Pure Mathematics 理论数学, **2026, 16(10), 147-156**
Published Online October 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.1610220

Hans汉斯

四阶非线性常微分方程结点解的存在性

朱家骅

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2026年9月10日；录用日期：2026年10月20日；发布日期：2026年10月28日

摘 要

考察四阶边值问题

$$\begin{cases} u''''(t) = \lambda f(t, u(t)), \quad t \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0 \end{cases}$$

结点解的存在性, 其中 $\lambda > 0$ 是参数, $f \in C([0,1] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ 且 $f(t,s)s > 0$, $\forall\, t \in [0,1]$, $s \neq 0$, 当 f 满足在零处渐近线性增长, 在无穷远处超线性增长时, 运用分歧理论获得了该问题结点解的存在性. 结果表明, 当 λ 的取值位于不同区间时, 该问题结点解的个数也会随之改变.

关键词

结点解，分歧理论，四阶梁方程，特征值

Existence of Nodal Solutions for Fourth-Order Nonlinear Ordinary Differential Equations

Jiahua Zhu

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: September 10, 2026; accepted: October 20, 2026; published: October 28, 2026

文章引用: 朱家骅. 四阶非线性常微分方程结点解的存在性[J]. 理论数学, 2026, 16(10): 147-156.
DOI: 10.12677/pm.2026.1610220

Abstract

We study the existence of nodal solutions for the fourth-order boundary value problem

$$\begin{cases} u''''(t) = \lambda f(t, u(t)), \quad t \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0, \end{cases}$$

where $\lambda > 0$ is a parameter, $f \in C([0,1] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, and $f(t,s)s > 0$ for all $t \in [0,1]$ and $s \neq 0$. Under the assumptions that f is asymptotically linear at the origin and superlinear at infinity, we use bifurcation theory to establish the existence of nodal solutions for the problem. The results show that the number of nodal solutions of the problem varies as λ takes values in different intervals.

Keywords

Nodal Solutions, Bifurcation Theory, Fourth-Order Beam Equation, Eigenvalues

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/

Open Access

1. 引言

四阶常微分方程边值问题源于弹性梁理论、工程力学及材料科学等领域, 并且具有重要的理论价值和应用背景, 近年来, 对两端简支的弹性梁方程正解的存在性研究已取得丰硕成果, 参见文献 [1–6]. Shi 等 [1]研究了不含参数的四阶边值问题

$$\begin{cases} u''''(t) = f(t, u(t)), \quad t \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

正解的存在性, 其中 $f \in C([0,1] \times [0,+\infty), [0,+\infty))$, 且满足适当增长条件, 运用锥上的不动点定理获得了问题 (1) 正解的存在性结果.

特别地, 当问题 (1) 中的非线性项 $f(t,u(t)) = h(t)f(u(t))$ 时, 问题 (1) 可退化为下面的四阶边值问题

$$\begin{cases} u''''(t) = h(t)f(u(t)), \quad t \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

Ma 等 [2]运用锥上的不动点定理研究了问题 (2) , 其中 $h \in C([0,1], [0,\infty))$且在 [0,1] 的任一子区间

内不恒为 0, $f \in C([0,\infty),[0,\infty))$ 在零处和无穷远处关于 u 满足适当增长条件, 建立了问题 (2) 至少存在一个正解的结论.

目前, 已有学者对问题 (1) 的非平凡解的存在性开展研究, 得到了一系列结果, 参见文献 [7–10]. Ye [7]近期运用变分法探讨了问题 (1) 非平凡解的存在性和多解性, 其中假设 $f \in C([0,1]\times\mathbb{R},\mathbb{R})$, 主要结果如下:

定理A 假设下列条件成立:

(H1) $f(t,u)$ 关于 u 是奇函数, 即 $f(t,-u)=-f(t,u)$;

(H2) 存在常数 $a<\frac{\pi^2}{4}$, $b\in\mathbb{R}$, $M>0$ 使得当 $|u|>M$ 时

$$H(t,u)=\int_0^u f(t,v)dv \le au^2+b,\ t\in[0,1];$$

(H3) 对于 $t\in[0,1]$, $\lim\limits_{|u|\to 0}\dfrac{f(t,u)}{u}=\lambda(t)$.

对任意给定的 $j\in(1,2,\cdots)$, 对于 $t\in[0,1]$, 当 $\lambda(t)\ge(j\pi)^4$, 则问题 (1) 在 $C^4[0,1]$ 中至少存在 n 对非平凡解.

值得注意的是, Ye [7]虽得到了非线性项在无穷远处渐近线性增长时非平凡解的多解性, 但却无法得到解的结点性质. 其次, Ye [7]对非线性项具有较强的奇函数约束, 本文弱化了非线性项的约束条件, 所得结论更具有一般性. 为此, 本文运用分歧理论考察以下四阶非线性边值问题

$$\begin{cases} u''''(t)=\lambda f(t,u(t)), & t\in(0,1),\\ u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1)=0 \end{cases} \tag{3}$$

结点解的存在性.

本文总假定:

(A1) $f\in C([0,1]\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ 且 $f(t,s)s>0$, $\forall\, t\in[0,1]$, $s\neq 0$;

(A2) 对于 $t\in[0,1]$, 存在 $f_0\in(0,+\infty)$, $f_\infty=\infty$, 其中

$$\lim_{|s|\to 0}\frac{f(t,s)}{s}=f_0,\ \lim_{|s|\to\infty}\frac{f(t,s)}{s}=f_\infty;$$

(A3) 存在 $s_k>0$, 使得当 $t\in[0,1]$, $|s|\le s_k$ 时, 有

$$|f(t,s)|<\frac{60f_0}{\lambda_k}s_k,$$

其中, λ_k 是特征值问题

$$\begin{cases} \varphi''''(t)=\lambda\varphi(t), & t\in(0,1),\\ \varphi(0)=\varphi(1)=\varphi''(0)=\varphi''(1)=0 \end{cases}$$

的第 k 个特征值.

本文的主要结果如下:

定理 1.1 假设 (A1)-(A2) 成立, 对任意 $n \in \mathbb{N}$. 若

$$0 < \lambda < \frac{\lambda_1}{f_0},$$

则问题 (3) 至少存在 $2n$ 个解 u_k^+ 和 u_k^- $(k = 1, 2, 3, \cdots, n)$, 其中 u_k^+ 在区间 $(0, 1)$ 内恰好有 $k-1$ 个零点, 且在 0 附近为正; u_k^- 在区间 $(0, 1)$ 内恰好有 $k-1$ 个零点, 且在 0 附近为负.

定理 1.2 假设 (A1)-(A3) 成立, 对任意 $n \in \mathbb{N}$. 存在常数 $(\lambda_k^*)^+$, $(\lambda_k^*)^- \in (\frac{\lambda_k}{f_0}, +\infty)$, 若

$$\frac{\lambda_1}{f_0} < \lambda < \lambda^*,$$

其中 $\lambda^* = \min\limits_{1 \le k \le n+1} \{(\lambda_k^*)^+, (\lambda_k^*)^-\}$, 则问题 (3) 至少存在 $2n+2$ 个解 u_k^+ 和 u_k^- $(k = 1, 2, \cdots, n, n+1)$, 其中 u_k^+ 在区间 $(0, 1)$ 内恰好有 $k-1$ 个零点, 且在 0 附近为正; u_k^- 在区间 $(0, 1)$ 内恰好有 $k-1$ 个零点, 且在 0 附近为负.

注 1.3. 与文献 [7]相比, 本文不仅可以得到解的多解性, 并且还得到了解的变号次数.

注 1.4. 条件 (A3) 保证了当解 u 的振幅较小时, 非线性项 $f(t, u)$ 的增长会受到控制, 从而使得连通分支在分歧点附近不会趋于无穷, 而是先经过分歧点右侧一点, 然后连接到 $(0, +\infty)$. 为了说明条件 (A3) 的非空性, 我们构造如下例子: 取

$$f(t, s) = f_0 s + s^3,$$

其中 $f_0 > 0$ 为常数. 显然, $f(t, s)s = f_0 s^2 + s^4 > 0$ 对 $s \neq 0$ 成立, 满足 (A1). 且

$$\lim_{|s| \to 0} \frac{f(t, s)}{s} = f_0, \quad \lim_{|s| \to \infty} \frac{f(t, s)}{s} = \infty,$$

满足 (A2). 对于 (A3), 取 $s_k = \sqrt{\frac{60 f_0}{\lambda_k} - f_0}$, 即 $\lambda_k < 60 f_0$. 则当 $|s| \le s_k$ 时,

$$|f(t, s)| = |f_0 s + s^3| \le f_0 s_k + s_k^3 = s_k (f_0 + s_k^2) < s_k \cdot \frac{60 f_0}{\lambda_k},$$

即 (A3) 成立. 因此, 假设 (A1)-(A3) 是相容的, 定理 1.2 的结论非空.

2. 预备知识

对于任意整数 $r > 0$, 记 $C^r[0, 1]$ 为定义在 $[0, 1]$ 上 r 次连续可微的实值函数构成的标准 Banach 空间, 其范数为 $||u|| = \sum_{i=0}^{r} ||u^{(i)}||_\infty$, 其中 $||u||_\infty = \max\{|u(x)| \,\big|\, x \in [0, 1]\}$.

令

$$Y = C[0, 1],$$

$$X = \{u \in C^4[0,1] \mid u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0\}.$$

定义算子 $L : X \to Y$ 为

$$Lu := u'''', \ u \in X.$$

令

$$E = \{u \in C^3[0,1] : u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0\},$$

其范数为 $\|\cdot\|_3$. 则 $L^{-1} : Y \to E$ 是良定的且为全连续算子.

对于任意整数 $k \geq 1, \nu \in \{+,-\}$. S_k^ν 为 E 中满足以下条件的函数构成的集合, 并具有以下性质:

(i) u 在 $(0,1)$内只有简单零点;

(ii) u 在 $(0,1)$ 内恰好有 $k-1$ 个零点;

(iii) 在 $t=0$ 的某个去心邻域内,有 $\nu u > 0$.

这些集合 S_k^ν 在 E 中是开集且互不相交.

定义 2.1 [11] 设 X 为一个 Banach 空间, $\{C_n \mid n = 1,2,\dots\}$ 为 X 中的一簇子集. 则 $\{C_n\}$ 的上极限 $\mathcal{D}$ 定义为

$$\mathcal{D} := \limsup_{n\to\infty} C_n = \left\{x \in X \mid \exists\{n_i\} \subset \mathbb{N}, \ x_{n_i} \in C_{n_i}, \ \text{使得 } x_{n_i} \to x\right\}.$$

定义 2.2 [11] 集合 Q 中一个极大连通子集称为 Q 的连通分支.

引理 2.3 [12] 令 X 为一个 Banach 空间, $\{C_n\}$ 为 X 中的一簇连通子集. 假设

(a) 存在 $z_n \in C_n$, $n = 1,2,\dots$, 及 $z^* \in X$, 使得 $z_n \to z^*$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \infty$, 其中 $r_n = \sup\{\|x\| \mid x \in C_n\}$;

(c) 对任意给定的 $R > 0$, $(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n) \cap B_R$ 是 X 中的相对紧集, 其中 $B_R = \{x \in X \mid \|x\| \leq R\}$.

则在 $\mathcal{D}$ 中存在一个无界连通分支 $\mathcal{C}$ 且 $z^* \in \mathcal{C}$.

引理 2.4 [13] 设 $a(t) \in C([0,1],(0,\infty))$ 成立.

(i) 若 $u \in X$ 是方程 $Lu = au$ 的一个非平凡解, 则存在某个 k 和 ν 使得 $u \in S_k^\nu$, 并且 u 的相邻零点之间恰好有一个 u' 的零点;

(ii) 特征值问题 $Lu = \mu au$ 存在一个严格递增的特征值序列 $\mu_k := \mu_k(a) > 0$, $k = 1,2,\dots$; 每个 μ_k 的代数重数为 1, 且相应的归一化特征函数 $\varphi_k \in S_k^+$.

注 2.5. 值得注意的是, 文献 [14]所考虑的二阶问题中, 结点性质在 C_k^ν 上得以保持. 而对于四阶问题 (3), 结点结构不一定保持. 而引理 2.4 的第 (i) 部分保证了在这些分支上结点结构是保持的. 事实上, 若 u 是问题 (3) 的一个非平凡解, 则

$$Lu = \lambda q(t)u,$$

其中

$$q(t)=\begin{cases}\dfrac{f(t,u(t))}{u(t)}, & u(t)\neq 0,\\ f_0, & u(t)=0,\end{cases}$$

显然, $q\in C([0,1],(0,\infty))$, 由引理 2.4 的 (i) 部分可知, 对某个 $k\in\mathbb{N}$ 以及 $\nu\in\{+,-\}$, 有 $u\in S_k^{\nu}$.

设 $\zeta\in C([0,1]\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ 满足

$$f(t,u)=f_0u+\zeta(t,u),$$

显然有

$$\lim_{|u|\to 0}\frac{\zeta(t,u)}{u}=0.$$

考虑

$$Lu-\lambda f_0u=\lambda\zeta(t,u) \tag{4}$$

是从平凡解 $u\equiv 0$ 产生的分歧问题.

上述方程可以转化为等价的积分方程

$$u=\lambda L^{-1}[f_0u(\cdot)]+\lambda L^{-1}[\zeta(\,\cdot\,,u(\cdot))].$$

此外,

$$\lim_{||u||\to 0}\frac{||L^{-1}[\zeta(\,\cdot\,,u(\cdot))]||_3}{||u||_3}=0.$$

由文献 [15]和 [16]定理 2.2 可得, 从点 $(\frac{\lambda_k}{f_0},0)$ 处发出两条互不相同的无界连通分支 C_k^+ 与 C_k^-. 有

$$C_k^v\subset\{(\frac{\lambda_k}{f_0},0)\}\cup\big(\mathbb{R}\times S_k^v\big).$$

3. 主要结果的证明

引理 3.1 假设条件 (A1)-(A2) 成立. 则对每个整数 $k\geq 1$ 及 $\nu\in\{+,-\}$, 存在问题 (4) 的解构成的一个连通分支 $C_k^{\nu}\subseteq\mathbb{R}\times S_k^{\nu}$ 连接 $\left(\frac{\lambda_k}{f_0},0\right)$ 和 $(0,\infty)$. 此外, 有 $C_k^{\nu}\setminus\left\{\left(\frac{\lambda_k}{f_0},0\right)\right\}\subset\mathbb{R}\times S_k^{\nu}$.

证明: 对于任意的 $n\in\mathbb{N}$, 定义 $f^{[n]}(t,s)\in C([0,1]\times\mathbb{R},\mathbb{R})$为

$$f^{[n]}(t,s)=\begin{cases}f(t,s), & |s|\leq n,\\ \frac{sf(t,n)}{n}, & |s|>n.\end{cases}$$

考虑如下的辅助问题

$$\begin{cases}u''''(t)=\lambda f^{[n]}(t,u(t)), & t\in(0,1),\\ u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1)=0,\end{cases} \tag{5}$$

同理, 由文献 [16]定理 2.2 可得从点 $\left(\frac{\lambda_k}{(f^{[n]})_0},0\right)$ 处发出两条互不相同的无界连通分支 $C_k^{+[n]}$ 与 $C_k^{-[n]}$. 下面证明分支 $C_k^{\nu[n]}$ 一端连接 $\left(\frac{\lambda_k}{(f^{[n]})_0},0\right)$, 另一端沿无穷趋向 $\left(\frac{\lambda_k}{(f^{[n]})_\infty},+\infty\right)$. 任取点列 $(\lambda_m,u_m)\in C_k^{\nu[n]}$ 满足 $\lambda_m+\|u_m\|_3\to+\infty$. 注意到, 当 $\lambda=0$ 时方程 (5) 只有平凡解 $(0,0)$, 因此 $C_k^{\nu}\cap\big(\{0\}\times E\big)=\emptyset$, 进而对所有 $m\in\mathbb{N}$ 都有 $\lambda_m>0$. 此时只需证明

$$\left(\frac{\lambda_k}{(f^{[n]})_\infty},\frac{\lambda_k}{(f^{[n]})_0}\right)\subseteq\left\{\lambda\in\mathbb{R}\mid(\lambda,u)\in C_k^{\nu[n]}\right\}.$$

第一步: 证明若存在常数 $M>0$ 使得充分大的 m 满足 $\lambda_m\in(0,M]$, 则分支 C_k^{ν} 连接 $\left(\frac{\lambda_k}{(f^{[n]})_0},0\right)$ 与 $\left(\frac{\lambda_k}{f^{[n]})_\infty},+\infty\right)$.

由于 λ_m 有界且 $\lambda_m+\|u_m\|_3\to+\infty$, 得 $\|u_m\|_3\to+\infty$. 问题 (5) 可等价地写为

$$\begin{cases}u_m''''(t)=\lambda_m(f^{[n]})_\infty u_m(t)+\lambda_m\left[f^{[n]}(t,u_m(t))-(f^{[n]})_\infty u_m(t)\right], & t\in(0,1),\\ u_m(0)=u_m(1)=u_m''(0)=u_m''(1)=0,\end{cases}\tag{6}$$

且

$$(f^{[n]})_0:=\lim_{|s|\to0}\frac{f^{[n]}(t,s)}{s}=f_0,\ (f^{[n]})_\infty:=\lim_{|s|\to\infty}\frac{f^{[n]}(t,s)}{s}=\frac{f(t,n)}{n},$$

$$\lim_{|s|\to\infty}\frac{f^{[n]}(t,s)-(f^{[n]})_\infty s}{s}=0.\tag{7}$$

进一步由 (A2) 可知,

$$\lim_{n\to0}(f^{[n]})_0=f_0,\ \lim_{n\to\infty}(f^{[n]})_\infty=\infty.$$

对 (6) 两边同除以 $\|u_m\|_3$, 记 $\overline{u}_m=\frac{u_m}{\|u_m\|_3}$. 由于 $\{\overline{u}_m\}$ 在空间 E 中有界, 可取子列满足 $\overline{u}_m\to\bar{u}\in E$. 结合 (7) 可得

$$\lim_{m\to+\infty}\frac{f^{[n]}(t,u_m(t))-(f^{[n]})_\infty u_m(t)}{||u_m||_3}=0.$$

记 $\overline{\lambda}=\lim\limits_{m\to+\infty}\lambda_m$, 满足

$$\overline{u}''''=\overline{\lambda}(f^{[n]})_\infty\overline{u}.$$

又因为 $\mathcal{C}_k^{\nu}$ 是闭集, 故 $\overline{u}\in\mathcal{C}_k^{\nu}$, 于是 $\overline{\lambda}(f^{[n]})_\infty=\lambda_k$, 即

$$\overline{\lambda}=\frac{\lambda_k}{(f^{[n]})_\infty}.$$

因此分支 $C_k^{\nu[n]}$ 连接 $\left(\frac{\lambda_k}{(f^{[n]})_0},0\right)$到 $\left(\frac{\lambda_k}{(f^{[n]})_\infty},+\infty\right)$.

第二步: 证明确实存在一个常数 $M>0$ 使得对于任意的 $m\in\mathbb{N}$ 有 $\lambda_m\in(0,M]$. 反设若 $\lim\limits_{m\to+\infty}\lambda_m=+\infty$. 由 $(\lambda_m,u_m)\in C_k^{\nu[n]}$. 对任意 $t\in[0,1]$, 记

$$\tilde{p}_m(t)=\begin{cases}\dfrac{f^{[n]}(t,u_m(t))}{u_m(t)}, & u_m(t)\neq0,\\ (f^{[n]})_0, & u_m(t)=0.\end{cases}$$

由条件 $(A1),(A2)$, 存在常数 $\varrho>0$ 使得对任意的 $t\in[0,1]$, $n\in\mathbb{N}$ 有 $\tilde{p}_m(t)>\varrho$, 于是

$$u_m''''=\lambda_m\tilde{p}_m(t)u_m.$$

根据 Sturm 比较定理(参见文献 [16]引理 3.2) 可得当 $m\to+\infty$ 可推出 u_m 在某一区间内零点趋于无穷多, 这与 $u_m\in S_k^{\nu[n]}$ 矛盾. 故 λ_m 有上界. 我们注意到, Rynne在文献 [17]的引理3.7的证明中也采用了相同的论证方法. 因此, 问题 (5) 在 $\mathbb{R}\times S_k^{\nu[n]}$ 中存在连接 $\left(\frac{\lambda_k}{(f^{[n]})_0},0\right)$到 $\left(\frac{\lambda_k}{(f^{[n]})_\infty},+\infty\right)$ 的连通分支 $C_k^{\nu[n]}$, 满足 $C_k^{\nu[n]}\setminus\left\{\left(\frac{\lambda_k}{(f^{[n]})_0},0\right)\right\}\subset\mathbb{R}\times S_k^{\nu[n]}$.

因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_k}{(f^{[n]})_\infty}=\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_k}{nf(t,n)}=0,$$

取 $z^*=(0,\infty)$, 则引理 2.3 中的条件 (a) 满足.

因为 $C_k^{\nu[n]}$ 无界, 所以 $r_n=\sup\left\{|\lambda_m|+\|u_m\|\mid(\lambda_m,u_m)\in C_k^{v[n]}\right\}=\infty$, 则条件 (b) 满足.

条件 (c) 可由 Ascoli-Arzelà 定理及 $f^{[n]}$ 的定义直接推得. 因此, $\{C_k^{\nu[n]}\}$ 的上极限, 即 $\mathcal{D}$ 中包含一个无界连通分支 C_k^{ν} 连接 $\left(\frac{\lambda_k}{f_0},0\right)$ 和 $(0,\infty)$. □

引理 3.2 假设 (A3) 成立. 若 $((\lambda_k^*)^\nu,u_k)\in C_k^\nu$ 满足 $\|u_k\|_\infty=s_k\,(k=1,2,\cdots,n,n+1)$, 则

$$(\lambda_k^*)^\nu>\frac{\lambda_k}{f_0}.$$

证明:问题 (3) 的等价积分形式为

$$u(t)=\lambda\int_0^1G(t,x)\left[\int_0^1G(x,\tau)f(\tau,u(\tau))d\tau\right]dx,$$

其中

$$G(t,x)=\begin{cases}t(1-x), & 0\le t\le x\le 1,\\ x(1-t), & 0\le x\le t\le 1.\end{cases}$$

若 $((\lambda_k^*)^\nu,u_k)\in C_k^v$ 满足 $\|u_k\|_\infty=s_k$, 则由条件 (A3) 和 Green 函数 $G(t,x)$ 的性质可得

$$\begin{aligned}s_k=\|u_k\|_\infty&=\max_{t\in[0,1]}\left|(\lambda_k^*)^\nu\int_0^1G(t,x)\left[\int_0^1G(x,\tau)f(\tau,u_k(\tau))\,d\tau\right]dx\right|\\&<(\lambda_k^*)^\nu\frac{60f_0}{\lambda_k}s_k\int_0^1G(x,x)\left[\int_0^1G(x,\tau)\,d\tau\right]dx\\&=(\lambda_k^*)^\nu\frac{f_0}{\lambda_k}s_k,\end{aligned}$$

即有

$$(\lambda_k^*)^\nu>\frac{\lambda_k}{f_0}.$$ □

3.1. 定理 1.1 的证明

设 C_k^ν 为引理 3.1 中所述的连通分支, 该分支以 $(\frac{\lambda_k}{f_0},0)$ 为分歧点, 最后连接到 $(0,\infty)$, 若 $0<\lambda<\frac{\lambda_1}{f_0}$, 则问题 (3) 至少存在 $2n$ 个解 u_k^+ 和 u_k^- $(k=1,2,3,\cdots,n)$. 其中 u_k^+ 在区间 $(0,1)$ 内恰好有 $k-1$ 个零点, 且在 0 附近为正; u_k^- 在区间 $(0,1)$ 内恰好有 $k-1$ 个零点, 且在 0 附近为负. □

3.2. 定理 1.2 的证明

设 C_k^ν 为引理 3.1 中所述的连通分支, 该分支以 $(\frac{\lambda_k}{f_0},0)$ 为分歧点, 设 $\{((\lambda_k^*)^\nu,u_k)\}$ 为引理 3.2 中所述的序列, 满足 $\|u_k\|_\infty=s_k$, 由引理 3.2 可得, C_k^ν 从 $(\frac{\lambda_k}{f_0},0)$ 发出后会经过分歧点右侧一点, 最后连接到 $(0,\infty)$, 若 $\frac{\lambda_1}{f_0}<\lambda<\lambda^*$, 则问题 (3) 至少存在 $2n+2$ 个解 u_k^+ 和 u_k^- $(k=1,2,\cdots,n,n+1)$, 其中 u_k^+ 在区间 $(0,1)$ 内恰好有 $k-1$ 个零点, 且在 0 附近为正; u_k^- 在区间 $(0,1)$ 内恰好有 $k-1$ 个零点, 且在 0 附近为负. □

基金项目

国家自然科学基金资助项目(批准号: 12461036).

参考文献

[1] Shi, G. and Chen, S. (2002) Positive Solutions of Fourth-Order Superlinear Singular Boundary Value Problems. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **66**, 95-104. https://doi.org/10.1017/s0004972700020712

[2] Ruyun, M. and Haiyan, W. (1995) On the Existence of Positive Solutions of Fourth-Order Ordinary Differential Equations. *Applicable Analysis*, **59**, 225-231. https://doi.org/10.1080/00036819508840401

[3] Ma, R., Wang, J. and Long, Y. (2018) Lower and Upper Solution Method for the Problem of Elastic Beam with Hinged Ends. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, **20**, Article No. 46. https://doi.org/10.1007/s11784-018-0530-9

[4] Feng, M. and Chen, H. (2023) Existence and Nonexistence of Positive Solutions for Fourth-Order Elliptic Problems. *Electronic Journal of Differential Equations*, **2023**, Article 52. https://doi.org/10.58997/ejde.2023.52

[5] Wang, J. (2020) Existence and Uniqueness of Positive Solutions for Kirchhoff Type Beam Equations. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, No. 61, 1-14. https://doi.org/10.14232/ejqtde.2020.1.61

[6] Cabada, A., Precup, R., Saavedra, L. and Tersian, S.A. (2016) Multiple Positive Solutions to a Fourth-Order Boundary-Value Problem. *Electronic Journal of Differential Equations*, **2016**, 1-18.

[7] Ye, T. (2023) Multiple Solutions of a Nonlinear Elastic Beam Equation Supported at Two Ends. *Differential and Integral Equations*, **36**, 757-774. https://doi.org/10.57262/die036-0910-757

[8] Li, Y. and Gao, Y. (2019) Existence and Uniqueness Results for the Bending Elastic Beam Equations. *Applied Mathematics Letters*, **95**, 72-77. https://doi.org/10.1016/j.aml.2019.03.025

[9] Wei, M., Li, Y. and Li, G. (2021) Lower and Upper Solutions Method to the Fully Elastic Cantilever Beam Equation with Support. *Advances in Difference Equations*, **2021**, Article No. 301. https://doi.org/10.1186/s13662-021-03402-z

[10] Han, G. and Xu, Z. (2008) Multiple Solutions of Some Nonlinear Fourth-Order Beam Equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **68**, 3646-3656. https://doi.org/10.1016/j.na.2007.04.007

[11] Whyburn, G.T. (1958) Topological Analysis. Princeton, 1-119.

[12] Ma, R. and An, Y. (2009) Global Structure of Positive Solutions for Superlinear Second Order m-Point Boundary Value Problems. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, **34**, 279-290. https://doi.org/10.12775/tmna.2009.043

[13] Elias, U. (1978) Eigenvalue Problems for the Equation $Ly+\lambda p(x)y=0$. *Journal of Differential Equations*, **29**, 28-57. https://doi.org/10.1016/0022-0396(78)90039-6

[14] Ma, R. and Thompson, B. (2004) Nodal Solutions for Nonlinear Eigenvalue Problems. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **59**, 707-718. https://doi.org/10.1016/j.na.2004.07.030

[15] Rabinowitz, P.H. (1971) Some Global Results for Nonlinear Eigenvalue Problems. *Journal of Functional Analysis*, **7**, 487-513. https://doi.org/10.1016/0022-1236(71)90030-9

[16] Dai, G. and Han, X. (2013) Global Bifurcation and Nodal Solutions for Fourth-Order Problems with Sign-Changing Weight. *Applied Mathematics and Computation*, **219**, 9399-9407. https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.03.103

[17] Rynne, B.P. (2003) Global Bifurcation for $2m$th-Order Boundary Value Problems and Infinitely Many Solutions of Superlinear Problems. *Journal of Differential Equations*, **188**, 461-472. https://doi.org/10.1016/s0022-0396(02)00146-8