \frac{S(t) - S(0)}{t} - \frac{A}{\rho} \cdot \frac{M(t)}{t}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

其中 $M(t)$ 是一局部鞅, $M(t) = \sigma \int_0^t S(\tau) dW(\tau)$, $M(0) = 0$.

此外,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle M(t), M(t) \rangle}{t} \leq \frac{\sigma^2 A^2}{\rho^2} < +\infty.$$

根据强大数定律 [20], 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M(t)}{t} = 0$, a.s..

对(2.11)式两边取下极限

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t S(\tau) d\tau \geq \frac{A\rho}{\rho^2 + \beta A}.$$

(ii) 将(1.1)中的第一个方程和第二个方程相加且从 0 到 t 进行积分, 并将等式两边同时除以 t , 有

$$\begin{aligned} \frac{S(t) - S(0)}{t} + \frac{I(t) - I(0)}{t} &= A - \frac{\rho}{t} \int_0^t S(\tau) d\tau - \frac{1}{t} \int_0^t \left(\rho + \vartheta + \mu + \frac{r}{1 + \alpha I(\tau)} \right) I(\tau) d\tau, \\ \frac{S(t) - S(0)}{t} + \frac{I(t) - I(0)}{t} &\geq A - \frac{\rho}{t} \int_0^t S(\tau) d\tau - (\rho + \vartheta + \mu + r) \frac{1}{t} \int_0^t I(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\rho}{t} \int_0^t S(\tau) d\tau &\geq A - (\rho + \vartheta + \mu + r) \frac{1}{t} I(\tau) d\tau - \frac{S(t) - S(0)}{t} - \frac{I(t) - I(0)}{t}, \\ \frac{1}{t} \int_0^t S(\tau) d\tau &\geq \frac{A}{\rho} - \frac{\rho + \vartheta + \mu + r}{\rho} \cdot \frac{1}{t} \int_0^t I(\tau) d\tau + \Phi(t),\end{aligned}\quad (2.12)$$

其中 $\Phi(t) = \frac{-1}{\rho t} \left(\frac{S(t) - S(0)}{t} + \frac{I(t) - I(0)}{t} \right)$.

令 $V(I) = \ln I + \alpha_2 I$, 由 Itô 公式, 得到

$$\begin{aligned}dV &= \left(\frac{1}{I} + \alpha_2 \right) \left(\frac{\beta SI}{1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I} - (\rho + \vartheta + \mu) I - \frac{rI}{1 + \alpha I} \right) dt \\ &\quad + \left(\frac{1}{I} + \alpha_2 \right) \left(\frac{\sigma SI}{1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I} \right) dW(t) - \frac{1}{2I^2} \left(\frac{\sigma SI}{1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I} \right)^2 dt \\ &\geq \left(\frac{\beta S}{1 + \alpha_1 \frac{A}{\rho} + \alpha_2 \frac{A}{\rho}} - (\rho + \vartheta + \mu + r) - \alpha_2 I (\rho + \vartheta + \mu + r) - \frac{\sigma^2 A^2}{2(\rho + \alpha_1 A)^2} \right) dt \\ &\quad + \sigma S \frac{1}{1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I} dW(t).\end{aligned}\quad (2.13)$$

对式(2.13)从 0 到 t 进行积分, 并将两边同时除以 t

$$\begin{aligned}\frac{\ln I(t) - \ln I(0)}{t} + \frac{\alpha_2 I(t) - \alpha_2 I(0)}{t} &\geq \frac{1}{t} \int_0^t \frac{\beta S}{1 + \alpha_1 \frac{A}{\rho} + \alpha_2 \frac{A}{\rho}} ds - \frac{\sigma^2 A^2}{2(\rho + \alpha_1 A)^2} \\ &\quad - (\rho + \vartheta + \mu + r) - \frac{1}{t} \alpha_2 (\rho + \vartheta + \mu + r) \int_0^t I ds \\ &\quad + \frac{1}{t} \int_0^t \sigma S \left(\frac{1}{1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I} \right) dW(s).\end{aligned}\quad (2.14)$$

两边取下极限可得

$$\begin{aligned}\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I ds &\geq \frac{1}{\alpha_2 (\rho + \vartheta + \mu + r)} \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{\beta S}{1 + \alpha_1 \frac{A}{\rho} + \alpha_2 \frac{A}{\rho}} ds \right) \\ &\quad - \frac{1}{\alpha_2 (\rho + \vartheta + \mu + r)} \left((\rho + \vartheta + \mu + r) + \frac{\sigma^2 A^2}{2(\rho + \alpha_1 A)^2} \right).\end{aligned}$$

故

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I(\tau) d\tau \geq \frac{(\tilde{\mathcal{R}}_0 - 1)(\rho + \vartheta + \mu + r)}{\frac{\beta}{\rho}(\rho + \vartheta + \mu + r) + \alpha_2(\rho + \vartheta + \mu + r)} = \frac{\tilde{\mathcal{R}}_0 - 1}{\frac{\beta}{\rho} + \alpha_2}.\quad (2.15)$$

(iii) 最后, 对于随机系统(1.1)的最后一个方程, 我们有

$$dR(t) = \left(\mu I(t) + \frac{rI(t)}{1 + \alpha I(t)} - \rho R \right) dt.\quad (2.16)$$

对式(2.16)进行积分, 并将两边同时除以 t , 有

$$\frac{R(t) - R(0)}{t} \geq \left(\mu + \frac{r\rho}{\rho + \alpha A} \right) \frac{1}{t} \int_0^t I(\tau) d\tau - \rho \frac{1}{t} \int_0^t R(\tau) d\tau,$$

$$\frac{1}{t} \int_0^t R(\tau) d\tau \geq \frac{1}{\rho} \left(\mu + \frac{r\rho}{\rho + \alpha A} \right) \frac{1}{t} \int_0^t I(\tau) d\tau - \frac{1}{\rho} \frac{R(t) - R(0)}{t}. \quad (2.17)$$

对式(2.17)两边取下极限可得,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t R(\tau) d\tau \geq \frac{1}{\rho} \left(\mu + \frac{r\rho}{\rho + \alpha A} \right) \cdot \frac{(\tilde{\mathcal{R}}_0 - 1)(\rho + \vartheta + \mu + r)}{\frac{\beta}{\rho}(\rho + \vartheta + \mu + r) + \alpha_2(\rho + \vartheta + \mu + r)}, \text{ a.s..}$$

2.3. 灭绝性

定理2.3.1. 对于随机系统(1.2)的解 $X(t)$, 其初始值为 $X(0) \in \mathbb{D}$. 若 $\frac{\beta^2}{2\sigma^2} \leq \rho + \vartheta + \mu + \frac{r\rho}{\rho + \alpha A}$ 成立, 则感染人数 $I(t)$ 以指数形式几乎必然消失.

即

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{I(t)}{I(0)} \leq - \left(\rho + \vartheta + \mu + \frac{r\rho}{\rho + \alpha A} - \frac{\beta^2}{2\sigma^2} \right) < 0, \text{ a.s..}$$

证明: 根据Itô公式, 由于感染者状态变量满足随机微分方程:

$$dI = f_I(S, I)dt + \frac{\sigma SI}{1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I} dW(t), \quad (2.1)$$

对函数

$$V(I) = \ln I$$

应用 Itô 公式

$$d(\ln I) = \frac{1}{I} dI - \frac{1}{2I^2} (dI)^2.$$

其中二阶变差项为:

$$(dI)^2 = \frac{\sigma^2 S^2 I^2}{(1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I)^2} dt.$$

因此:

$$-\frac{1}{2I^2} (dI)^2 = -\frac{\sigma^2 S^2}{2(1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I)^2} dt.$$

即得到

$$\begin{aligned} d(\ln I(t)) &= \frac{1}{I} \left(\frac{\beta SI}{1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I} - (\rho + \vartheta + \mu)I - \frac{rI}{1 + \alpha I} - \frac{\sigma^2 S^2 I^3}{2I^2(1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I)^2} \right) dt \\ &\quad + \frac{1}{I} \left(\frac{\sigma SI}{1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I} \right) dW(t) \\ &= \left(\frac{\beta S}{1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I} - \left(\rho + \vartheta + \mu + \frac{r}{1 + \alpha I} \right) - \frac{\sigma^2 S^2}{2(1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I)^2} \right) dt \\ &\quad + \frac{\sigma S}{1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I} dW(t). \end{aligned} \quad (2.18)$$

对式(2.18)从 0 到 t 进行积分, 可得

$$\begin{aligned}\ln \frac{I(t)}{I(0)} &= \frac{-\sigma^2}{2} \int_0^t \left(\frac{S}{1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I} - \frac{\beta}{\sigma^2} \right)^2 d\tau + \int_0^t \frac{\beta^2}{2\sigma^2} d\tau - \int_0^t \left(\rho + \vartheta + \mu + \frac{r}{1 + \alpha I} \right) d\tau + M(t) \\ &\leq - \int_0^t \left(\rho + \vartheta + \mu + \frac{r\rho}{\rho + \alpha A} - \frac{\beta^2}{2\sigma^2} \right) d\tau + M(t) \\ &= - \left(\rho + \vartheta + \mu + \frac{r\rho}{\rho + \alpha A} - \frac{\beta^2}{2\sigma^2} \right) t + M(t).\end{aligned}\quad (2.19)$$

对式(2.19)两边同除以 t , 有 $\frac{1}{t} \ln \frac{I(t)}{I(0)} \leq - \left(\rho + \vartheta + \mu + \frac{r\rho}{\rho + \alpha A} - \frac{\beta^2}{2\sigma^2} \right) + \frac{M(t)}{t}$,

其中 $M(t) = \int_0^t \frac{\sigma S}{1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I} dW(t)$ 是一局部鞅且 $M(0) = 0$.

此外, $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle M(t), M(t) \rangle}{t} \leq \frac{\sigma^2 A^2}{\rho^2} < +\infty$. 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M(t)}{t} = 0$, a.s..

对(2.19)式两边取上极限可得,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{I(t)}{I(0)} \leq - \left(\rho + \vartheta + \mu + \frac{r\rho}{\rho + \alpha A} - \frac{\beta^2}{2\sigma^2} \right) < 0, \quad \text{a.s.},$$

这意味着 $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$, a.s..

2.4. 围绕无病平衡点的渐近行为

针对无病平衡态, 已对其不同类型的稳定性进行了研究. 随机渐近稳定性描述了系统样本路径在概率意义下接近平衡态时的渐近行为, 并强调了几乎必然的行为. 对于无病平衡态 E_0 , 可以利用 Lyapunov 函数给出其全局随机渐近稳定的充分条件. 现在, 可以对随机模型(1.2)的无病平衡态 E_0 的渐近行为进行研究.

定理 2.4.1. 对于随机系统(1.2), 如果基本再生数 $\mathcal{R}_0 \leq 1$, 则无病平衡点 E_0 是几乎必然渐近稳定的.

证明: 首先, 令变量 $u = S - \frac{A}{\rho}$, $\nu = I$, $\omega = R$, 则随机系统(1.2)可写为

$$\begin{aligned}du &= \left(-\rho u - \frac{\beta(u + \frac{A}{\rho})v}{1 + \alpha_1(u + \frac{A}{\rho}) + \alpha_2 v} \right) dt - \frac{\sigma(u + \frac{A}{\rho})v}{1 + \alpha_1(u + \frac{A}{\rho}) + \alpha_2 v} dW(t), \\ d\nu &= \frac{\beta uv}{1 + \alpha_1(u + \frac{A}{\rho}) + \alpha_2 v} dt - v \left(\rho + \vartheta + \mu + \frac{r}{1 + \alpha v} - \frac{\beta \frac{A}{\rho}}{1 + \alpha_1(u + \frac{A}{\rho}) + \alpha_2 v} \right) dt \\ &\quad + \frac{\sigma(u + \frac{A}{\rho})v}{1 + \alpha_1(u + \frac{A}{\rho}) + \alpha_2 v} dW(t), \\ d\omega &= \left(\mu v + \frac{rv}{1 + \alpha v} - \rho \omega \right) dt.\end{aligned}\quad (2.20)$$

其中 $u \in R$, ν, w 为正数.

为研究无病平衡点附近系统状态的渐近稳定性, 将系统变量转换为相对于平衡点的偏差变量, 并构造包含状态偏差二次项以及线性修正项的 Lyapunov 函数 V_3 , 其中二次项用于衡量系统偏离平

衡点的程度, 而线性组合项用于抵消模型中感染传播和恢复过程产生的耦合项, 从而便于获得负定的 Lyapunov 导数.

令 Lyapunov 函数:

$$V_3 = (u + v)^2 + c_1 v + c_2 w, \quad (2.21)$$

其中 c_1 和 c_2 是待定的正常数. 然后应用 Itô 公式, 计算生成元

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V_3 = & 2(u + v) \left(-\rho u - \left(\rho + \vartheta + \mu + \frac{r}{1 + \alpha v} \right) v \right) + c_1 \frac{\beta uv}{1 + \alpha_1(u + \frac{A}{\rho}) + \alpha_2 v} \\ & - c_1 \left(\rho + \vartheta + \mu + \frac{r}{1 + \alpha v} - \frac{\beta \frac{A}{\rho}}{1 + \alpha_1(u + \frac{A}{\rho}) + \alpha_2 v} \right) v \\ & + c_2 \left(\mu v + \frac{rv}{1 + \alpha v} - \rho w \right) + \frac{1}{2} (2 - 4 + 2) \left(\frac{\sigma(u + \frac{A}{\rho})v}{1 + \alpha_1(u + \frac{A}{\rho}) + \alpha_2 v} \right)^2, \end{aligned} \quad (2.22)$$

整理得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V_3 \leq & -2\rho u^2 - 2 \left(\rho + \vartheta + \mu + \frac{r}{1 + \alpha v} \right) v^2 - c_2 \rho w + \left(c_1 \beta - 2 \left(2\rho + \vartheta + \mu + \frac{r}{1 + \alpha v} \right) \right) uv \\ & + \left(c_2 (\mu + r) - c_1 \left(\rho + \vartheta + \mu + \frac{r}{1 + \alpha v} - \beta \frac{A}{\rho} \right) \right) v \\ \leq & -2\rho u^2 - 2 \left(\rho + \vartheta + \mu + \frac{r\rho}{\rho + \alpha A} \right) v^2 - c_2 \rho w + \left(c_1 \beta - 2 \left(2\rho + \vartheta + \mu + \frac{r\rho}{\rho + \alpha A} \right) \right) uv \\ & + \left(c_2 (\mu + r) - c_1 \left(\rho + \vartheta + \mu + \frac{r\rho}{\rho + \alpha A} - \beta \frac{A}{\rho} \right) \right) v. \end{aligned} \quad (2.23)$$

令

$$c_1 = \frac{2 \left(2\rho + \vartheta + \mu + \frac{r\rho}{\rho + \alpha A} \right)}{\beta}, c_2 = \frac{c_1 \left(\rho + \vartheta + \mu + \frac{r}{1 + \alpha v} - \frac{\beta A}{\rho} \right)}{\mu + r},$$

若 $\mathcal{R}_0 = \frac{\beta A}{(\rho + \alpha_1 A)(\rho + \vartheta + \mu + r)} < 1$, 则 $c_2 > 0$, 且

$$\mathcal{L}V_3 \leq -2\rho u^2 - 2 \left(\rho + \vartheta + \mu + \frac{r\rho}{\rho + \alpha A} \right) v^2 - c_2 \rho w < 0.$$

即 $\mathcal{L}V_3$ 负定, 由 Lyapunov 稳定性定理, 无病平衡点 E_0 在 $\mathcal{R}_0 \leq 1$ 上几乎必然渐近稳定.

2.5. 矩指数稳定性

定义 2.5.1. [21] 若随机系统(1.2)的平凡解满足存在函数 $V(x, t) \in \mathcal{C}^{2,1}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}_+)$ 以及正数 p, c_3, c_4 和 c_5 , 使得对任意的 $x \in \mathbb{D} \subset \mathbb{R}_+^d$, 有:

$$c_3 |x|^p \leq V(t, x) \leq c_4 |x|^p, \quad \mathcal{L}V(t, x) \leq -c_5 |x|^p, \quad t \geq 0 \quad (2.24)$$

则称该平凡解是 p 阶矩指数稳定的. 当 $p = 2$ 时, 它是均方指数稳定的, 且平衡点 $x = 0$ 是全局渐近稳定的.

根据 Young's 不等式 [22], 即对于 $x, y > 0$, 有 $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$ 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

引理 2.5.2. [23] 设 $p \geq 2$ 且 $\varepsilon, x, y > 0$, 则

$$x^{p-1}y \leq \frac{(p-1)\varepsilon}{p}x^p + \frac{1}{p\varepsilon^{p-1}}y^p, \quad x^{p-2}y^2 \leq \frac{(p-2)\varepsilon}{p}x^p + \frac{2}{p\varepsilon^{\frac{p-2}{2}}}y^p. \quad (2.25)$$

定理 2.5.3. 考虑随机系统(1.2), 假设 $\mathcal{R}_0 < 1$ 且噪声强度满足: $\frac{1}{2}(p-1)\sigma^2\left(\frac{A}{\rho}\right)^2 < (\rho + \vartheta + \mu + r)(1 - \mathcal{R}_0)$, 那么对任意的 $p \geq 2$, 无病平衡点 E_0 是 p 阶矩指数稳定的.

证明:为进一步分析系统随机扰动下的稳定性能, 引入高阶矩 Lyapunov 函数 V_4 , 该函数通过构造各状态变量偏离无病平衡状态的 p 阶项, 能够描述系统状态的高阶统计特征, 并结合 Itô 公式建立随机系统的 p 阶矩指数稳定条件.

构造 Lyapunov 函数:

$$V_4 = \left(\frac{A}{\rho} - S\right)^p + \frac{1}{p}I^p + R^p. \quad (2.26)$$

对 V_4 应用 Itô 公式, 我们得到

$$dV_4 = \mathcal{L}V_4 dt + p\sigma\left(\frac{A}{\rho} - S\right)^{p-1} \frac{SI}{1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I} dW(t) + \frac{p\sigma SI^p}{1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I} dW(t),$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V_4 = & -p\left(\frac{A}{\rho} - S\right)^{p-1} \left(\rho\left(\frac{A}{\rho} - S\right) - \frac{\beta SI}{1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I}\right) \\ & + p(p-1)\left(\frac{A}{\rho} - S\right)^{p-2} \frac{\sigma^2 S^2 I^2}{2(1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I)^2} - (\rho + \vartheta + \mu)I^p + \frac{\beta SI^p}{1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I} - \frac{rI^p}{1 + \alpha I} \\ & + (p-1)\frac{\sigma^2 S^2 I^2 I^{p-2}}{2(1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I)^2} + p\mu IR^{p-1} + \frac{prI}{1 + \alpha I} R^{p-1} - p\rho R^p. \end{aligned}$$

利用有界性放缩: 在 $\mathbb{D}$ 中, 有 $S, I, R \leq \frac{A}{\rho}$, $\frac{1}{1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I} \leq 1$, 则

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V_4 \leq & -p\rho\left(\frac{A}{\rho} - S\right)^p + p\beta\frac{A}{\rho}I\left(\frac{A}{\rho} - S\right)^{p-1} + \frac{p-1}{2}\sigma^2\left(\frac{A}{\rho}\right)^2 I^p + p(\mu + r)IR^{p-1} - p\rho R^p \\ & + \frac{p(p-1)}{2}\sigma^2\left(\frac{A}{\rho}\right)^2 I^2\left(\frac{A}{\rho} - S\right)^{p-2} - (\rho + \vartheta + \mu)I^p + \beta\frac{A}{\rho}I^p - \frac{rI^p}{1 + \alpha I} \\ \leq & -p\rho\left(\frac{A}{\rho} - S\right)^p - \left(\rho + \vartheta + \mu - \beta\frac{A}{\rho} + \frac{r}{1 + \alpha I} - \frac{(p-1)}{2}\sigma^2\left(\frac{A}{\rho}\right)^2\right) I^p \\ & - p\rho R^p + p\beta\frac{A}{\rho}I\left(\frac{A}{\rho} - S\right)^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2}\sigma^2\left(\frac{A}{\rho}\right)^2 I^2\left(\frac{A}{\rho} - S\right)^{p-2} + p(\mu + r)IR^{p-1}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

令 $x = \frac{A}{\rho} - S$, $y = I$, 由引理2.5.2可得

$$x^{p-1}I \leq \frac{(p-1)\delta}{p}x^p + \frac{1}{p\delta^{p-1}}y^p, y^2x^{p-2} \leq \frac{(p-2)\delta}{p}x^p + \frac{2}{p\delta^{\frac{p-2}{2}}}y^p, R^{p-1}I \leq \frac{(p-1)\delta}{p}R^p + \frac{1}{p\delta^{p-1}}I^p.$$

代入整理:

$$\mathcal{L}V_4 \leq -a_1 \left(\frac{A}{\rho} - S \right)^p - a_2 I^p - a_3 R^p \quad (2.28)$$

其中

$$\begin{aligned} a_1 &= p\rho - \beta \frac{A}{\rho} (p-1)\delta - \frac{(p-1)(p-2)\sigma^2}{2} \left(\frac{A}{\rho} \right)^2 \delta, \\ a_2 &= (\rho + \vartheta + \mu + r)(1 - \mathcal{R}_0) - \frac{(p-1)}{2} \sigma^2 \left(\frac{A}{\rho} \right)^2 - \beta \frac{A}{\rho} \delta^{1-p} - (p-1) \sigma^2 \left(\frac{A}{\rho} \right)^2 \delta^{\frac{2-p}{2}} - (\mu + r) \delta^{1-p}, \\ a_3 &= p\rho - (\mu + r)(p-1)\delta. \end{aligned}$$

可选取足够小的 δ , 使 $a_1, a_2, a_3 > 0$, 结合定义2.5.1得证.

2.6. 围绕地方病平衡点的随机模型的渐近行为

随机系统(1.2)的轨迹在确定性系统(1.1)的流行病平衡点附近的渐近行为. 进行此类分析是为了解确定性系统中噪声的出现如何使确定性系统偏离流行病平衡点, 以及表征随机样本路径与确定性系统(1.1)的流行病平衡点之间的平均距离. 因此, 我们研究了随机模型(1.2) 的解在唯一流行病平衡点附近的随机扰动的渐近行为.

定理 2.6.1. 如果 $\mathcal{R}_0 = \frac{\beta A}{(\rho + \alpha_1 A)(\rho + \vartheta + \mu + r)} > 1$, 且存在正常数 $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$, 使得以下条件成立:

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \rho - \frac{r\alpha A}{2\rho(1 + \alpha I^*)} > 0, \\ \zeta_2 &= \rho + \vartheta + \frac{r\rho}{(\rho + \alpha A)(1 + \alpha I^*)} - \frac{r(\mathcal{B}\alpha + 1)}{1 + \alpha I^*} - \frac{r\alpha A}{2\rho(1 + \alpha I^*)} > 0, \\ \zeta_3 &= 2\rho - \mu - \frac{r}{1 + \alpha I^*} > 0. \end{aligned}$$

则对于任意初始值 $X(0) \in \mathbb{D}$, 随机系统(1.2)的解满足:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \mathbb{E} \int_0^t \left\{ (S(\tau) - S^*)^2 + (I(\tau) - I^*)^2 + (R(\tau) - R^*)^2 \right\} d\tau \leq \frac{\mathbb{H}}{\zeta},$$

其中 $\mathbb{H} = \frac{\mathcal{B}I^*\sigma^2 A^2}{2\rho^2}$ 且 $\zeta = \min\{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\}$.

证明: 当模型(1.1)存在正平衡点时, 有

$$A = \rho S^* + \frac{\beta S^* I^*}{1 + \alpha_1 S^* + \alpha_2 I^*}, \frac{\beta S^* I^*}{1 + \alpha_1 S^* + \alpha_2 I^*} = (\rho + \vartheta + \mu) I^* + \frac{r I^*}{1 + \alpha I^*}, \mu I^* + \frac{r I^*}{1 + \alpha I^*} = \rho R^*. \quad (2.29)$$

构造如下 Lyapunov 函数:

$$V_5(S(t), I(t), R(t)) = \frac{1}{2}(S - S^* + I - I^*)^2 + \mathcal{B}(I - I^* - I^* \ln \frac{I}{I^*}) + \frac{1}{2}(R - R^*)^2. \quad (2.30)$$

下面将(2.30)式分为三个函数,即 $V_5 = V_{51} + V_{52} + V_{53}$, 其中

$$V_{51} = \frac{1}{2}(S - S^* + I - I^*)^2, \quad V_{52} = \mathcal{B}(I - I^* - I^* \ln \frac{I}{I^*}), \quad V_{53} = \frac{1}{2}(R - R^*)^2.$$

记 $\mathcal{B} = \left(2\rho + \vartheta + \mu + \frac{r}{1+\alpha I^*}\right) \cdot \frac{1+\alpha_1 S^* + \alpha_2 I^*}{\beta}$ 是一个正的常数.

对 V_{51} 应用无穷小生成元 $\mathcal{L}V_{51}$, 有

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V_{51} &= (S - S^* + I - I^*) \left(A - \rho S - (\rho + \vartheta + \mu)I - \frac{rI}{1 + \alpha I} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V_{51}}{\partial S^2} - 2 \frac{\partial^2 V_{51}}{\partial S \partial I} + \frac{\partial^2 V_{51}}{\partial I^2} \right) \left(\frac{\sigma SI}{1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I} \right)^2 \\ &= (S - S^* + I - I^*) \left(A - \rho S - (\rho + \vartheta + \mu)I - \frac{rI}{1 + \alpha I} \right) + \frac{1}{2}(1 - 2 + 1) \left(\frac{\sigma SI}{1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I} \right)^2. \end{aligned}$$

用 $\rho S^* + (\rho + \vartheta + \mu)I^* + \frac{rI^*}{1+\alpha I^*}$ 替换 A , 得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V_{51} &= (S - S^* + I - I^*) \left(-\rho(S - S^*) - (\rho + \vartheta + \mu)(I - I^*) - r \left(\frac{I}{1 + \alpha I} - \frac{I^*}{1 + \alpha I^*} \right) \right) \\ &= -\rho(S - S^*)^2 - \left(\rho + \vartheta + \mu + \frac{r}{(1 + \alpha I)(1 + \alpha I^*)} \right) (I - I^*)^2 \\ &\quad - \left(2\rho + \vartheta + \mu + \frac{r}{(1 + \alpha I)(1 + \alpha I^*)} \right) (S - S^*)(I - I^*). \end{aligned} \quad (2.31)$$

我们计算

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V_{52} &= \frac{\mathcal{B}(I - I^*)}{I} \left(\frac{\beta SI}{1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I} - (\rho + \vartheta + \mu)I - \frac{rI}{1 + \alpha I} \right) + \frac{\mathcal{B}I^* \sigma^2 S^2 I^2}{2I^2(1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I)^2} \\ &= \mathcal{B}(I - I^*) \left(\frac{\beta S}{1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I} - (\rho + \vartheta + \mu) - \frac{r}{1 + \alpha I} \right) + \frac{\mathcal{B}I^* \sigma^2 S^2}{2(1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I)^2}. \end{aligned}$$

由(2.19)式可得 $(\rho + \vartheta + \mu) = \frac{\beta S^*}{1 + \alpha_1 S^* + \alpha_2 I^*} - \frac{r}{1 + \alpha I^*}$, 代入上式有

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V_{52} &= \mathcal{B}(I - I^*) \left(\frac{\beta S}{1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I} - \frac{\beta S^*}{1 + \alpha_1 S^* + \alpha_2 I^*} \right) + \mathcal{B}(I - I^*) \left(-\frac{r}{1 + \alpha I} + \frac{r}{1 + \alpha I^*} \right) \\ &\quad + \frac{\mathcal{B}I^* \sigma^2 S^2}{2(1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I)^2} \\ &= \mathcal{B}(I - I^*) \frac{\beta(S - S^*) + \beta\alpha_2(SI^* - S^*I)}{(1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I)(1 + \alpha_1 S^* + \alpha_2 I^*)} + \mathcal{B}(I - I^*) \frac{r\alpha(I - I^*)}{(1 + \alpha I)(1 + \alpha I^*)} \\ &\quad + \frac{\mathcal{B}I^* \sigma^2 S^2}{2(1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I)^2} \\ &= \mathcal{B}(I - I^*) \frac{\beta(S - S^*) + \beta\alpha_2(-S(I - I^*) + I(S - S^*))}{(1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I)(1 + \alpha_1 S^* + \alpha_2 I^*)} + \mathcal{B}(I - I^*) \frac{r\alpha(I - I^*)}{(1 + \alpha I)(1 + \alpha I^*)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\mathcal{B}I^*\sigma^2S^2}{2(1+\alpha_1S+\alpha_2I)^2} \\
= & \mathcal{B}(I-I^*)\frac{\beta(1+\alpha_2I)(S-S^*)-\beta\alpha_2S(I-I^*)}{(1+\alpha_1S+\alpha_2I)(1+\alpha_1S^*+\alpha_2I^*)} + \frac{r\alpha(I-I^*)}{(1+\alpha I)(1+\alpha I^*)} \\
& + \frac{\mathcal{B}I^*\sigma^2S^2}{2(1+\alpha_1S+\alpha_2I)^2} \\
= & \frac{\mathcal{B}\beta(1+\alpha_2I)(S-S^*)(I-I^*)}{(1+\alpha_1S+\alpha_2I)(1+\alpha_1S^*+\alpha_2I^*)} - \frac{\mathcal{B}\beta\alpha_2S(I-I^*)^2}{(1+\alpha_1S+\alpha_2I)(1+\alpha_1S^*+\alpha_2I^*)} \\
& + \frac{\mathcal{B}r\alpha(I-I^*)^2}{(1+\alpha I)(1+\alpha I^*)} + \frac{\mathcal{B}I^*\sigma^2S^2}{2(1+\alpha_1S+\alpha_2I)^2}, \\
\mathcal{L}V_{52} \leq & \frac{\mathcal{B}\beta(1+\alpha_2I)(S-S^*)(I-I^*)}{(1+\alpha_1S+\alpha_2I)(1+\alpha_1S^*+\alpha_2I^*)} + \frac{\mathcal{B}r\alpha(I-I^*)^2}{1+\alpha I^*} + \frac{\mathcal{B}I^*\sigma^2A^2}{2\rho^2} \\
\leq & \frac{\mathcal{B}\beta(S-S^*)(I-I^*)}{1+\alpha_1S^*+\alpha_2I^*} + \frac{\mathcal{B}r\alpha(I-I^*)^2}{1+\alpha I^*} + \frac{\mathcal{B}I^*\sigma^2A^2}{2\rho^2}.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

接下来我们计算

$$\mathcal{L}V_{53} = (R-R^*)\left(\mu I + \frac{rI}{1+\alpha I} - \rho R\right).$$

由(2.19)式可得 $\mu I^* + \frac{rI^*}{1+\alpha I^*} = \rho R^*$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}V_{53} &= (R-R^*)\left(\mu(I-I^*) + \frac{rI}{1+\alpha I} - \frac{rI^*}{1+\alpha I^*} - \rho(R-R^*)\right) \\
&= \left(\mu + \frac{r}{(1+\alpha I)(1+\alpha I^*)}\right)(I-I^*)(R-R^*) - \rho(R-R^*)^2.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

利用不等式 $2(x-x^*)(y-y^*) \leq (x-x^*)^2 + (y-y^*)^2$, 有

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}V_{53} &\leq \frac{1}{2}\left(\mu + \frac{r}{1+\alpha I^*}\right)(I-I^*)^2 + \frac{1}{2}\left(\mu + \frac{r}{1+\alpha I^*}\right)(R-R^*)^2 - \rho(R-R^*)^2 \\
&\leq \left(\mu + \frac{r}{1+\alpha I^*}\right)(I-I^*)^2 - \left(2\rho - \mu - \frac{r}{1+\alpha I^*}\right)(R-R^*)^2.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

故有 $\mathcal{L}V_5 = \mathcal{L}V_{51} + \mathcal{L}V_{52} + \mathcal{L}V_{53}$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}V_5 &\leq -\rho(S-S^*)^2 + \frac{r}{1+\alpha I^*} \cdot \left(1 - \frac{1}{1+\alpha I}\right) \cdot (S-S^*)(I-I^*) \\
&\quad - \left(\rho + \vartheta + \frac{r\rho}{(\rho+\alpha A)(1+\alpha I^*)} - \frac{r(\mathcal{B}\alpha+1)}{1+\alpha I^*}\right)(I-I^*)^2 - \left(2\rho - \mu - \frac{r}{1+\alpha I^*}\right)(R-R^*)^2 \\
&\quad + \frac{\mathcal{B}I^*\sigma^2A^2}{2\rho^2} \\
&\leq -\rho(S-S^*)^2 + \frac{r}{1+\alpha I^*} \cdot \frac{\alpha I}{1+\alpha I} \cdot \left(\frac{(S-S^*)^2}{2} + \frac{(I-I^*)^2}{2}\right) \\
&\quad - \left(\rho + \vartheta + \frac{r\rho}{(\rho+\alpha A)(1+\alpha I^*)} - \frac{r(\mathcal{B}\alpha+1)}{1+\alpha I^*}\right)(I-I^*)^2 - \left(2\rho - \mu - \frac{r}{1+\alpha I^*}\right)(R-R^*)^2 \\
&\quad + \frac{\mathcal{B}I^*\sigma^2A^2}{2\rho^2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}V_5 &\leq -\rho(S-S^*)^2 + \frac{r\alpha A}{2\rho(1+\alpha I^*)} \cdot ((S-S^*)^2 + (I-I^*)^2) \\
&\quad - \left(\rho + \vartheta + \frac{r\rho}{(\rho+\alpha A)(1+\alpha I^*)} - \frac{r(\mathcal{B}\alpha+1)}{1+\alpha I^*} \right) (I-I^*)^2 - \left(2\rho - \mu - \frac{r}{1+\alpha I^*} \right) (R-R^*)^2 \\
&\quad + \frac{\mathcal{B}I^*\sigma^2 A^2}{2\rho^2} \\
&= - \left(\rho - \frac{r\alpha A}{2\rho(1+\alpha I^*)} \right) (S-S^*)^2 \\
&\quad - \left(\rho + \vartheta + \frac{r\rho}{(\rho+\alpha A)(1+\alpha I^*)} - \frac{r(\mathcal{B}\alpha+1)}{1+\alpha I^*} - \frac{r\alpha A}{2\rho(1+\alpha I^*)} \right) (I-I^*)^2 \\
&\quad - \left(2\rho - \mu - \frac{r}{1+\alpha I^*} \right) (R-R^*)^2 + \frac{\mathcal{B}I^*\sigma^2 A^2}{2\rho^2}.
\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}V_5 \leq -\zeta_1(S-S^*)^2 - \zeta_2(I-I^*)^2 - \zeta_3(R-R^*)^2 + \mathbb{H},$$

其中 $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ 和 $\mathbb{H}$ 分别在定理2.6.1中定义, 故有

$$dV_5 = \mathcal{L}V_5 dt + \frac{\mathcal{B}\sigma S(I-I^*)}{1+\alpha_1 S + \alpha_2 I} dW(t),$$

$$dV_5 \leq \left(-\zeta_1(S-S^*)^2 - \zeta_2(I-I^*)^2 - \zeta_3(R-R^*)^2 + \mathbb{H} \right) dt + \frac{\mathcal{B}\sigma S(I-I^*)}{1+\alpha_1 S + \alpha_2 I} dW(t). \quad (2.35)$$

对式(2.35)从 0 到 t 进行积分, 可得

$$V_5(t) - V_5(0) \leq \int_0^t \left(-\zeta_1(S(\tau) - S^*)^2 - \zeta_2(I(\tau) - I^*)^2 - \zeta_3(R(\tau) - R^*)^2 \right) d\tau + \mathbb{H}t + M(t), \quad (2.36)$$

其中 $M(t) = \int_0^t \frac{\mathcal{B}\sigma S(I-I^*)}{1+\alpha_1 S + \alpha_2 I} dW(\tau)$ 是一局部鞅, 此鞅 $M(t)$ 的二次变差为

$$\langle M, M \rangle_t = \int_0^t \frac{\mathcal{B}^2 \sigma^2 \left(\frac{A}{\rho} \right)^2 (I-I^*)^2}{(1+\alpha_1 S + \alpha_2 I)^2} d\tau \leq \mathcal{B}^2 \sigma^2 \left(\frac{A}{\rho} \right)^2 \left(\frac{A}{\rho} + I^* \right)^2 t < +\infty,$$

根据鞅的强大数定律, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M(t)}{t} = 0$.

取期望:

$$\mathbb{E}V_5(X(\tau)) - \mathbb{E}V_5(X(0)) \leq \mathbb{E} \int_0^t \left(-\zeta_1(S(\tau) - S^*)^2 - \zeta_2(I(\tau) - I^*)^2 - \zeta_3(R(\tau) - R^*)^2 \right) d\tau + \mathbb{H}t.$$

两边同时除以 t 并令 $t \rightarrow \infty$, 我们有

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \mathbb{E} \int_0^t \left(\zeta_1(S(\tau) - S^*)^2 + \zeta_2(I(\tau) - I^*)^2 + \zeta_3(R(\tau) - R^*)^2 \right) d\tau \leq \mathbb{H},$$

其中 $\zeta = \min\{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\}$, 则

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \mathbb{E} \int_0^t \left((S(\tau) - S^*)^2 + (I(\tau) - I^*)^2 + (R(\tau) - R^*)^2 \right) d\tau \leq \frac{\mathbb{H}}{\zeta}.$$

3. 数值模拟与讨论

使用高阶的Milstein方法 [20]的参数, 用给定的初始值数值计算随机系统(1.2) 的解, 以支持上述结果. 数值模拟中的参数取值参考已有随机传染病模型相关研究, 并结合模型理论分析条件进行设置. 所选参数满足系统稳定性分析的相关条件, 同时具有明确的生物学意义. 其中, β 、 r 、 α_1 、 α_2 分别用于描述疾病传播、恢复过程以及饱和和传播效应, σ 用于刻画随机环境因素对疾病传播过程的影响.

离散化方程是:

$$\begin{aligned} S_{j+1} &= S_j + \left(A - \rho S_j - \frac{\beta S_j I_j}{1 + \alpha_1 S_j + \alpha_2 I_j} \right) \Delta t - \frac{\sigma S_j I_j}{1 + \alpha_1 S_j + \alpha_2 I_j} \xi_j \sqrt{\Delta t} \\ &\quad + \frac{\sigma^2 S_j^2 I_j^2 (1 + \alpha_2 I_j)}{2(1 + \alpha_1 S_j + \alpha_2 I_j)^3} (\xi_j^2 - 1) \Delta t, \\ I_{j+1} &= I_j + \left(\frac{\beta S_j I_j}{1 + \alpha_1 S_j + \alpha_2 I_j} - (\rho + \theta + \mu) I_j - \frac{r I_j}{1 + \alpha I_j} \right) \Delta t + \frac{\sigma S_j I_j}{1 + \alpha_1 S_j + \alpha_2 I_j} \xi_j \sqrt{\Delta t} \\ &\quad + \frac{\sigma^2 S_j^2 I_j^2 (1 + \alpha_1 S_j)}{2(1 + \alpha_1 S_j + \alpha_2 I_j)^3} (\xi_j^2 - 1) \Delta t, \\ R_{j+1} &= R_j + \left(\mu I_j + \frac{r I_j}{1 + \alpha I_j} - \rho R_j \right) \Delta t, \end{aligned}$$

其中时间增量 $\Delta t > 0$, ξ_j ($j = 1, 2, \dots, n$) 是服从标准正态分布 $N(0, 1)$ 的高斯随机变量. 在本文的所有模拟中, 初始值取为 $(S(0), I(0), R(0)) = (0.6, 0.2, 0.2)$, 步长取为 $\Delta t = 0.05$.

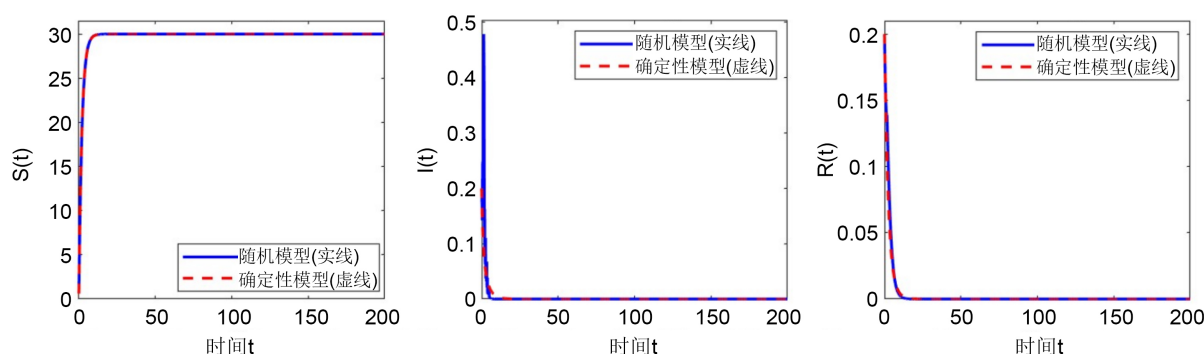


Figure 1. Stochastic dynamic trajectories of different state variables over time

图 1. 不同状态变量随时间变化的随机动态轨迹

图 1 取参数值为(1.1)和(1.2)的轨迹, 其中 $(S(0), I(0), R(0)) = (0.6, 0.2, 0.2)$, $A=15$, $\rho = 0.9$, $\beta = 0.1$, $\mu = 0.05$; $\vartheta = 0.3$, $r = 2.0$, $\alpha_1 = 1.0$, $\alpha_2 = 2.0$, $\sigma = 0.066$. 图 1 展示了系统(1.1)和(1.2)的解轨迹. 定理2.4.1指出, 随机系统(1.2)的无病平衡点 E_0 在上是全局随机渐近稳定的. 图中显示, 当噪强度 $\sigma = 0.066$ 时, 无病平衡点 E_0 是均方指数稳定的.

图 2 取参数值为(1.1)和(1.2)的轨迹, 其中 $(S(0), I(0), R(0)) = (0.6, 0.2, 0.2)$, $A = 10$, $\rho = 0.9$, $\theta = 0.05$, $\mu = 0.2$; $\vartheta = 0.3$, $r = 0.1$, $\alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 0.05$, $\sigma = 0.02$. 这里的基本传染数

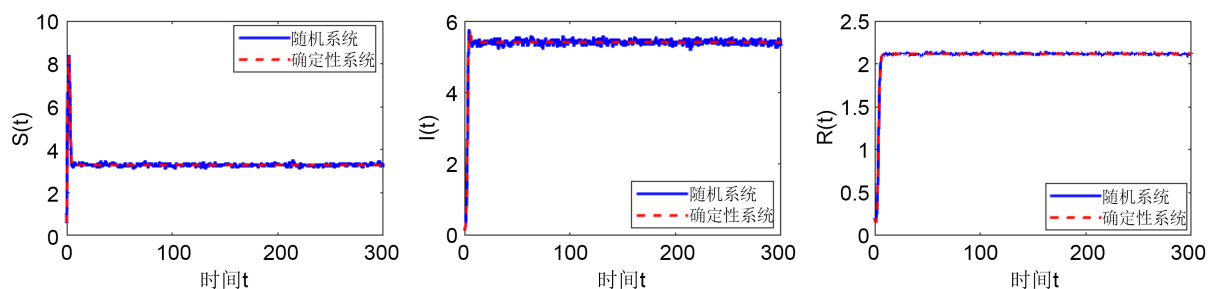


Figure 2. Effect of variations in the transmission rate parameter β on the dynamic behavior of the number of infected individuals $I(t)$

图 2. 传播率参数 β 变化对感染者数量 $I(t)$ 动态行为的影响

$\mathcal{R}_0 = 2.1505 > 1$), 并且满足定理2.6.1的条件. 在白噪声强度较小 ($\sigma = 0.02$) 时, 随机系统(1.2)的解在正的地方病平衡点 E^* 附近波动, 且波动范围较小, 验证了定理2.6.1的结论. 同时可以看出, 在较小随机扰动强度 $\sigma = 0.02$ 条件下, 系统仅在地方病平衡点附近产生小幅波动, 说明较弱随机因素对系统稳定状态影响有限.

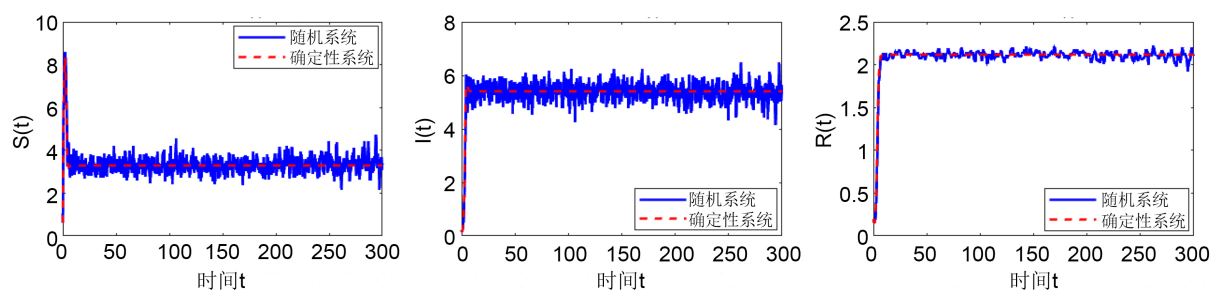


Figure 3. Effect of stochastic perturbation intensity σ on the dynamic volatility of the infected population

图 3. 随机扰动强度 σ 对感染者动态波动性的影响

图 3 参数值与图 2 相同, 图 3 中仅改变随机扰动强度参数 σ , 由图 2 中的 0.02 增加至 0.05. 结果表明, 随着 σ 增大, 系统轨迹波动明显增强, 说明随机扰动强度对系统稳定性具有重要影响.

图 4 取参数值为: $A = 14$, $\rho = 0.2$, $\theta = 0.5$, $\mu = 0.1$; $v = 0.3$, $r = 0.1$, $\alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 0.01$, $\sigma = 0.009$. 这里的基本传染数 $\mathcal{R}_0 = 1.4875 > 1$). 满足定理2.2.3的性质. 表明疾病在均值意义下持续存在. 同时, 确定性系统(1.1)的解趋于地方病平衡点 E^* , 而随机系统(1.2) 的解在该平衡点附近波动, 且两者均持续存在. 该结果进一步说明, 当传播相关参数使基本再生数超过临界值时, 系统将维持地方病状态.

图 5 与图 4 相比, 仅增加随机扰动强度参数 σ . 结果表明, 当随机扰动增强时, 感染者数量逐渐趋近于零, 说明随机环境因素的变化可能改变疾病传播状态, 并促进疾病灭绝.

4. 结论

本文建立并分析了一类具有广义饱和发生率 and 饱和治疗函数的随机 SIR 传染病模型. 与经典

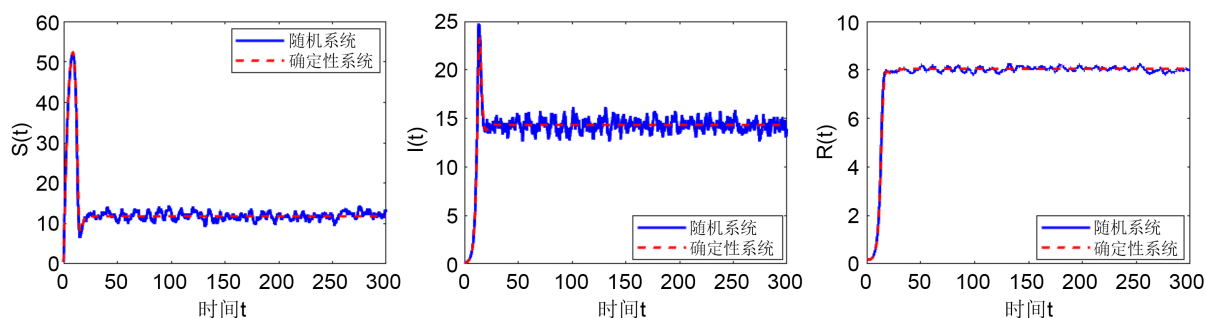


Figure 4. Influence of saturation effect parameters α_1 and α_2 on the infection transmission process

图 4. 饱和效应参数 α_1 和 α_2 对感染传播过程的影响

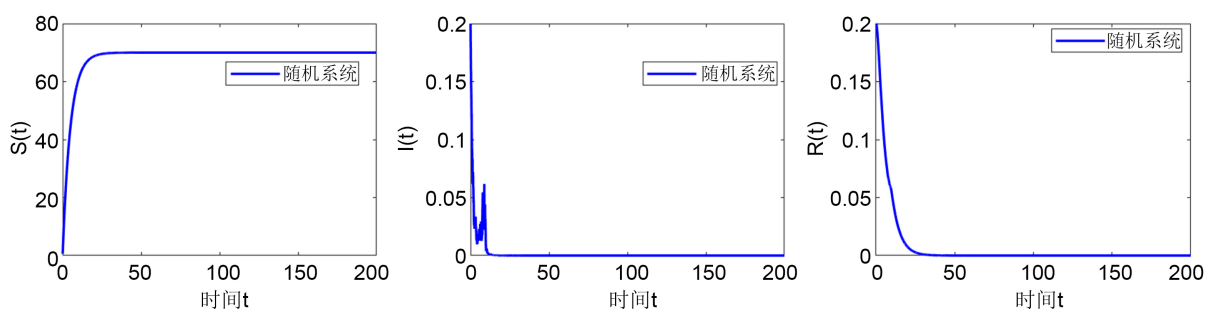


Figure 5. Effect of the treatment parameter r on the changes in the number of infected and recovered individuals

图 5. 治疗参数 r 对感染者和恢复者数量变化的影响

SIR 模型以及部分仅考虑单一非线性机制的随机模型相比, 本文模型同时考虑了传播过程中的接触饱和和效应、治疗过程中的资源限制以及随机环境扰动, 为研究复杂随机环境下疾病传播动力学行为提供了一种扩展性的数学描述框架. 通过随机分析方法和 Lyapunov 函数理论, 本文证明了模型正解的全局存在性, 并获得了疾病灭绝与持续性的充分条件. 理论结果表明, 随机扰动强度、传播参数以及治疗参数均可能影响系统长期动力学行为, 并进一步改变疾病的流行趋势. 需要强调的是, 本文模型并不意味着其在所有流行病场景下均优于已有模型, 而是在同时存在传播饱和和效应、医疗资源限制以及环境随机性的情况下, 能够提供一种更加灵活的动力学分析工具. 模型的实际适用性仍依赖于参数估计的准确性以及具体疾病传播背景下模型假设的合理性. 未来研究可进一步考虑疫苗接种策略、时变控制措施、空间异质性以及更加复杂随机过程等因素, 以提高模型对实际传染病传播过程的描述能力.

参考文献

- [1] Anderson, R.M. and May, R.M. (1982) Population Biology of Infectious Diseases. Springer.
- [2] Capasso, V. and Serio, G. (1978) A Generalization of the Kermack-Mckendrick Deterministic Epidemic Model. *Mathematical Biosciences*, **42**, 43-61.

- [https://doi.org/10.1016/0025-5564\(78\)90006-8](https://doi.org/10.1016/0025-5564(78)90006-8)
- [3] Ruan, S. and Wang, W. (2003) Dynamical Behavior of an Epidemic Model with a Nonlinear Incidence Rate. *Journal of Differential Equations*, **188**, 135-163.
[https://doi.org/10.1016/s0022-0396\(02\)00089-x](https://doi.org/10.1016/s0022-0396(02)00089-x)
- [4] Yorke, J.A. and London, W.P. (1973) Recurrent Outbreaks of Measles, Chickenpox and Mumps. *American Journal of Epidemiology*, **98**, 469-482.
<https://doi.org/10.1093/oxfordjournals.aje.a121576>
- [5] Liu, W.M., Levin, S.A. and Iwasa, Y. (1986) Influence of Nonlinear Incidence Rates Upon the Behavior of SIRS Epidemiological Models. *Journal of Mathematical Biology*, **23**, 187-204.
- [6] Wei, J. and Cui, J. (2012) Dynamics of Sis Epidemic Model with the Standard Incidence Rate and Saturated Treatment Function. *International Journal of Biomathematics*, **5**, Article ID: 1260003. <https://doi.org/10.1142/s1793524512600030>
- [7] Zhang, X. and Liu, X. (2008) Backward Bifurcation of an Epidemic Model with Saturated Treatment Function. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **348**, 433-443.
<https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.07.042>
- [8] Hu, Z., Ma, W. and Ruan, S. (2012) Analysis of SIR Epidemic Models with Nonlinear Incidence Rate and Treatment. *Mathematical Biosciences*, **238**, 12-20.
<https://doi.org/10.1016/j.mbs.2012.03.010>
- [9] Swati and Nilam (2022) Fractional Order SIR Epidemic Model with Beddington-De Angelis Incidence and Holling Type II Treatment Rate for Covid-19. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **68**, 3835-3859. <https://doi.org/10.1007/s12190-021-01658-y>
- [10] Ji, C., Jiang, D. and Shi, N. (2012) The Behavior of an SIR Epidemic Model with Stochastic Perturbation. *Stochastic Analysis and Applications*, **30**, 755-773.
<https://doi.org/10.1080/07362994.2012.684319>
- [11] Jiang, D., Yu, J., Ji, C. and Shi, N. (2011) Asymptotic Behavior of Global Positive Solution to a Stochastic SIR Model. *Mathematical and Computer Modelling*, **54**, 221-232.
<https://doi.org/10.1016/j.mcm.2011.02.004>
- [12] Liu, Q. and Jiang, D. (2017) Stationary Distribution and Extinction of a Stochastic SIR Model with Nonlinear Perturbation. *Applied Mathematics Letters*, **73**, 8-15.
<https://doi.org/10.1016/j.aml.2017.04.021>
- [13] Zhao, Y. and Jiang, D. (2014) The Threshold of a Stochastic SIRS Epidemic Model with Saturated Incidence. *Applied Mathematics Letters*, **34**, 90-93.
<https://doi.org/10.1016/j.aml.2013.11.002>
- [14] Tang, T., Teng, Z. and Li, Z. (2015) Threshold Behavior in a Class of Stochastic SIRS Epidemic Models with Nonlinear Incidence. *Stochastic Analysis and Applications*, **33**, 994-1019.
<https://doi.org/10.1080/07362994.2015.1065750>

-
- [15] Rajasekar, S.P., Pitchaimani, M. and Zhu, Q. (2019) Dynamic Threshold Probe of Stochastic SIR Model with Saturated Incidence Rate and Saturated Treatment Function. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **535**, Article ID: 122300.
<https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.122300>
 - [16] Arnold, L. (1974) Stochastic Differential Equations: Theory and Applications. Wiley.
 - [17] Gard, T.C. (1998) Introduction to Stochastic Differential Equations. Marcel Dekker.
 - [18] Zhu, Q. and Zhang, Q. (2017) p th Moment Exponential Stabilisation of Hybrid Stochastic Differential Equations by Feedback Controls Based on DiscreteState Observations with a Time Delay. *IET Control Theory & Applications*, **11**, 1992-2003.
<https://doi.org/10.1049/iet-cta.2017.0181>
 - [19] Ji, C. and Jiang, D. (2014) Threshold Behaviour of a Stochastic SIR Model. *Applied Mathematical Modelling*, **38**, 5067-5079. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2014.03.037>
 - [20] Liptser, R.S. and Shirayev, A.N. (1989) Theory of Martingales. Kluwer Academic Publishers.
 - [21] Zhu, Q. (2014) p th Moment Exponential Stability of Impulsive Stochastic Functional Differential Equations with Markovian Switching. *Journal of the Franklin Institute*, **351**, 3965-3986.
<https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2014.04.001>
 - [22] Mao, X. (2007) Stochastic Differential Equations and Applications. Horwood Publishing.
 - [23] Liptser, R.S. (1980) A Strong Law of Large Numbers for Local Martingales. *Stochastics*, **3**, 217-228. <https://doi.org/10.1080/17442508008833146>