

模糊完全分配格的代数表示

孙艺洋, 魏晓伟*, 付阳健, 葛芸彤, 徐艺萌

天津理工大学数学科学学院, 天津

收稿日期: 2026年8月30日; 录用日期: 2026年9月27日; 发布日期: 2026年10月28日

摘要

设 L 为完全分配格。本文研究强 L -上集monad结构所对应的Eilenberg–Moore代数的刻画。首先, 给出强 L -上集的定义。其次, 利用强 L -上集构造一个monad结构。最后证明该monad结构对应的Eilenberg–Moore代数恰好是模糊完全分配格。

关键词

Monad结构, Eilenberg–Moore范畴, 模糊完全分配格

Algebraic Representation of Fuzzy Completely Distributive Lattices

Yiyang Sun, Xiaowei Wei*, Yangjian Fu, Yuntong Ge, Yimeng Xu

School of Mathematical Sciences, Tianjin Institute of Technology, Tianjin

Received: August 30, 2026; accepted: September 27, 2026; published: October 28, 2026

Abstract

Let L be a completely distributive lattice. This paper mainly investigates the characterization of Eilenberg – Moore algebras associated with the monad of strong L -

* 通讯作者。

upper sets. First, we introduce the notion of a strong L -upper set. Next, we construct a monad structure based on strong L -upper sets. Finally, we prove that the Eilenberg – Moore algebras corresponding to this monad structure are precisely fuzzy completely distributive lattices.

Keywords

Monad Structure, Eilenberg-Moore Category, Fuzzy CD-Lattice

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

Monad结构是范畴论中的基本工具，在序结构和拓扑空间的研究中发挥着十分重要的作用。在经典情形下，滤子monad结构具有关键作用。已有研究表明，集合范畴 $\mathbf{Set}$ 上超滤子monad结构对应的Eilenberg–Moore代数范畴与紧Hausdorff拓扑空间范畴同构 [1]。Hofmann和Tholen以滤子monad结构替代超滤子monad结构，并在文献 [2]中借助Kleisli复合对拓扑空间进行了系统研究。Day证明了滤子monad结构的Eilenberg–Moore代数恰好是连续格 [3]。

随后，monad结构理论与模糊集理论相结合。Seal给出了将monad结构的Kleisli扩张推广至格值关系范畴的一般构造 [4]。岳跃利 [5]基于 T_0 分离的代数闭包空间引入了一个monad结构，并证明该monad结构对应的Eilenberg–Moore代数恰为frame。庞斌 [6]给出了非空有限幂集monad结构的 L -值松扩张并刻画了其松代数。魏晓伟 [7]定义了有限生成 L -上集monad结构，并研究了其Eilenberg–Moore代数的代数刻画。

上集monad结构的概念在范畴论中具有重要意义。魏晓伟和岳跃利 [8]定义了若干类特殊的模糊上集monad结构，研究了它们之间的关系及其Eilenberg–Moore代数的相应代数刻画，其中主要借助RTT理论来研究，从理论上研究Eilenberg–Moore代数的表示问题。模糊完全分配格是序理论中不可或缺的一部分。基于monad结构对应的Eilenberg–Moore代数在刻画模糊序结构方面的优势。启发我们进一步的思考，哪个moand结构对应的Eilenberg–Moore代数是模糊完全分配格？这个问题值得我们深入研究。

2. 预备知识

本文中的 L 是完全分配格，即具有最小元和最大元的完备格 [9]；其最小元和最大元分别记为0与1，并满足

$$(\mathbf{CD1}) \bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J_i} \beta_{i,j} = \bigwedge_{f \in \prod_{i \in I} J_i} \bigvee_{i \in I} \beta_{i,f(i)},$$

其中 $\{\beta_{i,j} \mid j \in J_i, i \in I\} \subseteq L$ 。对于每个完全分配格, $(\mathbf{CD1})$ 等价于

$$(\mathbf{CD2}) \bigwedge_{i \in I} \bigvee_{j \in J_i} \beta_{i,j} = \bigvee_{f \in \prod_{i \in I} J_i} \bigwedge_{i \in I} \beta_{i,f(i)}.$$

集合 X 上的一个 L -子集是指从 X 到 L 的映射。 X 上全体 L -子集所成的族记为 L^X , 称为 X 的 L -幂集。 L 上的一切代数运算均可逐点扩张至 L^X 。具体地, 对任意 $f, g \in L^X$ 、 $\xi \in L$ 及 $x \in X$, 有

- (1) $(f \vee g)(x) = f(x) \vee g(x);$
- (2) $(f \wedge g)(x) = f(x) \wedge g(x);$
- (3) $(f \rightarrow \xi)(x) = f(x) \rightarrow \xi;$
- (4) $(\xi \rightarrow f)(x) = \xi \rightarrow f(x).$

对任意 $A, B \in L^X$, A 包含于 B 的程度 [10] 定义为

$$S(A, B) = \bigwedge_{x \in X} (A(x) \rightarrow B(x)).$$

对任意集合 X , X 的全体子集所成的幂集记为 $P(X)$, 其全体有限子集构成的集合记为 $P_{fin}(X)$ 。设 X, Y 为非空集合, 且 $f: X \rightarrow Y$ 为映射。对任意 $A \in P(X)$ 与 $B \in P(Y)$, 定义 $f^{\rightarrow}: P(X) \rightarrow P(Y)$ 及 $f^{\leftarrow}: P(Y) \rightarrow P(X)$ 为

$$f^{\rightarrow}(A) = \{f(x) \in Y \mid x \in A\} \text{ 和 } f^{\leftarrow}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

进一步地, 对任意 $A \in L^X$ 、 $B \in L^Y$ 、 $x \in X$ 及 $y \in Y$, 定义 $f_L^{\rightarrow}: L^X \rightarrow L^Y$ 及 $f_L^{\leftarrow}: L^Y \rightarrow L^X$ 为

$$f_L^{\rightarrow}(A)(y) = \bigvee_{f(x)=y} A(x) \text{ 和 } f_L^{\leftarrow}(B)(x) = B(f(x)).$$

L -子集 $f_L^{\rightarrow}(A)$ 称为 A 在 f 下的像, $f_L^{\leftarrow}(B)$ 称为 B 在 f 下的原像。映射 $\mathcal{K}: L^X \rightarrow L$ 的上确界和下确界分别定义为

$$\sup \mathcal{K} = \bigvee_{A \in L^X} (\mathcal{K}(A) \wedge A) \text{ 和 } \inf \mathcal{K} = \bigwedge_{A \in L^X} (\mathcal{K}(A) \rightarrow A).$$

若映射 $\mathcal{K}: L^X \rightarrow L$ 满足

$$\mathcal{K}(A) \wedge S(A, B) \leq \mathcal{K}(B),$$

则称 $\mathcal{K}$ 为一个 L -上集, 其中 $A, B \in L^X$ 。对于范畴论的相关知识, 可以参考文献 [11]。

定义 2.1 ([12]). 集合范畴 $\mathbf{Set}$ 上的一个 monad 结构是三元组 $\mathbb{S} = (\mathcal{S}, \eta, \mu)$, 其中 $\mathcal{S}: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ 为函子, η 和 μ 是两个自然变换, 分别称为 单位 与 乘法:

$$\eta: id_{\mathbf{Set}} \rightarrow \mathcal{S} \text{ 和 } \mu: \mathcal{S}\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S},$$

并满足

$$\mu \circ \eta_S = id_{\mathbf{Set}} = \mu \circ S\eta \text{ 且 } \mu \circ \mu_S = \mu \circ S\mu.$$

例2.2. (1) 幂集单子 $\mathbf{P} = (\mathbf{P}, \mathbf{d}, \mathbf{n})$ 定义如下。幂集函子 P 将 $\mathbf{Set}$ 中的每个对象 X 映为其幂集 PX ，并将每个映射 $f: X \rightarrow Y$ 映为 $Pf: PX \rightarrow PY$ ，其中对任意 $A \in PX$ ，

$$Pf(A) = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

对任意 $x \in X$ 和 $\mathcal{H} \in PPX$ ，映射 d_X 与 n_X 定义为

$$d_X(x) = \{x\} \text{ 且 } n_X(\mathcal{H}) = \bigcup \mathcal{H}.$$

(2) 双幂集单子 $\mathbf{P}^2 = (\mathbf{P}^2, \mathbf{e}, \mathbf{m})$ 定义如下。双幂集函子 P^2 将集合 X 映为 $P^2X = PPX$ ，其分量 $e_X: X \rightarrow P^2X$ 与 $m_X: P^2P^2X \rightarrow P^2X$ 定义为

$$e_X(x) = \{A \in PX \mid x \in A\} \text{ 且 } m_X(\mathfrak{H}) = \Sigma \mathfrak{H},$$

其中 $A \in \Sigma \mathfrak{H} \iff \{A \subseteq PX \mid A \in \mathcal{A}\}$ 。

定义2.3. 给定 $\mathbf{Set}$ 上的单子 $\mathbb{S} = (\mathbb{S}, \eta, \mu)$ 。若映射 $a: \mathbb{S}X \rightarrow X$ 满足

$$a \circ \eta_X = id_X \text{ 且 } a \circ \mathbb{S}a = a \circ \mu_X,$$

则称 a 为一个 $\mathbb{S}$ -代数（或Eilenberg–Moore代数）。也就是说，下图可交换：

$$X[dr]_{id_X}[r]^{\eta_X} \mathbb{S}X[d]^a X \qquad \mathbb{S}X[d]_{\mu_X}[r]^{\mathbb{S}a} \mathbb{S}X[d]^a \mathbb{S}X[r]_a X$$

若 $f: (X, a) \rightarrow (Y, b)$ 为满足

$$f \circ a = b \circ \mathbb{S}f$$

的映射 $f: X \rightarrow Y$ ，则称 f 为一个 $\mathbb{S}$ -同态。换言之，下图可交换：

$$\mathbb{S}X[d]_a[r]^{\mathbb{S}f} \mathbb{S}Y[d]_b[r]^f Y.$$

全体 $\mathbb{S}$ -代数及其 $\mathbb{S}$ -同态所成的范畴记为 $\mathbf{Set}^{\mathbb{S}}$ 。

3. 模糊完全分配格的 $\mathbb{S}$ -代数刻画

本节研究 $\mathbb{S}$ -代数与模糊完全分配格之间的范畴关系。首先回顾模糊完全分配格的概念。

定义3.1 ([13]). 设 X 为一个完全分配格。若映射 $i_X: L \rightarrow X$ 满足

$$i_X\left(\bigvee_{t \in T} \beta_t\right) = \bigvee_{t \in T} i_X(\beta_t) \text{ 且 } i_X\left(\bigwedge_{t \in T} \beta_t\right) = \bigwedge_{t \in T} i_X(\beta_t),$$

其中 $\{\beta_t\}_{t \in T} \subseteq L$ ，则称 (X, i_X) 为一个模糊完全分配格。

定义3.2 ([13]). 设 (X, i_X) 与 (Y, i_Y) 为模糊完全分配格。若一个保并且保交的映射 $f : X \rightarrow Y$ 满足

$$f \circ i_X = i_Y,$$

则称 f 为一个CD-态射。

全体模糊完全分配格及其CD-态射所成的范畴记为**FCDL**。下文将从S-代数诱导模糊完全分配格。

定义3.3. 若映射 $\mathcal{H} : L^X \rightarrow L$ 满足

$$\mathcal{H}(A) = \bigvee_{U \in P(X)} \mathcal{H}(\chi_U) \wedge S(\chi_U, A),$$

其中 $A \in L^X$, 则称 $\mathcal{H}$ 为一个强 L -上集。

本文用 SX 表示 (L^X, S) 上的全体强 L -上集所成的集合。显然, (L^X, SX) 是一个满层的Alexandroff L -拓扑空间。

- 定义 $\mathcal{S} : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$: 它将每个对象 X 映为 SX , 将每个映射 $f : X \rightarrow Y$ 映为 $\mathcal{S}f : SX \rightarrow SY$, 其中

$$\mathcal{S}f(\mathcal{H})(B) = \mathcal{H}(f_L^-(B)).$$

- 定义 $\eta_X : X \rightarrow SX$ 为

$$\eta_X(x)(A) = A(x),$$

其中 $x \in X$ 且 $A \in L^X$ 。

- 定义 $\mu_X : SSX \rightarrow SX$ 为

$$\mu_X(\mathfrak{H})(A) = \mathfrak{H}(A^*),$$

其中 $A^*(\mathcal{H}) = \mathcal{H}(A)$, 且 $\mathfrak{H} \in SSX$ 、 $\mathcal{H} \in SX$ 及 $A \in L^X$ 。

根据上面的构造, 我们可以证明 $\mathbf{S} = (\mathcal{S}, \eta, \mu)$ 是一个monad结构。下面, 我们将研究模糊完全分配格与S-代数之间的范畴关系。

定理3.4. 设 $a : SX \rightarrow X$ 为一个S-代数, 并定义 $x \leq y$ 当且仅当 $a([x] \vee [y]) = y$ 。则 $(X, \leq)$ 为完全分配格, 且 (X, i_X^a) 为模糊完全分配格, 其中对任意 $\alpha \in L$,

$$i_X^a(\alpha) = a(\alpha \wedge [T_X]).$$

证明. (1) $a : SX \rightarrow X$ 是单调的。

由于 $a : SX \rightarrow X$ 为S-代数, 故

$$a \circ \eta_X = id_X \quad \text{且} \quad a \circ \mathcal{S}a = a \circ \mu_X.$$

由 $a \circ \eta_X = id_X$, 对任意 $x \in X$ 有

$$a([x]) = a \circ \eta_X(x) = id_X(x) = x.$$

为理解等式 $a \circ \mathcal{S}a = a \circ \mu_X$, 先考察一个特殊情形。设 $\mathfrak{H} = \bigvee_{t \in T} [\mathcal{H}_t]$, 其中 $\{\mathcal{H}_t\}_{t \in T} \subseteq \mathcal{S}X$ 。则对任意 $A \in L^X$,

$$\mathcal{S}a(\mathfrak{H})(A) = \mathfrak{H}(a_L^{\leftarrow}(A)) = \bigvee_{t \in T} [\mathcal{H}_t](a_L^{\leftarrow}(A)) = \bigvee_{t \in T} a_L^{\leftarrow}(A)(\mathcal{H}_t) = \bigvee_{t \in T} A(a(\mathcal{H}_t)) = \bigvee_{t \in T} [a(\mathcal{H}_t)](A)$$

且

$$\mu_X(\mathfrak{H})(A) = \mathfrak{H}(A^*) = \bigvee_{t \in T} [\mathcal{H}_t](A^*) = \bigvee_{t \in T} A^*(\mathcal{H}_t) = \bigvee_{t \in T} \mathcal{H}_t(A).$$

因此, 对任意 $\{\mathcal{H}_t\}_{t \in T} \subseteq \mathcal{S}X$,

$$a\left(\bigvee_{t \in T} \mathcal{H}_t\right) = a\left(\bigvee_{t \in T} [a(\mathcal{H}_t)]\right).$$

于是, 当 $\mathcal{G} \leq \mathcal{K}$ 时,

$$a(\mathcal{K}) = a(\mathcal{K} \vee \mathcal{G}) = a([a(\mathcal{K})] \vee [a(\mathcal{G})]),$$

从而

$$a(\mathcal{G}) \leq a(\mathcal{K}).$$

故 $a : \mathcal{S}X \rightarrow X$ 单调。又因对任意 $\alpha \in L$ 与 $\mathcal{H} \in \mathcal{S}X$, $\alpha \wedge [\mathcal{H}] \in \mathcal{S}X$, 故对任意 $A \in L^X$,

$$\mathcal{S}a(\alpha \wedge [\mathcal{H}])(A) = \alpha \wedge [\mathcal{H}](a_L^{\leftarrow}(A)) = \alpha \wedge a_L^{\leftarrow}(A)(\mathcal{H}) = \alpha \wedge A(a(\mathcal{H})) = (\alpha \wedge [a(\mathcal{H})])(A)$$

且

$$\mu_X(\alpha \wedge [\mathcal{H}])(A) = \alpha \wedge [\mathcal{H}](A^*) = \alpha \wedge A^*(\mathcal{H}) = (\alpha \wedge \mathcal{H})(A).$$

因此, 对任意 $\alpha \in L$ 与 $\mathcal{H} \in \mathcal{S}X$,

$$a(\alpha \wedge [a(\mathcal{H})]) = a \circ \mathcal{S}a(\alpha \wedge [\mathcal{H}]) = a \circ \mu_X(\alpha \wedge [\mathcal{H}]) = a(\alpha \wedge \mathcal{H}).$$

(2) $(X, \leq)$ 是一个偏序集。

(i) 任取 $x \in X$ 。由 $a([x]) = x$, 有

$$a([x] \vee [x]) = a([x]) = x,$$

故对任意 $x \in X$, $x \leq x$ 。

(ii) 若 $x \leq y$ 且 $y \leq x$, 则

$$y = a([x] \vee [y]) = a([y] \vee [x]) = x,$$

故 $x = y$ 。

(iii) 若 $x \leq y$ 且 $y \leq z$, 则

$$y = a([x] \vee [y]) \quad \text{且} \quad z = a([y] \vee [z]).$$

又有

$$\begin{aligned} z &= a([z]) \\ &\leq a([x] \vee [z]) \\ &\leq a([x] \vee [y] \vee [z]) \\ &= a(a([x] \vee [y]) \vee [z]) \\ &= a([y] \vee [z]) \\ &= z. \end{aligned}$$

于是

$$a([x] \vee [z]) = z,$$

即 $x \leq z$ 。因此, $(X, \leq)$ 为偏序集。

(3) $(X, \leq)$ 是一个完备格。

(i) 任取 $x \in X$, 则

$$x = a([x]) = a([x] \vee 0_{L^X}) = a([x] \vee [a(0_{L^X})]),$$

从而对任意 $x \in X$, $a(0_{L^X}) \leq x$ 。故 $a(0_{L^X})$ 为 X 的最小元。

(ii) 任取 $\{x_t\}_{t \in T} \subseteq X$, 其中 $T \neq \emptyset$ 。由 $a: \mathcal{S}X \rightarrow X$ 的单调性, 对每个 $t \in T$ 有

$$x_t = a([x_t]) \leq a\left(\bigvee_{t \in T} [x_t]\right).$$

这表明 $a\left(\bigvee_{t \in T} [x_t]\right)$ 是 $\{x_t\}_{t \in T}$ 的一个上界。对该族的任意上界 x , 有

$$a([x] \vee [x_t]) = x,$$

其中 $t \in T$ 。于是

$$\begin{aligned}
 a\left([x] \vee [a(\bigvee_{t \in T} [x_t])]\right) &= a\left([x] \vee \bigvee_{t \in T} [x_t]\right) \\
 &= a\left(\bigvee_{t \in T} [x] \vee [x_t]\right) \\
 &= a\left(\bigvee_{t \in T} [a([x] \vee [x_t])]\right) \\
 &= a([x]) \\
 &= x,
 \end{aligned}$$

即 $a(\bigvee_{t \in T} [x_t]) \leq x$ 。因此,

$$a\left(\bigvee_{t \in T} [x_t]\right) = \bigvee_{t \in T} x_t,$$

即 $(X, \leq)$ 是一个完备格。进一步地, 对任意 $\{\mathcal{G}_t\}_{t \in T} \subseteq \mathcal{S}X$,

$$a\left(\bigvee_{t \in T} \mathcal{G}_t\right) = a\left(\bigvee_{t \in T} [a(\mathcal{G}_t)]\right) = \bigvee_{t \in T} a(\mathcal{G}_t),$$

这说明 $a : \mathcal{S}X \rightarrow X$ 保任意并。

(4) $a : \mathcal{S}X \rightarrow X$ 保任意交。

设 $\{F_t\}_{t \in T} \subseteq \mathcal{S}X$, 并令 $\mathcal{H} = \bigwedge_{t \in T} [F_t]$ 。任取 $A \in L^X$, 则

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}a(\mathcal{H})(A) &= \mathcal{H}(a_L^\leftarrow(A)) \\
 &= \left(\bigwedge_{t \in T} [F_t]\right)(a_L^\leftarrow(A)) \\
 &= \bigwedge_{t \in T} [F_t](a_L^\leftarrow(A)) \\
 &= \bigwedge_{t \in T} a_L^\leftarrow(A)(F_t) \\
 &= \bigwedge_{t \in T} A(a(F_t)) \\
 &= \bigwedge_{t \in T} [a(F_t)](A)
 \end{aligned}$$

且

$$\mu_X(\mathcal{H})(A) = \mathcal{H}(A^*) = \left(\bigwedge_{t \in T} [F_t]\right)(A^*) = \bigwedge_{t \in T} [F_t](A^*) = \bigwedge_{t \in T} A^*(F_t) = \bigwedge_{t \in T} F_t(A).$$

故

$$a\left(\bigwedge_{t \in T} F_t\right) = a\left(\bigwedge_{t \in T} [a(F_t)]\right).$$

一方面, 由 $a: \mathcal{S}X \rightarrow X$ 单调, 有

$$a\left(\bigwedge_{t \in T} F_t\right) \leq \bigwedge_{t \in T} a(F_t),$$

从而 $a(\bigwedge_{t \in T} F_t)$ 是所有 $a(F_t)$ 的下界。另一方面, 设 x 为所有 $a(F_t)$ 的任一下界。则对任意 $t \in T$,

$$a([x] \vee [a(F_t)]) = a(F_t).$$

并且

$$\begin{aligned} a\left([x] \vee [a(\bigwedge_{t \in T} F_t)]\right) &= a\left([x] \vee (\bigwedge_{t \in T} F_t)\right) \\ &= a\left(\bigwedge_{t \in T} ([x] \vee F_t)\right) \quad (\text{因为 } L \text{ 是完全分配格}) \\ &= a\left(\bigwedge_{t \in T} [a([x] \vee F_t)]\right) \\ &= a\left(\bigwedge_{t \in T} [a([x] \vee [a(F_t)])]\right) \\ &= a\left(\bigwedge_{t \in T} [a(F_t)]\right) \\ &= a\left(\bigwedge_{t \in T} F_t\right), \end{aligned}$$

这意味着 $x \leq a(\bigwedge_{t \in T} F_t)$ 。故对任意 $\{F_t\}_{t \in T} \subseteq \mathcal{S}X$,

$$a\left(\bigwedge_{t \in T} F_t\right) = \bigwedge_{t \in T} a(F_t),$$

即 $a: \mathcal{S}X \rightarrow X$ 保任意交。

(5) $(X, \leq)$ 为完全分配格。

由于 L 为完全分配格, L^{L^X} 也为完全分配格。任取 $\{\mathcal{H}_{i,j} \in \mathcal{S}X \mid j \in J_i, i \in I\}$, 则

$$a\left(\bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J_i} \mathcal{H}_{i,j}\right) = \bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J_i} a(\mathcal{H}_{i,j})$$

且

$$a\left(\bigwedge_{f \in \prod_{i \in I} J_i} \bigvee_{i \in I} \mathcal{H}_{i,f(i)}\right) = \bigwedge_{f \in \prod_{i \in I} J_i} \bigvee_{i \in I} a(\mathcal{H}_{i,f(i)}),$$

从而

$$\bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J_i} a(\mathcal{H}_{i,j}) = a\left(\bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J_i} \mathcal{H}_{i,j}\right) = a\left(\bigwedge_{f \in \prod_{i \in I} J_i} \bigvee_{i \in I} \mathcal{H}_{i,f(i)}\right) = \bigwedge_{f \in \prod_{i \in I} J_i} \bigvee_{i \in I} a(\mathcal{H}_{i,f(i)}).$$

进一步地, 任取 $\{x_{i,j} \in X \mid j \in J_i, i \in I\}$, 有

$$\bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J_i} x_{i,j} = \bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J_i} a([x_{i,j}]) = \bigwedge_{f \in \prod_{i \in I} J_i} \bigvee_{i \in I} a([x_{i,f(i)}]) = \bigwedge_{f \in \prod_{i \in I} J_i} \bigvee_{i \in I} x_{i,f(i)}.$$

故 $(X, \leq)$ 为完全分配格。

(6) (X, i_X^a) 为模糊完全分配格。

对任意 $\alpha \in L$, 定义 $i_X^a : L \rightarrow X$ 为

$$i_X^a(\alpha) = a(\alpha \wedge [T_X]).$$

下证 (X, i_X^a) 为模糊完全分配格。

(i) 任取 $\{\alpha_t\}_{t \in T} \subseteq L$, 则

$$\begin{aligned} i_X^a\left(\bigvee_{t \in T} \alpha_t\right) &= a\left(\bigvee_{t \in T} \alpha_t \wedge [T_X]\right) \\ &= a\left(\bigvee_{t \in T} (\alpha_t \wedge [T_X])\right) \quad (\text{因为 } L \text{ 完全分配}) \\ &= \bigvee_{t \in T} a(\alpha_t \wedge [T_X]) \\ &= \bigvee_{t \in T} i_X^a(\alpha_t), \end{aligned}$$

即 i_X^a 保任意并。

(ii) 任取 $\{\alpha_t\}_{t \in T} \subseteq L$, 则

$$i_X^a\left(\bigwedge_{t \in T} \alpha_t\right) = a\left(\bigwedge_{t \in T} \alpha_t \wedge [T_X]\right) = \bigwedge_{t \in T} a(\alpha_t \wedge [T_X]) = \bigwedge_{t \in T} i_X^a(\alpha_t),$$

即 i_X^a 保任意交。因此, (X, i_X^a) 为一个模糊完全分配格。 $\square$

定理3.5. 若 $f : (X, a) \rightarrow (Y, b)$ 为一个 $\mathbb{S}$ -同态, 则 $f : (X, i_X^a) \rightarrow (Y, i_Y^b)$ 为一个 CD -态射。

证明. (1) 任取 $\{x_t\}_{t \in T} \subseteq X$, 则

$$\begin{aligned}
 f\left(\bigvee_{t \in T} x_t\right) &= f\left(\bigvee_{t \in T} a([x_t])\right) \\
 &= f\left(a\left(\bigvee_{t \in T} [x_t]\right)\right) \\
 &= b \circ \mathcal{S}f\left(\bigvee_{t \in T} [x_t]\right) \\
 &= b\left(\bigvee_{t \in T} [f(x_t)]\right) \\
 &= \bigvee_{t \in T} b([f(x_t)]) \\
 &= \bigvee_{t \in T} f(x_t).
 \end{aligned}$$

(2) 任取 $\{x_t\}_{t \in T} \subseteq X$, 则

$$\begin{aligned}
 f\left(\bigwedge_{t \in T} x_t\right) &= f\left(\bigwedge_{t \in T} a([x_t])\right) \\
 &= f\left(a\left(\bigwedge_{t \in T} [x_t]\right)\right) \\
 &= b \circ \mathcal{S}f\left(\bigwedge_{t \in T} [x_t]\right) \\
 &= b\left(\bigwedge_{t \in T} [f(x_t)]\right) \\
 &= \bigwedge_{t \in T} b([f(x_t)]) \\
 &= \bigwedge_{t \in T} f(x_t).
 \end{aligned}$$

(3) 任取 $\alpha \in L$, 则

$$f \circ i_X^a(\alpha) = f(a(\alpha \wedge [T_X])) = b \circ \mathcal{S}f(\alpha \wedge [T_X]) = b(\alpha \wedge [f(T_X)]) = b(\alpha \wedge [T_Y]) = i_Y^b(\alpha).$$

因此, $f \circ i_X^a = i_Y^b$, 即 $f : (X, i_X^a) \rightarrow (Y, i_Y^b)$ 为 CD-态射。 $\square$

由定理 3.4 与定理 3.5, 可定义函子 $\mathbf{K} : \mathbf{Set}^{\mathbb{S}} \rightarrow \mathbf{FCDL}$ 如下:

$$\mathbf{K} : \begin{cases} \mathbf{Set}^{\mathbb{S}} & \longrightarrow & \mathbf{FCDL} \\ (X, a) & \longmapsto & (X, i_X^a) \\ f & \longmapsto & f. \end{cases}$$

反之, 可由模糊完全分配格如下地诱导 $\mathbb{S}$ -代数。

定理3.6. 设 (X, i_X) 为一个模糊完全分配格。对任意 $\mathcal{H} \in \mathcal{S}X$ ，定义 $a_{i_X} : \mathcal{S}X \rightarrow X$ 为

$$a_{i_X}(\mathcal{H}) = \bigvee_{U \in P(X)} i_X(\mathcal{H}(\chi_U)) \wedge (\wedge U).$$

则 (X, a_{i_X}) 为一个 $\mathbb{S}$ -代数。

证明. (1) 任取 $x \in X$ ，则

$$a_{i_X} \circ \eta_X(x) = a_{i_X}([x]) = \bigvee_{U \in P(X)} i_X([x](\chi_U)) \wedge (\wedge U) = \bigvee_{x \in U \in P(X)} (T_X \wedge (\wedge U)) = x,$$

即 $a_{i_X} \circ \eta_X = id_X$ 。

(2) 任取 $\Phi \in \mathcal{S}\mathcal{S}X$ ，则

$$\begin{aligned} a_{i_X} \circ \mathcal{S}a_{i_X}(\Phi) &= \bigvee_{U \in P(X)} i_X(\mathcal{S}a_{i_X}(\Phi)(\chi_U)) \wedge (\wedge U) \\ &= \bigvee_{U \in P(X)} i_X(\Phi(a_{i_X}^{\leftarrow}(\chi_U))) \wedge (\wedge U) \\ &= \bigvee_{U \in P(X)} i_X\left(\bigvee_{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{S}X} \Phi(\chi_{\mathcal{B}}) \wedge S(\chi_{\mathcal{B}}, a_{i_X}^{\leftarrow}(\chi_U))\right) \wedge (\wedge U) \\ &= \bigvee_{U \in P(X)} \left(\bigvee_{\mathcal{B} \subseteq a_{i_X}^{\leftarrow}(\chi_U)} i_X(\Phi(\chi_{\mathcal{B}}))\right) \wedge (\wedge U) \\ &= \bigvee_{U \in P(X)} \bigvee_{\mathcal{B} \subseteq a_{i_X}^{\leftarrow}(\chi_U)} i_X(\Phi(\chi_{\mathcal{B}})) \wedge (\wedge U). \quad (\text{因为 } X \text{ 完全分配}) \end{aligned}$$

一方面，任取 $U \in P(X)$ 和满足 $\mathcal{B} \subseteq a_{i_X}^{\leftarrow}(\chi_U)$ 的 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{S}X$ 。则对任意 $\mathcal{H} \in \mathcal{B}$ ，

$$a_{i_X}(\mathcal{H}) \in U,$$

从而

$$\begin{aligned} \wedge U &\leq \bigwedge_{\mathcal{H} \in \mathcal{B}} a_{i_X}(\mathcal{H}) \\ &= \bigwedge_{\mathcal{H} \in \mathcal{B}} \bigvee_{U_{\mathcal{H}} \in P(X)} i_X(\mathcal{H}(\chi_{U_{\mathcal{H}}})) \wedge (\wedge U_{\mathcal{H}}) \\ &= \bigvee_{H \in \prod_{\mathcal{H} \in \mathcal{B}} P(X)} \bigwedge_{\mathcal{H} \in \mathcal{B}} (i_X(\mathcal{H}(\chi_{H(\mathcal{H})})) \wedge (\wedge H(\mathcal{H}))) \\ &= \bigvee_{H \in \prod_{\mathcal{H} \in \mathcal{B}} P(X)} \left(\bigwedge_{\mathcal{H} \in \mathcal{B}} i_X(\mathcal{H}(\chi_{H(\mathcal{H})}))\right) \wedge \left(\wedge \bigcup_{\mathcal{H} \in \mathcal{B}} H(\mathcal{H})\right) \\ &= \bigvee_{H \in \prod_{\mathcal{H} \in \mathcal{B}} P(X)} i_X\left(\bigwedge_{\mathcal{H} \in \mathcal{B}} \mathcal{H}(\chi_{H(\mathcal{H})})\right) \wedge \left(\wedge \bigcup_{\mathcal{H} \in \mathcal{B}} H(\mathcal{H})\right). \end{aligned}$$

进一步,

$$\begin{aligned}
 i_X(\Phi(\chi_B)) \wedge (\wedge U) &\leq i_X(\Phi(\chi_B)) \wedge \bigvee_{H \in \prod_{\mathcal{H} \in \mathcal{B}} P(X)} i_X\left(\bigwedge_{\mathcal{H} \in \mathcal{B}} \mathcal{H}(\chi_{H(\mathcal{H})})\right) \wedge \left(\bigwedge \bigcup_{\mathcal{H} \in \mathcal{B}} H(\mathcal{H})\right) \\
 &= \bigvee_{H \in \prod_{\mathcal{H} \in \mathcal{B}} P(X)} \left(i_X(\Phi(\chi_B)) \wedge i_X\left(\bigwedge_{\mathcal{H} \in \mathcal{B}} \mathcal{H}(\chi_{H(\mathcal{H})})\right) \wedge \left(\bigwedge \bigcup_{\mathcal{H} \in \mathcal{B}} H(\mathcal{H})\right)\right) \\
 &\leq \bigvee_{W \in P(X)} i_X(\Phi(\chi_B)) \wedge i_X\left(\bigwedge_{\mathcal{H} \in \mathcal{B}} \mathcal{H}(\chi_W)\right) \wedge (\wedge W).
 \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
 a_{i_X} \circ \mu_X(\Phi) &= \bigvee_{U \in P(X)} i_X(\mu_X(\Phi)(\chi_U)) \wedge (\wedge U) \\
 &= \bigvee_{U \in P(X)} i_X(\Phi(\chi_U^*)) \wedge (\wedge U) \\
 &= \bigvee_{U \in P(X)} i_X\left(\bigvee_{G \in P(SX)} \Phi(\chi_G) \wedge S(\chi_G, \chi_U^*)\right) \wedge (\wedge U) \\
 &\geq \bigvee_{U \in P(X)} i_X\left(\Phi(\chi_B) \wedge S(\chi_B, \chi_U^*)\right) \wedge (\wedge U) \\
 &= \bigvee_{U \in P(X)} i_X\left(\Phi(\chi_B) \wedge \bigwedge_{\mathcal{H} \in \mathcal{B}} \mathcal{H}(\chi_U)\right) \wedge (\wedge U),
 \end{aligned}$$

即 $a_{i_X} \circ \mathcal{S}a_{i_X} \leq a_{i_X} \circ \mu_X$ 。另一方面, 任取 $\Phi \in \mathcal{S}SX$, 则

$$a_{i_X} \circ \mu_X(\Phi) = \bigvee_{U \in P(X)} \bigvee_{G \in P(SX)} i_X\left(\Phi(\chi_G) \wedge S(\chi_G, \chi_U^*)\right) \wedge (\wedge U).$$

任取 $U \in P(X)$ 和 $G \in P(SX)$ 。令 $\overline{U} = \{a_{i_X}(\mathcal{H}) \mid \mathcal{H} \in G\}$ 。则

$$G \subseteq a_{i_X}^+(\overline{U}),$$

从而

$$\begin{aligned}
 a_{i_X} \circ \mathcal{S}a_{i_X}(\Phi) &\geq i_X(\Phi(\chi_G)) \wedge (\wedge \overline{U}) \\
 &= i_X(\Phi(\chi_G)) \wedge \bigwedge_{\mathcal{H} \in G} a_{i_X}(\mathcal{H}) \\
 &= i_X(\Phi(\chi_G)) \wedge \bigwedge_{\mathcal{H} \in G} \bigvee_{U_{\mathcal{H}} \in P(X)} i_X(\mathcal{H}(\chi_{U_{\mathcal{H}}})) \wedge (\wedge U_{\mathcal{H}}) \\
 &\geq i_X(\Phi(\chi_G)) \wedge \bigwedge_{\mathcal{H} \in G} i_X(\mathcal{H}(\chi_U)) \wedge (\wedge U) \\
 &= i_X(\Phi(\chi_G)) \wedge i_X\left(\bigwedge_{\mathcal{H} \in G} \mathcal{H}(\chi_U)\right) \wedge (\wedge U) \\
 &= i_X(\Phi(\chi_G)) \wedge i_X(S(\chi_G, \chi_U^*)) \wedge (\wedge U) \\
 &= i_X(\Phi(\chi_G) \wedge S(\chi_G, \chi_U^*)) \wedge (\wedge U),
 \end{aligned}$$

即 $a_{i_X} \circ \mu_X \leq a_{i_X} \circ \mathcal{S}a_{i_X}$ 。因此, (X, a_{i_X}) 为 $\mathbb{S}$ -代数。 $\square$

定理3.7. 若 $f : (X, i_X) \rightarrow (Y, i_Y)$ 为一个 CD -态射, 则 $f : (X, a_{i_X}) \rightarrow (Y, b_{i_Y})$ 为一个 $\mathbb{S}$ -同态。

证明. 任取 $\mathcal{H} \in \mathcal{S}X$, 则

$$\begin{aligned} f \circ a_{i_X}(\mathcal{H}) &= f\left(\bigvee_{U \in P(X)} i_X(\mathcal{H}(\chi_U)) \wedge (\wedge U)\right) \\ &= \bigvee_{U \in P(X)} f(i_X(\mathcal{H}(\chi_U))) \wedge (\wedge f^{\rightarrow}(U)) \\ &= \bigvee_{U \in P(X)} i_Y(\mathcal{H}(\chi_U)) \wedge (\wedge f^{\rightarrow}(U)) \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} b_{i_Y} \circ \mathcal{S}f(\mathcal{H}) &= \bigvee_{V \in P(Y)} i_Y(\mathcal{S}f(\mathcal{H})(\chi_V)) \wedge (\wedge V) \\ &= \bigvee_{V \in P(Y)} i_Y(\mathcal{H}(f_L^{\leftarrow}(\chi_V))) \wedge (\wedge V) \\ &= \bigvee_{V \in P(Y)} i_Y(\mathcal{H}(\chi_{f^{\leftarrow}(V)})) \wedge (\wedge V). \end{aligned}$$

容易验证 $f \circ a_{i_X} = b_{i_Y} \circ \mathcal{S}f$, 即 $f : (X, a_{i_X}) \rightarrow (Y, b_{i_Y})$ 为一个 $\mathbb{S}$ -同态。 $\square$

由定理3.6与定理3.7, 可定义函子 $\mathbf{M} : \mathbf{FCDL} \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathbb{S}}$ 如下:

$$\mathbf{M} : \begin{cases} \mathbf{FCDL} & \rightarrow & \mathbf{Set}^{\mathbb{S}} \\ (X, i_X) & \mapsto & (X, a_{i_X}) \\ f & \mapsto & f. \end{cases}$$

下面给出本节的主要结论。

定理3.8. $\mathbf{FCDL}$ 与 $\mathbf{Set}^{\mathbb{S}}$ 同构。

证明. 只需证明 $\mathbf{M} \circ \mathbf{K} = id_{\mathbf{Set}^{\mathbb{S}}}$ 及 $\mathbf{K} \circ \mathbf{M} = id_{\mathbf{FCDL}}$ 。即对任意 $\mathbb{S}$ -代数 (X, a) 及任意模糊完全分配格 (X, i_X) , 有

$$(1) \ a = a_{i_X^a};$$

$$(2) \ i_X = i_X^{a_{i_X}}.$$

(1) 任取 $\mathcal{H} \in \mathcal{S}X$, 则

$$\begin{aligned}
 a_{i_X^a}(\mathcal{H}) &= \bigvee_{U \in P(X)} i_X^a(\mathcal{H}(\chi_U)) \wedge (\wedge U) \\
 &= \bigvee_{U \in P(X)} a(\mathcal{H}(\chi_U) \wedge [T_X]) \wedge (\wedge U) \\
 &= a\left(\bigvee_{U \in P(X)} \mathcal{H}(\chi_U) \wedge [T_X] \wedge [\wedge U]\right) \\
 &= a\left(\bigvee_{U \in P(X)} \mathcal{H}(\chi_U) \wedge \left(\bigwedge_{x \in U} [x]\right)\right) \\
 &= a\left(\bigvee_{U \in P(X)} \mathcal{H}(\chi_U) \wedge S(\chi_U, -)\right) \\
 &= a(\mathcal{H}),
 \end{aligned}$$

即 $a = a_{i_X^a}$ 。

(2) 任取 $\alpha \in L$, 则

$$\begin{aligned}
 i_X^{a_{i_X}}(\alpha) &= a_{i_X}(\alpha \wedge [T_X]) \\
 &= \bigvee_{U \in P(X)} i_X((\alpha \wedge [T_X])(\chi_U)) \wedge (\wedge U) \\
 &= \bigvee_{U \in P(X)} i_X(\alpha \wedge \chi_U(T_X)) \wedge (\wedge U) \\
 &= \bigvee_{T_X \in U \in P(X)} (i_X(\alpha) \wedge (\wedge U)) \\
 &= i_X(\alpha) \wedge T_X \\
 &= i_X(\alpha),
 \end{aligned}$$

即 $i_X = i_X^{a_{i_X}}$ 。因此, **FCDL** 与 **Set**^S 同构。 □

致 谢

本研究得到天津理工大学校级大学生创新创业训练计划项目资助, 项目编号:202610060176。

参考文献

- [1] Manes, E.G. (1974) Compact Hausdorff Objects. *General Topology and Its Applications*, **4**, 341-360. [https://doi.org/10.1016/0016-660x\(74\)90011-7](https://doi.org/10.1016/0016-660x(74)90011-7)

-
- [2] Hofmann, D. and Tholen, W. (2006) Kleisli Compositions for Topological Spaces. *Topology and Its Applications*, **153**, 2952-2961. <https://doi.org/10.1016/j.topol.2005.06.018>
 - [3] Day, A. (1975) Filter Monads, Continuous Lattices and Closure Systems. *Canadian Journal of Mathematics*, **27**, 50-59. <https://doi.org/10.4153/cjm-1975-008-8>
 - [4] Hofmann, D. and Seal, G.J. (2015) A Cottage Industry of Lax Extensions. *Categories and General Algebraic Structures*, **3**, 113-151.
 - [5] Yue, Y. (2025) Scott Algebraic Closure Space and Its Applications. *Fuzzy Sets and Systems*, **498**, Article ID: 109127. <https://doi.org/10.1016/j.fss.2024.109127>
 - [6] Pang, B. (2023) Quantale-Valued Convex Structures as Lax Algebras. *Fuzzy Sets and Systems*, **473**, Article ID: 108737. <https://doi.org/10.1016/j.fss.2023.108737>
 - [7] Wei, X. (2025) Algebraic Representation of Finite-Complete L -Ordered Sets by Monad. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, **55**, 638-654. <https://doi.org/10.15672/hujms.1635468>
 - [8] Wei, X. and Yue, Y. (2025) Algebraic Representations of (Fuzzy) Completely Distributive Lattices. *Fuzzy Sets and Systems*, **503**, Article ID: 109245. <https://doi.org/10.1016/j.fss.2024.109245>
 - [9] Birkhoff, G. (1967) Lattice Theory, vol. XXV. American Mathematical Society.
 - [10] Goguen, J.A. (1967) L -Fuzzy Sets. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **18**, 145-174. [https://doi.org/10.1016/0022-247x\(67\)90189-8](https://doi.org/10.1016/0022-247x(67)90189-8)
 - [11] Adámek, J., Herrlich, H. and Strecker, G.E. (1990) Abstract and Concrete Categories. Wiley.
 - [12] Hofmann, D., Seal, G.J. and Tholen, W. (2013) Monoidal Topology: A Categorical Approach to Order, Metric, and Topology. Cambridge University Press.
 - [13] Zhang, D.X. and Liu, Y.M. (1994) L -Fuzzy Modification of Completely Distributive Lattices. *Mathematische Nachrichten*, **168**, 79-95. <https://doi.org/10.1002/mana.19941680106>