

一类半正二阶 Dirichlet 系统正解的存在性

刘罗曼

西北师范大学 数学与统计学院, 甘肃 兰州

收稿日期: 2026年9月16日; 录用日期: 2026年10月15日; 发布日期: 2026年10月28日

摘 要

本文研究一类半正二阶 Dirichlet 系统

$$\begin{cases} -u''(t) = \lambda a(t)f(u(t), v(t)), & t \in (0, 1), \\ -v''(t) = \lambda b(t)g(u(t), v(t)), & t \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0, \\ v(0) = v(1) = 0 \end{cases}$$

正解的存在性, 其中 $\lambda > 0$ 是参数, $a, b \in L^1(0, 1)$, $f, g \in C([0, +\infty) \times [0, +\infty), \mathbb{R})$ 且存在 $q \in L^1(0, 1)$, 使得 $f(u(t), v(t)) \geq -q(t)$, $g(u(t), v(t)) \geq -q(t)$. 证得存在 $\lambda_0 > 0$, 使得当 $0 < \lambda < \lambda_0$ 时, 该问题至少存在一个正解. 主要结果的证明基于 Krasnosel'skii 型不动点定理.

关键词

正解, 半正, Dirichlet 系统, 不动点定理

Existence of Positive Solutions for a Class of Semipositone Second-Order Dirichlet Systems

Luoman Liu

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

文章引用: 刘罗曼. 一类半正二阶 Dirichlet 系统正解的存在性[J]. 理论数学, 2026, 16(10): 115-126.

DOI: 10.12677/pm.2026.1610218

Abstract

We are concerned with the existence of positive solutions for a class of semipositone second-order Dirichlet systems:

$$\begin{cases} -u''(t) = \lambda a(t)f(u(t), v(t)), & t \in (0, 1), \\ -v''(t) = \lambda b(t)g(u(t), v(t)), & t \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0, \\ v(0) = v(1) = 0, \end{cases}$$

where $\lambda > 0$ is a parameter, $a, b \in L^1(0, 1)$, $f, g \in C([0, +\infty) \times [0, +\infty), \mathbb{R})$ such that there exists $q \in L^1(0, 1)$ satisfying $f(u(t), v(t)) \geq -q(t)$ and $g(u(t), v(t)) \geq -q(t)$. We prove that there exists $\lambda_0 > 0$ such that the problem has at least one positive solution for $0 < \lambda < \lambda_0$. The proof of the main result is based on the Krasnosel'skii type fixed point theorem.

Keywords

Positive Solution, Semipositone, Dirichlet Systems, Fixed Point Theorem

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言及主要结果

二阶常微分系统在描述物理学、生物学、工程学等领域的耦合现象中具有重要应用. 带有边界条件的非线性二阶系统, 其正解的存在性一直是非线性分析中的核心问题之一. 因此引起了众多学者的广泛关注 [1–14].

特别地, Dunninger 和 Wang [1] 研究了如下二阶系统

$$\begin{cases} u''(t) + \lambda a(t) f(u(t), v(t)) = 0, & t \in (0, 1), \\ v''(t) + \lambda b(t) g(u(t), v(t)) = 0, & t \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0, \\ v(0) = v(1) = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

正解的存在性, 其中 λ 为正参数, $f, g: [0, +\infty) \times [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ 连续且非减, $a, b: [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ 连续. 运用锥上不动点指数理论获得了如下结果:

定理A [1] 假设下列条件之一成立:

$$(H1) \quad f_{\infty} = \lim_{(u,v) \rightarrow \infty} \frac{f(u, v)}{u + v} = \infty,$$

$$(H2) \quad g_{\infty} = \lim_{(u,v) \rightarrow \infty} \frac{g(u, v)}{u + v} = \infty,$$

则当 λ 充分小时, 问题 (1.1) 至少存在一个正解. 这一结果表明, 在正问题框架下, 非线性项的非负性与超线性增长条件足以保证正解的存在性.

然而, 在实际应用中, 非线性项可能取负值, 特别是允许 $f(0) < 0$ 时, 该类问题被称为半正问题, 其核心的困难在于: 标准的极大值原理不再适用, 解在区间内部可能变号, 因此半正问题正解的存在性研究更为复杂. 在 2025 年, Rodríguez-López [2] 研究了如下系统

$$\begin{cases} -u(t)'' = f(t, u(t), v(t)), & t \in (0, 1), \\ -v(t)'' = g(t, u(t), v(t)), & t \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0, \\ v(0) = v(1) = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

解的存在性, 其中 $f: [0, 1] \times (0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ 与 $g: [0, 1] \times (0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 连续. 运用上下解方法和 Krasnosel'skii 不动点定理, 获得了问题 (1.2) 解的存在性结果.

半正问题的研究动机可追溯至燃烧理论中的点火模型, 其中反应速率因边界热损失而允许取负值, 但因物理耗散有界, 自然满足下方一致估计条件. 类似地, 在种群生态学的稳态扩散模型中, Allee 效应导致低密度时种群增长率为负, 而物种间的正反馈机制则使增长率呈超线性增长, 这正是本文条件 (A3)、(A4) 的现实来源.

半正二阶微分系统的研究还可见于 Su [3] 与 Liu [4], 文献 [3] 利用不动点指数定理研究了一般半正系统正解的存在性; 文献 [4] 则针对非线性项在原点附近可能奇异的情形, 通过变量代换将奇异半正问题转化为奇异正问题后再求解. 这些工作均未引入参数 λ , 其结论是在固定方程下给出正解存在的充分条件.

值得注意的是, Dunninger 和 Wang [1] 所研究的非线性项 f, g 均非负, 而 Rodríguez-López [2]

虽然允许其中一个非线性项 g 取负值, 但仍要求另一个非线性项 f 非负. 一个自然的问题是: 当两个非线性项 f 和 g 都允许取负值时, 正解的存在性如何? 据我们所知, 对于两个非线性项均为半正情形的二阶 Dirichlet 微分系统, 其正解存在性的研究尚不多见. 基于此, 本文拟研究如下半正二阶 Dirichlet 系统

$$\begin{cases} -u''(t) = \lambda a(t)f(u(t), v(t)), & t \in (0, 1), \\ -v''(t) = \lambda b(t)g(u(t), v(t)), & t \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0, \\ v(0) = v(1) = 0 \end{cases}$$

正解的存在性, 其中 $\lambda > 0$ 是一个参数. 本文总假设:

(A1) $a, b \in L^1(0, 1)$, $a(t) > 0$, $b(t) > 0$, a.e., $t \in [0, 1]$.

(A2) $f, g : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, 对任意 $u_1 \leq u_2$, $v_1 \leq v_2$, 有

$$f(u_1, v_1) \leq f(u_2, v_2), \quad g(u_1, v_1) \leq g(u_2, v_2).$$

(A3) $\lim_{u+v \rightarrow \infty} \frac{f(u, v)}{u+v} = \infty$, $\lim_{u+v \rightarrow \infty} \frac{g(u, v)}{u+v} = \infty$.

(A4) 存在 $q \in L^1(0, 1)$, $q(t) > 0$, 使得

$$f(u(t), v(t)) \geq -q(t), \quad g(u(t), v(t)) \geq -q(t).$$

本文的主要结果如下:

定理 1.1 假设 (A1)-(A4) 成立, 则存在一个常数 $\lambda_0 > 0$, 使得当 $0 < \lambda < \lambda_0$ 时, 问题 (1.1) 至少存在一个正解 (u_λ, v_λ) , 且当 $\lambda \rightarrow 0^+$ 时, u_λ, v_λ 在 $(0, 1)$ 的任意紧子区间上满足 $u_\lambda \rightarrow \infty, v_\lambda \rightarrow \infty$.

2. 预备知识及引理

令 $E = C[0, 1] \times C[0, 1]$, 在其范数

$$\|(u, v)\|_\infty = \max\{\|u\|_\infty, \|v\|_\infty\}$$

下构成 Banach 空间. 记 $Y = L^1(0, 1)$ 的范数为 $\|\cdot\|$.

问题 (1.1) 等价于积分方程

$$\begin{aligned} u(t) &= \lambda \int_0^1 G(t, s)a(s)f(u(s), v(s))ds, \\ v(t) &= \lambda \int_0^1 G(t, s)b(s)g(u(s), v(s))ds, \end{aligned} \quad (2.1)$$

其中

$$G(t, s) = \begin{cases} s(1-t), & 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ t(1-s), & 0 \leq t \leq s \leq 1, \end{cases}$$

且满足以下基本性质:

$$G(t, s) \leq G(s, s) = s(1-s) \leq \frac{1}{4}, \quad t, s \in [0, 1], \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} G(t, s) &\geq \frac{s(1-s)}{4}, \quad t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right], s \in [0, 1], \\ G(t, s) &\geq \frac{1}{16}, \quad t, s \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]. \end{aligned} \quad (2.3)$$

定义算子 $T: E \rightarrow E$ 为

$$T(u, v)(t) = (T_1(u, v)(t), T_2(u, v)(t)), \quad t \in [0, 1],$$

其中

$$\begin{aligned} T_1(u, v)(t) &= \lambda \int_0^1 G(t, s) a(s) f(u(s), v(s)) ds, \\ T_2(u, v)(t) &= \lambda \int_0^1 G(t, s) b(s) g(u(s), v(s)) ds. \end{aligned}$$

引理 2.1 $T: E \rightarrow E$ 是全连续算子.

证明 由 a, f 和 $G(t, s)$ 的连续性可知 T_1 连续, 同理可得 T_2 连续, 因此 T 是连续算子. 下证 $T: E \rightarrow E$ 是紧算子. 设 $S \subset E$ 是有界集, 则存在 $B > 0$, 使得对任意 $(u, v) \in S$, 有 $\|(u, v)\|_\infty \leq B$, 由 f, g 的连续性可知, 存在一个常数 C , 使得

$$|a(s)f(u(s), v(s))| \leq Ca(s) \in L^1(0, 1),$$

$$|b(s)g(u(s), v(s))| \leq Cb(s) \in L^1(0, 1),$$

于是

$$\begin{aligned} |T_1(u, v)(t)| &= \left| \lambda \int_0^1 G(t, s) a(s) f(u(s), v(s)) ds \right| \\ &\leq \lambda C \|a\|_1, \end{aligned}$$

因此 $\|T_1(u, v)(t)\|_\infty \leq \lambda C \|a\|_1$, 故 $T_1(B)$ 是一致有界集. 同理可证 $T_2(B)$ 是一致有界集, 从而 $T(B)$ 是一致有界集.

另一方面, 对任意 $t_1, t_2 \in [0, 1]$ ($t_1 < t_2$), 有

$$\begin{aligned} |T_1(u, v)(t_1) - T_1(u, v)(t_2)| &= \left| \lambda \int_0^1 G(t_1, s) a(s) f(u(s), v(s)) ds - \lambda \int_0^1 G(t_2, s) a(s) f(u(s), v(s)) ds \right| \\ &= \left| \lambda \int_0^1 [G(t_1, s) - G(t_2, s)] a(s) f(u(s), v(s)) ds \right| \\ &\leq \lambda C \|a\|_1 \int_0^1 |G(t_1, s) - G(t_2, s)| ds, \end{aligned}$$

因为 $G(t, s)$ 在 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上连续, 故对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $|t_1 - t_2| < \delta$ 时, 有

$$|G(t_1, s) - G(t_2, s)| < \frac{\varepsilon}{\lambda C \|a\|_1},$$

因此

$$\begin{aligned} |T_1(u, v)(t_1) - T_1(u, v)(t_2)| &\leq \lambda C \|a\|_1 \int_0^1 |G(t_1, s) - G(t_2, s)| ds \\ &\leq \lambda C \|a\|_1 \cdot \frac{\varepsilon}{\lambda C \|a\|_1} = \varepsilon, \end{aligned}$$

这表明 $T_1(B)$ 是等度连续集, 同理可证 $T_2(B)$ 是等度连续集, 从而 $T(B)$ 是等度连续集. 由 Arzelà-Ascoli 定理, $T: E \rightarrow E$ 是紧算子, 进而是全连续算子.

引理 2.2 设 $p(t) = t(1-t)$, $t \in [0, 1]$. 设 $k_1, k_2 \in Y$ 且 $k_1, k_2 \geq 0$, $u, v \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$ 满足

$$\begin{cases} u''(t) \leq k_1(t), & t \in (0, 1), \\ u(0) \geq 0, \quad u(1) \geq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} v''(t) \leq k_2(t), & t \in (0, 1), \\ v(0) \geq 0, \quad v(1) \geq 0. \end{cases}$$

若 $\|u\|_\infty > 2\|k_1\|_1$, $\|v\|_\infty > 2\|k_2\|_1$ 且 $\|u\|_\infty = |u(\tau)|$, $\|v\|_\infty = |v(\eta)|$, 则 $u(\tau) \geq 0$, $v(\eta) \geq 0$ 且

$$u(t) \geq (\|u\|_\infty - 2\|k_1\|_1)p(t), \quad t \in [0, 1],$$

$$v(t) \geq (\|v\|_\infty - 2\|k_2\|_1)p(t), \quad t \in [0, 1].$$

证明 设 w 是边值问题

$$\begin{cases} -w'' = k_1(t), & t \in (0, 1), \\ w(0) = w(1) = 0 \end{cases}$$

的唯一解, 则

$$w(t) = \int_0^1 G(t, s) k_1(s) ds.$$

由 (2.2) 可得

$$0 \leq w(t) \leq p(t) \int_0^1 k_1(s) ds = \|k_1\|_1 p(t) \leq \|k_1\|_1.$$

令 $y = u + w$, 则 $y \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$ 且满足

$$\begin{cases} -y'' \geq 0, & t \in (0, 1), \\ y(0) \geq 0, \quad y(1) \geq 0, \end{cases}$$

故 y 在 $[0, 1]$ 上是凹函数, 从而

$$y(t) \geq \|y\|_\infty p(t), \quad t \in [0, 1].$$

注意到 $\|y\|_\infty \geq \|u\|_\infty - \|w\|_\infty \geq \|u\|_\infty - \|k_1\|_1$, 于是

$$\begin{aligned} u(t) &= y(t) - w(t) \\ &\geq \|y\|_\infty p(t) - \|k_1\|_1 p(t) \\ &\geq (\|u\|_\infty - \|k_1\|_1) p(t) - \|k_1\|_1 p(t) \\ &= (\|u\|_\infty - 2\|k_1\|_1) p(t), \end{aligned}$$

同理可证

$$v(t) \geq (\|v\|_\infty - 2\|k_2\|_1) p(t), \quad t \in [0, 1].$$

最后, 若 $u(\tau) < 0$, 则 $\|u\|_\infty = -u(\tau) \leq \|w\|_\infty \leq \|k_1\|_1 < 2\|k_1\|_1$, 与假设矛盾, 故 $u(\tau) \geq 0$. 同理, $v(\eta) \geq 0$.

本文所用的工具如下:

引理 2.3 [15] 设 E 为 Banach 空间, $T : E \rightarrow E$ 为全连续算子. 假设存在 $h \in E$, $h \neq 0$ 和正数 r, R 且 $r \neq R$, 使得

(a) 若 $y \in E$ 满足 $y = \theta Ty$, 其中 $\theta \in [0, 1]$, 则 $\|y\| \neq r$,

(b) 若 $y \in E$ 满足 $y = Ty + \xi h$, 其中 $\xi \geq 0$, 则 $\|y\| \neq R$.

则 T 存在不动点 $y \in E$, 满足

$$\min\{r, R\} < \|y\| < \max\{r, R\}.$$

3. 主要结果的证明

定理 1.1 的证明

假设 $\|(u, v)\|_\infty \leq r$, 根据 f 和 g 的连续性可知, 存在一个常数 $C_r > 0$, 使得对 $s \in (0, 1)$, 有

$$|a(s)f(u(s), v(s))| \leq C_r a(s),$$

$$|b(s)g(u(s), v(s))| \leq C_r b(s).$$

取 $r > 1$, 假设

$$\lambda C_r \|a\|_1 < r, \quad \lambda C_r \|b\|_1 < r.$$

(a) 若 $(u, v) \in E$ 满足 $(u, v) = \theta T(u, v)$, 对任意 $\theta \in [0, 1]$ 成立, 则 $\|(u, v)\|_\infty \neq r$. 反设 $\|(u, v)\|_\infty = r$, 则在 $[0, 1]$ 上满足 $u(t) \leq r, v(t) \leq r$, 于是对任意 $t \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} |T_1(u, v)(t)| &\leq \lambda \int_0^1 G(t, s) a(s) |f(u(s), v(s))| ds \\ &\leq \lambda \int_0^1 a(s) |f(u(s), v(s))| ds \\ &\leq \lambda \int_0^1 a(s) ds \cdot C_r \\ &= \lambda C_r \|a\|_1 < r, \end{aligned}$$

同理可得

$$|T_2(u, v)(t)| \leq \lambda C_r \|b\|_1 < r.$$

于是

$$\|T(u, v)\|_\infty = \max\{\|T_1(u, v)\|_\infty, \|T_2(u, v)\|_\infty\} < r,$$

因此

$$\|(u, v)\|_\infty = \theta \|T(u, v)\|_\infty \leq \|T(u, v)\|_\infty < r,$$

与假设 $\|(u, v)\|_\infty = r$ 矛盾. 因此 (a) 满足.

(b) 存在常数 $R_\lambda > r$, 设 $(u, v) \in E$, 若 $(u, v) = T(u, v) + (\xi, \xi)$, 取 $h = (1, 1) \in E$, 其中 $\xi \geq 0$, 则 $(u - \xi, v - \xi) = T(u, v)$, 且

$$u(t) - \xi = \lambda \int_0^1 G(t, s) a(s) f(u(s), v(s)) ds,$$

$$v(t) - \xi = \lambda \int_0^1 G(t, s) b(s) g(u(s), v(s)) ds,$$

则

$$\begin{cases} -u'' = \lambda a(t) f(u, v), & t \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = \xi \geq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -v'' = \lambda b(t) g(u, v), & t \in (0, 1), \\ v(0) = v(1) = \xi \geq 0. \end{cases}$$

由 (A4) 可知

$$\lambda a(t) f(u(t), v(t)) \geq -\lambda q(t) a(t) =: -k_1(t),$$

$$\lambda b(t) g(u(t), v(t)) \geq -\lambda q(t) b(t) =: -k_2(t),$$

根据引理 2.2, 当 $\|u\|_\infty \geq 2\|k_1\|_1$, $\|v\|_\infty \geq 2\|k_2\|_1$ 时

$$u(t) \geq (\|u\|_\infty - 2\|k_1\|_1) p(t), \quad t \in [0, 1], \quad (3.1)$$

$$v(t) \geq (\|v\|_\infty - 2\|k_2\|_1) p(t), \quad t \in [0, 1].$$

令

$$C_0 = \min \left(\int_{1/4}^{3/4} a(s) ds, \int_{1/4}^{3/4} b(s) ds \right) > 0,$$

根据条件 (A2), 则有

$$f(u, v) \geq f(0, v), \quad g(u, v) \geq g(u, 0),$$

进一步条件 (A3) 意味着

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{f(0, v)}{v} = \infty, \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{g(u, 0)}{u} = \infty. \quad (3.2)$$

为利用条件 (A3) 的超线性增长得到矛盾, 需要选取充分大的 R_λ , 使其控制住半正项 $\lambda\|aq\|_1$, $\lambda\|bq\|_1$ 的负向贡献, 另一方面为后续利用 f, g 的超线性性质预留增长空间. 具体地, 取 $R_\lambda > 0$ 且满足

$$R_\lambda > \max\{4\lambda\|aq\|_1, 4\lambda\|bq\|_1, 16r\},$$

且

$$\begin{aligned} \frac{\lambda C_0}{16} f\left(0, \frac{3R_\lambda}{32}\right) &> \max(8\lambda\|aq\|_1, 32r), \\ \frac{\lambda C_0}{16} g\left(\frac{3R_\lambda}{32}, 0\right) &> \max(8\lambda\|bq\|_1, 32r), \end{aligned}$$

由 (3.2) 可知, 这样选取的 R_λ 存在.

设 $\|(u, v)\|_\infty = R_\lambda$, 不失一般性, 不妨设 $\|(u, v)\|_\infty = \|u\|_\infty$. 根据 (3.1) 得

$$u(t) \geq \frac{\|u\|_\infty}{2} p(t) \geq \frac{3\|u\|_\infty}{32} > p(t), \quad t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right],$$

对任意的 $t, s \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$, 由 (2.3) 可得

$$\begin{aligned} v(t) &= \lambda \left(\int_{1/4}^{3/4} G(t, s) b(s) g(u(s), v(s)) ds + \int_{[0, 1] \setminus [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} G(t, s) b(s) g(u(s), v(s)) ds \right) \\ &\geq \lambda \left(\frac{1}{16} g\left(\frac{3\|u\|_\infty}{32}, 0\right) \int_{1/4}^{3/4} b(s) ds - \int_0^1 b(s) q(s) ds \right) \\ &\geq \lambda \left(\frac{C_0}{16} g\left(\frac{3\|u\|_\infty}{32}, 0\right) - \|bq\|_1 \right) \\ &= \frac{\lambda C_0}{16} g\left(\frac{3\|u\|_\infty}{32}, 0\right) - \lambda\|bq\|_1 \\ &\geq \frac{\lambda C_0}{32} g\left(\frac{3\|u\|_\infty}{32}, 0\right) \geq \max(4\lambda\|bq\|_1, 16r), \end{aligned} \quad (3.3)$$

同理可得

$$u(t) \geq \frac{\lambda C_0}{32} f\left(0, \frac{3\|v\|_\infty}{32}\right), \quad t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right], \quad (3.4)$$

联立 (3.3) 和 (3.4) 得

$$\frac{\lambda C_0}{32} f\left(0, \frac{3\lambda C_0}{1024} g\left(\frac{3\|u\|_\infty}{32}, 0\right)\right) \leq \|u\|_\infty,$$

进而可得

$$\frac{f\left(0, \frac{3\lambda C_0}{1024} g\left(\frac{3\|u\|_\infty}{32}, 0\right)\right)}{\|u\|_\infty} \leq \frac{32}{\lambda C_0}. \quad (3.5)$$

由 (3.2) 可知, 当 $\|u\|_\infty \rightarrow \infty$ 时

$$\frac{g\left(\frac{3\|u\|_\infty}{32}, 0\right)}{\frac{3\|u\|_\infty}{32}} \rightarrow \infty,$$

从而

$$\frac{3\lambda C_0}{1024} g\left(\frac{3\|u\|_\infty}{32}, 0\right) \rightarrow \infty,$$

结合 (3.2) 中对 f 的条件可知, 当 $\|u\|_\infty \rightarrow \infty$ 时, 不等式 (3.5) 的左边趋于无穷. 因此, 若 R_λ 满足

$$f\left(0, \frac{3\lambda C_0}{1024} g\left(\frac{3R_\lambda}{32}, 0\right)\right) > \frac{32R_\lambda}{\lambda C_0},$$

$$g\left(\frac{3\lambda C_0}{1024} f\left(0, \frac{3R_\lambda}{32}\right), 0\right) > \frac{32R_\lambda}{\lambda C_0},$$

则必有 $\|u\|_\infty \neq R_\lambda$, 与假设矛盾. 因此 (b) 满足.

故由引理 2.3 可知, T 存在不动点 (u_λ, v_λ) , 满足 $r < \|(u_\lambda, v_\lambda)\|_\infty < R_\lambda$. 下证, 当 $\lambda \rightarrow 0^+$ 时, $\|u_\lambda\|_\infty \rightarrow \infty$, $\|v_\lambda\|_\infty \rightarrow \infty$. 假设 $\|(u_\lambda, v_\lambda)\|_\infty = \|u_\lambda\|_\infty$, 由 (2.1) 可得

$$\|u_\lambda\|_\infty \leq \lambda \|a\|_1 f(\|u_\lambda\|_\infty, \|v_\lambda\|_\infty),$$

因此有

$$f(\|u_\lambda\|_\infty, \|v_\lambda\|_\infty) \geq \frac{\|u_\lambda\|_\infty}{\lambda \|a\|_1} > \frac{r}{\lambda \|a\|_1},$$

由 (A3) 可知, 当 $\lambda \rightarrow 0^+$, $\|u_\lambda\|_\infty + \|v_\lambda\|_\infty \rightarrow \infty$, 又因 $\|v_\lambda\|_\infty \leq \|u_\lambda\|_\infty$, 所以 $\|u_\lambda\|_\infty \rightarrow \infty$. 同理, 当假设 $\|(u_\lambda, v_\lambda)\|_\infty = \|v_\lambda\|_\infty$ 时, 重复上述论证可得 $\|v_\lambda\|_\infty \rightarrow \infty$. 因此 (u_λ, v_λ) 是问题 (1.1) 的一个正解, 并且当 $\lambda \rightarrow 0^+$ 时, u_λ, v_λ 在 $(0,1)$ 的任意紧子区间上满足 $u_\lambda \rightarrow \infty, v_\lambda \rightarrow \infty$, 定理 1.1 的证明完成. $\square$

基金项目

国家自然科学基金资助项目(批准号: 12461036)。

参考文献

- [1] Dunninger, D.R. and Wang, H. (2000) Multiplicity of Positive Radial Solutions for an Elliptic System on an Annulus. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **42**, 803-811. [https://doi.org/10.1016/s0362-546x\(99\)00125-x](https://doi.org/10.1016/s0362-546x(99)00125-x)
- [2] Rodríguez-López, J. (2024) Hybrid Localization for Nonlinear Systems: Lower/Upper Solution and Krasnosel'skiĭ Fixed Point Theorem Techniques. *Monatshefte für Mathematik*, **206**, 949-955. <https://doi.org/10.1007/s00605-024-02026-1>
- [3] Su, H., Liu, L. and Wu, Y. (2009) Positive Solutions for a Nonlinear Second-Order Semipositone Boundary Value System. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **71**, 3240-3248. <https://doi.org/10.1016/j.na.2009.01.201>
- [4] Liu, L., Zhang, X. and Wu, Y. (2007) On Existence of Positive Solutions of a Two-Point Boundary Value Problem for a Nonlinear Singular Semipositone System. *Applied Mathematics and Computation*, **192**, 223-232. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2007.03.002>
- [5] Cheng, X. and Zhong, C. (2005) Existence of Positive Solutions for a Second-Order Ordinary Differential System. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **312**, 14-23. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.03.016>
- [6] Cheng, X. and Yan, X. (2012) A Multiplicity Result of Positive Solutions for a Class of Multi-Parameter Ordinary Differential Systems. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, **28**, 653-662. <https://doi.org/10.1007/s10255-012-0180-4>
- [7] Cheng, X. (2008) Existence of Positive Solutions for a Class of Second-Order Ordinary Differential Systems. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **69**, 3042-3049. <https://doi.org/10.1016/j.na.2007.08.074>
- [8] Abebe, A., Chhetri, M., Sankar, L. and Shivaji, R. (2014) Positive Solutions for a Class of Superlinear Semipositone Systems on Exterior Domains. *Boundary Value Problems*, **2014**, Article No. 198. <https://doi.org/10.1186/s13661-014-0198-z>
- [9] Agarwal, R.P. and O'Regan, D. (1998) A Coupled System of Boundary Value Problems. *Applicable Analysis*, **69**, 381-385. <https://doi.org/10.1080/00036819808840668>
- [10] Chhetri, M. and Girg, P. (2018) Superlinear Elliptic Systems with Reaction Terms Involving Product of Powers. *Applied Mathematics Letters*, **75**, 121-127. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2017.07.005>
- [11] Quittner, P. (2022) Liouville Theorem and a Priori Estimates of Radial Solutions for a Non-Cooperative Elliptic System. *Nonlinear Analysis*, **222**, Article ID: 112971. <https://doi.org/10.1016/j.na.2022.112971>
- [12] Yang, J. and Wei, Z. (2009) Existence of Positive Solutions of Sturm-Liouville Boundary Value Problems for a Nonlinear Singular Second Order Differential System with a Parameter. *Journal*

- of Applied Mathematics and Computing*, **34**, 129-145.
<https://doi.org/10.1007/s12190-009-0312-z>
- [13] do Ó, J.M., Lorca, S. and Ubilla, P. (2005) Local Superlinearity for Elliptic Systems Involving Parameters. *Journal of Differential Equations*, **211**, 1-19.
<https://doi.org/10.1016/j.jde.2004.04.013>
- [14] Dunninger, D.R. and Wang, H. (1997) Existence and Multiplicity of Positive Solutions for Elliptic Systems. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **29**, 1051-1060.
[https://doi.org/10.1016/s0362-546x\(96\)00092-2](https://doi.org/10.1016/s0362-546x(96)00092-2)
- [15] Deimling, K. (1985) *Nonlinear Functional Analysis*. Springer.
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-00547-7>