Pure Mathematics 理论数学, **2026, 16(10), 127-146**
Published Online October 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.1610219

Hans汉斯

具有社区观点和感染媒介的离散时间网络SIS传染病模型的动态分析

陈　玉

西北师范大学数学与统计学院，甘肃　兰州

收稿日期：2026年9月14日；录用日期：2026年10月19日；发布日期：2026年10月28日

摘　要

本文建立了一类具有社区观点和感染媒介的离散时间网络化SIS 传染病模型. 根据基于观点的基本再生数的不同取值, 我们将传染病的传播程度分为轻度, 中度和重度三种情况, 并分析了在不同传播程度下健康状态与地方病平衡点的稳定性, 揭示了社区观点在降低群体感染水平方面具有积极作用。

关键词

离散时间网络，观点动力学，感染媒介，稳定性分析

Dynamic Analysis of a Discrete-Time Networked SIS Epidemic Model with Community Opinions and Infectious Vectors

Yu Chen

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: September 14, 2026; accepted: October 19, 2026; published: October 28, 2026

文章引用: 陈玉. 具有社区观点和感染媒介的离散时间网络SIS传染病模型的动态分析[J]. 理论数学, 2026, 16(10): 127-146. DOI: 10.12677/pm.2026.1610219

Abstract

This paper establishes a discrete-time networked SIS epidemic model with community opinions and infection media. Based on different values of the opinion-dependent basic reproduction number, we classify the transmission severity into three cases: mild, moderate, and severe, and analyze the stability of the healthy state and the endemic equilibrium under each transmission level, revealing that community opinions play a positive role in reducing the infection level of the population.

Keywords

Discrete-Time Network, Opinion Dynamics, Infectious Vectors, Stability Analysis

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

传染病由各类病原体或寄生虫引发, 可在人与人, 动物与动物以及人与动物之间相互传播[1]. 为刻画传播过程, 学者们依据病原体的不同特性, 提出了多种数学模型, 如易感-感染(SI), 易感-感染-易感(SIS) 以及易感-感染-康复(SIR) 模型[2]. 早期研究多聚焦于连续时间框架, 且假设传播对象为均匀混合的同质群体. 但是现实世界里不同的人或动物在疾病传播过程中表现出的特性是不同的. 这种不同在一定程度上影响了疾病的传播, 所以要想建立更加精确的模型必须考虑种群的异质性. 随着网络动力学研究的兴起, 网络上传染病模型的研究, 为体现种群异质性提供了便利[3, 4]. 为应对大规模网络中状态空间庞大的问题, Mieghem 等人于2009 年首次提出了基于节点的连续时间SIS 传染病模型, 用于理解网络对流行病传播的影响[5], 随后Paré 等人于2018 年给出了其离散时间版本[6].

现有文献中的网络化SIS 模型所描述的流行病仅通过个体间的直接接触传播[5, 6]. 然而, 病原体除直接的人际接触外, 还可以通过感染性媒介(如水, 空气, 媒介生物) 间接接触传播. 例如, 登革热, 疟疾等多种人类疾病不仅通过感染个体传播, 还可以通过感染性蚊子传播[7]. 因此, 研究带有感染性媒介的传染病模型十分有必要. Shi 等人首次在复杂网络上讨论了带有感染性媒介的SIS 模型, 用以描述流行病经感染媒介在不同网络结构中的传播过程[8]. Xie, Wang 等人进一步提出了若干新

型的复杂网络上带有感染媒介的SIS 模型[9, 10]. 但这些已有模型均基于度进行刻画, 而非基于节点. 此外, 由于现实观测数据多呈现离散时间采样, 所以在离散时间框架下建模不仅更贴近实际应用场景, 也便于与实测数据进行拟合比较[6, 11].

此外, 人们对传染病严重性的认知程度会影响传染病的传播. 在文献[12]中, Xuan 等人通过用舆论动态来模拟个体对传染病严重性的认知, 依据健康信念模型, 将舆论动态和网络化SIS 传播动态结合起来, 来研究意见动态对网络化SIS 模型的影响. 随后, 他们在文献[13]中研究了该模型的离散时间版本, 其观点演化模型基于经典的DeGroot 模型建立. 在文献[14]中, 王光杰研究了一类基于Friedkin-Johnsen 观点动力学的离散时间网络化SIS 模型. 与DeGroot 模型不同, F-J 模型允许个体在一定程度上坚持自身初始观点. 具体而言, 在DeGroot 模型中, 个体的观点仅依赖于邻居的影响, 而忽略了现实情境中个体往往坚持自身初始观点的事实[15]; 在F-J 模型中, 通过引入个体固执度参数, 观点演化同时受到社会影响和自身初始观点的约束[16]. 因此, 从DeGroot 模型到F-J 模型的扩展, 更贴近现实中个体认知既受社会互动影响, 又受自身信念约束的情形.

基于上述分析, 本文的贡献为: (1) 我们在传统的离散时间网络化SIS 模型中, 同时引入了多种感染媒介和F-J 观点演化模型, 并将社区感染比例和媒介感染比例同时纳入观点动力学; (2) 我们对所提出的模型进行了系统的动力学分析，包括健康状态行为和地方性行为; (3) 与文献[12–14]中的模型相比, 我们的模型考虑了传染病可以通过媒介传播这一重要机制. 文献[13]仅分析了传染病轻度传播情形下健康状态的稳定性, 而本文在传染病轻度, 中度和重度三种不同传播情形下, 对系统健康状态和地方病平衡点的存在性与稳定性给出了详细的分析和证明. 此外, 我们选择F-J 模型作为观点演化模型, 既能更真实地反映个体认知的形成过程, 又能为后续分析观点依赖的传染病传播提供可处理的数学框架; (4) 我们提供了详细的数值模拟, 用以突出主要理论结果, 并进一步讨论更复杂的情景.

符号说明

对所有的正整数 n, 用 $[n]$ 表示集合 $\{1,2,\cdots,n\}$. 用 $\mathbf{0}_n$ 和 $\mathbf{1}_n$ 分别表示所有分量均为 0 和 1 的 n 维列向量. 用 I 表示单位矩阵. 对于向量 x, 用 $\mathrm{diag}(x)$ 表示对角线元素均为 x_i 的对角矩阵. 对于任意两个实向量 a, $b\in\mathbb{R}^n$, 如果对于所有 $i\in[n]$, $a_i\geqslant b_i$, 记作 $a\geqslant b$; 如果对所有 $i\in[n]$, $a_i>b_i$, 记作 $a\gg b$. 对于实方阵 A, 用 $\rho(A)$ 表示 A 的谱半径, 即 $\rho(A)=\max\{|\lambda|\,|:\lambda\in\sigma(A)\}$. 对于矩阵 A, 如果 $A<0$ (或 $A\leqslant 0$), 表示 A 是负定的 (半负定的). 若矩阵 A 的每一行元素都非负, 且每行元素之和都等于1, 则称 A 为行随机矩阵. 若矩阵 A 的全部特征值均在单位圆盘内, 则称 A 为收缩矩阵. 若矩阵 A 不能通过行列置换化为分块上三角矩阵, 则称 A 为不可约矩阵.

2. 模型和问题阐述

考虑一个加权有向图 $\mathcal{G}=(V,\mathcal{E},A)$, 其中 $V=\{1,2,...,n\}$, $\mathcal{E}\in V\times V$ 分别为顶点集和边集, 矩阵 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ 是非负邻接矩阵. 若存在从节点 j 到节点 i 的边, 则 $a_{ij}>0$, 否则 $a_{ij}=0$. 若图 $\mathcal{G}$ 中从每一个节点到另外的任何一个节点都有一条有向路径, 则称图 $\mathcal{G}$ 是强连通的, 此时邻接矩阵 A 是不可约矩阵.

2.1. 模型建立

考虑病毒在由 n 个节点组成的网络中传播, 用有向图 $\mathcal{G}^x = (\mathcal{V}, \mathcal{E}^x, A)$ 表示, 其中, 顶点集中包含 n 个个体节点, 边集中包含感染个体和易感个体接触, 加权邻接矩阵 $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ 表示个体间接触的密切程度. 我们先考虑在文献[6]中提出的经典离散时间网络SIS 传染病模型:

$$x_i(k+1) = x_i(k) + h(1 - x_i(k))\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}x_j(k) - h\delta_i x_i(k), \tag{1}$$

其中, $x_i(k)$ 表示在时间 k 节点 i 处感染个体的比例; $h > 0$ 表示采样周期; β_{ij} 表示感染个体 j 对易感个体 i 的感染率, δ_i 表示感染个体 i 的治愈率.

接下来, 我们考虑一种SIS 类型的传染病，它不仅在一个由 n 个个体组成的人际接触网络中传播, 同时通过 m 种不同类型的媒介传播(如蚊子, 鸟, 猪), 这些媒介和人际接触网络中的一些个体接触. 个体不仅通过和人际接触网络中的感染个体接触感染, 还通过和感染媒介接触感染. 反过来, 媒介也可能通过和感染个体接触感染, 我们假设媒介之间不产生交叉感染. 感染个体和感染媒介都可以通过一定的治愈率恢复. 借鉴文献[3]中针对水资源病原体传播过程的建模思路及其参数调整, 我们在模型(1) 的基础上建立如下带有感染媒介的离散时间网络化SIS 模型:

$$x_i(k+1) = x_i(k) + h(1 - x_i(k))\Big(\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}x_j(k) + \sum_{j=1}^{m}\beta_{ij}^{\nu}x_j^{\nu}(k)\Big) - h\delta_i x_i(k), \tag{2}$$

$$x_j^{\nu}(k+1) = x_j^{\nu}(k) + h\Big(\big(1 - x_j^{\nu}(k)\big)\sum_{l=1}^{n}c_{jl}^{\nu}x_k(k) - \delta_j^{\nu}x_j^{\nu}(k)\Big), \tag{3}$$

其中, $x_j^{\nu}(k)$ 表示在时间 k 第 j 种媒介中感染媒介的比例, β_{ij}^{ν} 表示感染媒介 j 对易感个体 i 的感染率; c_{ji}^{ν} 表示感染个体 i 对易感媒介 j 的感染率; δ_j^{ν} 表示感染媒介的治愈率.

考虑到社区观点会对流行病的传播造成影响, 我们借鉴文献[13]中的建模思路, 在模型(2)-(3)的基础上建立如下具有社区观点与感染媒介的离散时间网络SIS 传染病模型:

$$\begin{aligned} x_i(k+1) = {} & x_i(k) + h(1 - x_i(k))\Big(\sum_{j=1}^{n}\big(\beta_{ij} - (\beta_{ij} - \beta_{\min})\,o_i(k)\big)\,x_j(k) \\ & + \sum_{j=1}^{m}\big(\beta_{ij}^{\nu} - \big(\beta_{ij}^{\nu} - \beta_{\min}^{\nu}\big)\,o_i(k)\big)\,x_j^{\nu}(k)\Big) - h\left(\delta_{\min} + (\delta_i - \delta_{\min})\,o_i(k)\right)x_i(k), \end{aligned} \tag{4}$$

$$x_j^{\nu}(k+1) = x_j^{\nu}(k) + h\Big(\big(1 - x_j^{\nu}(k)\big)\sum_{l=1}^{n}c_{jl}^{\nu}x_k(k) - \delta_j^{\nu}x_j^{\nu}(k)\Big), \tag{5}$$

其中, $o_i(k)$ 表示在时间 k 节点 i 对传染病的观点; $\beta_{\min} = \min\limits_{i,j\in[n]}\{\beta_{ij}\}$, $\beta_{\min}^{\nu} = \min\limits_{i\in[n],j\in[m]}\{\beta_{ij}^{\nu}\}$ 和 $\delta_{\min} = \min\limits_{i\in[n]}\{\delta_i\}$ 分别表示最小感染率和治愈率.

接下来我们对每个节点 i 处的观点 $o_i(k)$ 建模. 考虑社区观点在有向图 $\mathcal{G}^o = (\mathcal{V}, \mathcal{E}^o, W)$ 上传播, 顶点集中包含个体节点, 边集 $\mathcal{E}^o$ 表示在观点传播背景下各节点之间的相互连接, 邻接矩阵 W 是一个行随机非负矩阵. 我们将社区 i 的感染个体比例和感染媒介比例与F-J 观点动力学模型结合,

得到如下模型:

$$o_i(k+1)=\theta_i x_i(k)+\theta_i^{\nu}\sum_{j=1}^{m}\lambda_{ij}x_j^{\nu}(k)+(1-\theta_i-\theta_i^{\nu})(\varphi_i\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}o_j(k)+(1-\varphi_i)o_i(0)),\quad(6)$$

其中, θ_i, θ_i^{ν}, $(1-\theta_i-\theta_i^{\nu})$ 分别表示节点 i 对感染个体, 感染媒介和邻居观点的警惕程度; φ_i, $1-\varphi_i$ 分别表示个体 i 对邻居观点和初始观点的敏感程度; λ_{ij} 表示感染媒介 j 对社区 i 的影响, $\sum_{j=1}^{m}\lambda_{ij}\in(0,1]$; ω_{ij} 表示邻居 j 的观点对个体 i 的影响力; $o_i(0)$ 表示个体 i 对传染病的初始观点.

将系统(4)-(6) 写成如下矩阵形式:

$$\begin{aligned}x(k+1)=&x(k)+h(I_n-X(k))((B-O(k)(B-\beta_{\min}A))x(k)\\&+(B^{\nu}-O(k)(B^{\nu}-\beta_{\min}^{v}\Lambda))x^{\nu}(k))-h(\delta_{\min}I_n+(D-\delta_{\min}I_n)O(k))x(k),\quad(7)\\x^{\nu}(k+1)=&x^{\nu}(k)+h((I_m-X^{\nu}(k))C^{\nu}x(k)-D^{\nu}x^{\nu}(k)),\quad(8)\\o(k+1)=&\Theta x(k)+\Theta^{\nu}\Lambda x^{\nu}(k)+(I_n-\Theta-\Theta^{\nu})(\Phi W o(k)+(I_n-\Phi)o(0)),\quad(9)\end{aligned}$$

其中, $x(k)=[x_1(k),\cdots,x_n(k)]^T$; $x^{\nu}(k)=[x_1^{\nu}(k),\cdots,x_m^{\nu}(k)]^T$; $o(k)=[o_1(k),\cdots,o_n(k)]^T$; $X(k)=\mathrm{diag}(x(k))$; $X^{\nu}(k)=\mathrm{diag}(x^{\nu}(k))$; $O(k)=\mathrm{diag}(o(k))$; $D=\mathrm{diag}(\delta_1,\cdots,\delta_n)$; $D^{\nu}=\mathrm{diag}(\delta_1^{\nu},\cdots,\delta_m^{\nu})$; $\Theta=\mathrm{diag}(\theta_1,\cdots,\theta_n)$; $\Theta^{\nu}=\mathrm{diag}(\theta_1^{\nu},\cdots,\theta_n^{\nu})$; $\Phi=\mathrm{diag}(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)$; $B=[\beta_{ij}]_{n\times n}$; $B^{\nu}=\left[\beta_{ij}^{\nu}\right]_{n\times m}$; $C^{\nu}=[c_{jl}^{\nu}]_{m\times n}$; $\Lambda=[\lambda_{ij}]_{n\times m}$; $W=[\omega_{ij}]_{n\times n}$.

2.2. 技术假设

假设1: 对所有的 $i\in[n]$, $j\in[m]$, 初始参数 $x_i(0)$, $x_j^{\nu}(0)$, $o_i(0)\in[0,1]$.

假设2: 对所有的 $i\in[n]$, $j\in[m]$, 满足 $\beta_{ij}\geqslant 0$, $\beta_{ij}^{\nu}\geqslant 0$, $c_{ji}^{\nu}\geqslant 0$ 且至少存在 j 使得 $c_{ji}^{\nu}>0$, $\lambda_{ij}\geqslant 0$ 且至少存在 j 使得 $\lambda_{ij}>0$, $\omega_{ij}\geqslant 0$, $\delta_i>0$, $\delta_j^{\nu}>0$, $\theta_i,\theta_i^{\nu},\theta_i+\theta_i^{\nu}\in(0,1)$, $\varphi_i\in[0,1]$.

假设3: 采样周期 $h>0$, 对所有的 $i\in[n]$, $j\in[m]$, 满足 $h(\sum_{j=1}^{n}(\beta_{ij}-(\beta_{ij}-\beta_{\min})o_i(k))x_j(k)+\sum_{j=1}^{m}(\beta_{ij}^{\nu}-(\beta_{ij}^{\nu}-\beta_{\min}^{\nu})o_i(k))x_j^{\nu}(k))\in[0,1]$, $h(\delta_{\min}+(\delta_i-\delta_{\min})o_i(k))$, $h\delta_j^{\nu}\in(0,1]$, $h\sum_{l=1}^{n}c_{jl}^{\nu}\in(0,1]$.

假设4: 流行病传播图 $\mathcal{G}^x$ 和观点传播图 $\mathcal{G}^o$ 是强连通的.

定义集合 D 为:

$$D=\{(x(k),x^{\nu}(k),o(k))\,|x(k)\in[0,1]^n,x^{\nu}(k)\in[0,1]^m,o(k)\in[0,1]^n\}.$$

引理 1. 假设1-3 对系统成立, 则 $\forall\,k\geqslant 0,\forall\,i\in[n]$, $j\in[m]$, 满足 $x_i(k)$, $x_j^{\nu}(k)$, $o_i(k)\in[0,1]$.

证明. 首先证明 $x_i(k)\in[0,1]$. 方程(4) 可以重新整理成如下形式:

$$\begin{aligned}x_i(k+1)=&(1-x_i(k))h(\sum_{j=1}^{n}(\beta_{ij}-(\beta_{ij}-\beta_{\min})o_i(k))x_j(k)+\sum_{j=1}^{m}\left(\beta_{ij}^{\nu}-\left(\beta_{ij}^{\nu}-\beta_{\min}^{\nu}\right)o_i(k)\right)x_j^{\nu}(k))\\&+(1-h(\delta_{\min}+(\delta_i-\delta_{\min})o_i(k)))x_i(k).\end{aligned}$$

令 $\bar{\beta}_{ij}(k)=(\beta_{ij}-(\beta_{ij}-\beta_{\min})o_i(k))$, $\bar{\delta}_i(k)=(\delta_{\min}+(\delta_i-\delta_{\min})o_i(k))$, $\bar{\beta}^{\nu}_{ij}(k)=(\beta^{\nu}_{ij}-(\beta^{\nu}_{ij}-\beta^{\nu}_{\min})o_i(k))$.

当 $k=0$ 时, 根据假设1 可知, $\bar{\beta}_{ij}(0)\in[\beta_{\min},\beta_{ij}]$, $\bar{\delta}_i(0)\in[\delta_{\min},\delta_i]$, $\bar{\beta}^{\nu}_{ij}(0)\in[\beta^{\nu}_{\min},\beta^{\nu}_{ij}]$.

根据假设3 可知, $1-h\bar{\delta}_i(0)\in[0,1]$, $h(\sum_{j=1}^{n}\bar{\beta}_{ij}(0)x_j(0)+\sum_{j=1}^{m}\bar{\beta}^{\nu}_{ij}(0)x^{\nu}_j(0))\in[0,1]$.

由此可知 $x_i(1)$ 是 $(1-h\bar{\delta}_i(0))$ 和 $h(\sum_{j=1}^{n}\bar{\beta}_{ij}(0)x_j(0)+\sum_{j=1}^{m}\bar{\beta}^{\nu}_{ij}(0)x^{\nu}_j(0))$ 的凸组合, 且系数严格在区间 $[0,1]$ 内. 所以 $x_i(1)\in[0,1]$.

假设存在时间 $k>0$, 满足 $x_i(k), x^{\nu}_j(k), o_i(k)\in[0,1]$, 那么 $\bar{\beta}_{ij}(k)\in[\beta_{\min},\beta_{ij}]$, $\bar{\delta}_i(k)\in[\delta_{\min},\delta_i]$, $\bar{\beta}^{\nu}_{ij}(k)\in[\beta^{\nu}_{\min},\beta^{\nu}_{ij}]$.

同理, 结合假设3 可知 $x_i(k+1)$ 是 $h(\sum_{j=1}^{n}\bar{\beta}_{ij}(k)x_j(k)+\sum_{j=1}^{m}\bar{\beta}^{\nu}_{ij}(k)x^{\nu}_j(k))\in[0,1]$ 和 $(1-h\bar{\delta}_i(k))\in[0,1]$ 的凸组合. 所以 $x_i(k+1)\in[0,1]$.

接下来证明 $x^{\nu}_j(k)\in[0,1]$. 方程(5) 可以重新整理成如下形式:

$$x^{\nu}_j(k+1)=\left(1-h\delta^{\nu}_j\right)x^{\nu}_j(k)+h\left(1-x^{\nu}_j(k)\right)\sum_{l=1}^{n}c^{\nu}_{jl}x_l(k).$$

假设存在时间 $k>0$, 满足 $x_i(k), x^{\nu}_j(k)\in[0,1]$. 根据假设3 可知, $x^{\nu}_j(k+1)$ 是 $(1-h\delta^{\nu}_j)\in[0,1]$ 和 $h\sum_{l=1}^{n}c^{\nu}_{jl}x_l(k)\in[0,1]$ 的凸组合. 所以 $x^{\nu}_j(k+1)\in[0,1]$.

最后证明 $o_i(k)\in[0,1]$. 假设存在时间 $k>0$, 满足 $x_i(k), x^{\nu}_j(k), o_i(k)\in[0,1]$. 观察方程(6), 根据假设2 可知, $o_i(k+1)$ 是 $x_i(k)\in[0,1]$, $\sum_{j=1}^{m}\lambda_{ij}x^{\nu}_j(k)\in[0,1]$, $\varphi_i\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}o_j(k)+(1-\varphi_i)o_i(0)\in[0,1]$ 的凸组合. 所以 $o_i(k+1)\in[0,1]$.

因此, 通过数学归纳法可知, 对所有的 $k\geqslant 0$, 对所有 $i\in[n]$, $j\in[m]$, $x_i(k)\in[0,1]$, $x^{\nu}_j(k)\in[0,1]$, $o_i(k)\in[0,1]$.

引理1 表明集合 D 是系统(7)-(9) 的一个正不变集. 也就是说, 从 D 内任意初始状态出发, 系统在任意时刻 k 的轨迹都保持在 D 内. 因此, D 构成了该系统的状态空间.

定义 1. 令 $(x^*,x^{\nu*},o^*)$ 是系统(7)-(9) 的一个平衡点. 当 $x^*=x^{\nu*}=\mathbf{0}_n$ 时, 称 $E_0=(\mathbf{0}_n,\mathbf{0}_n,\bar{o}^*)$ 为健康状态. 当 $x^*\neq\mathbf{0}_n$ 且 $x^{\nu*}\neq\mathbf{0}_n$ 时, 称 $E^*=(x^*,x^{\nu*},o^*)$ 为地方病平衡点.

引理 2. 系统 (7)-(9) 的健康状态为 $E^0=(\mathbf{0}_n,\mathbf{0}_m,\bar{o}^*)$, 其中 $\bar{o}^*=(I_n-(I_n-\Theta-\Theta^{\nu})\Phi W)^{-1}\times(I_n-\Theta-\Theta^{\nu})(I_n-\Phi)o(0)$, 且 $\mathbf{0}_n\leqslant o^*\leqslant\mathbf{1}_n$.

证明. 将 $x(k+1)=x(k)=\mathbf{0}_n$, $x^{\nu}(k+1)=x^{\nu}(k)=\mathbf{0}_n$, $o(k+1)=o(k)=\bar{o}^*$ 带入系统(7)-(9) 可知, $x^*=\mathbf{0}_n$, $x^{\nu*}=\mathbf{0}_m$ 是系统(7)-(8) 的平衡点. 由式(9) 整理可得:

$$(I_n-(I_n-\Theta-\Theta^{\nu})\Phi W)\bar{o}^*=(I_n-\Theta-\Theta^{\nu})(I_n-\Phi)o(0).$$

根据假设2 知, 对任意的 $i\in[n]$, $1-\theta_i-\theta^{\nu}_i\in(0,1)$, $\varphi_i\in[0,1]$, 所以矩阵 $I_n-\Theta-\Theta^{\nu}$ 满足

$\rho(I_n-\Theta-\Theta^\nu)<1$, 矩阵 Φ 满足 $\rho(\Phi)\leqslant 1$, 又因为 W 是一个非负行随机矩阵, 有 $\rho(W)=1$. 由谱半径的次乘性可得 $\rho(I_n-\Theta-\Theta^\nu)\Phi W)\leqslant\rho(I_n-\Theta-\Theta^\nu)\rho(\Phi)\rho(W)<1$, 所以矩阵 $I_n-(I_n-\Theta-\Theta^\nu)\Phi W$ 的所有特征值均不等于0. 因此:

$$\bar{o}^*=\left(I_n-\left(I_n-\Theta-\Theta^\nu\right)\Phi W\right)^{-1}\left(I_n-\Theta-\Theta^\nu\right)\left(I_n-\Phi\right)o\left(0\right). \tag{10}$$

接下来证明 $\bar{o}^*\in[0,1]^n$. 先考虑极端情况. 当 $\Phi=I_n$ 时, 个体对传染病的观点完全依赖邻居的影响, 此时式(10) 化为 $\bar{o}^*=\mathbf{0}_n$, 满足 $\bar{o}^*\in[0,1]^n$. 当 $\Phi=0_{n\times n}$ 时, 个体完全固执, 不听邻居的观点, 此时式(10) 化为 $\bar{o}^*=\left(I_n-\Theta-\Theta^\nu\right)o\left(0\right)$, 根据假设2 和引理1 可知, 满足 $\bar{o}^*\in[0,1]^n$.

下面考虑 $\varphi_i\in(0,1)$. 不失一般性, 反设当 $i=1$ 时, $\bar{o}_1^*>1$. 将系统(9) 的第一行展开得:

$$\bar{o}_1^*=\left(1-\theta_1-\theta_1^\nu\right)\varphi_1(\omega_{11}\bar{o}_1^*+\sum_{j=2}^{n}\omega_{1j}\bar{o}_j^*)+\left(1-\theta_1-\theta_1^\nu\right)\left(1-\varphi_1\right)o_1\left(0\right).$$

因为 W 是行随机随机矩阵, 所以 $\omega_{11}=1-\sum_{j=2}^{n}\omega_{1j}$, 将其带入上式整理可得:

$$-\varphi_1\sum_{j=2}^{n}\omega_{1j}\left(\bar{o}_j^*-\bar{o}_1^*\right)=\left(1-\varphi_1\right)\left(o_1\left(0\right)-\bar{o}_1^*\right)+\left(1-\frac{1}{1-\theta_1-\theta_1^\nu}\right)\bar{o}_1^*. \tag{11}$$

根据假设1 知, $o_1\left(0\right)\in[0,1]$, 因为假设 $\bar{o}_1^*>1$, 所以 $\left(1-\varphi_1\right)\left(o_1\left(0\right)-\bar{o}_1^*\right)<0$, 根据假设2 知, $1-\theta_1-\theta_1^\nu\in(0,1)$, 所以 $\frac{1}{1-\theta_1-\theta_1^\nu}>1$, 即 $1-\frac{1}{1-\theta_1-\theta_1^\nu}<0$. 由此可知式(11) 的右边小于0. 所以

$$\varphi_1\sum_{j=2}^{n}\omega_{1j}\left(\bar{o}_j^*-\bar{o}_1^*\right)>0.$$

因为 ω_{1j} 非负, 所以对所有的 $j\in[n]$, 至少存在一个 $\omega_{1j}>0$, 这意味着存在一个节点 j (取 $j=2$), 使得 $\bar{o}_2^*>\bar{o}_1^*$.

依次类推, 将系统(9) 的第二行至第 $n-1$ 行展开, 可以得到 $\bar{o}_n^*>\cdots>\bar{o}_j^*\cdots>\bar{o}_2^*>\bar{o}_1^*$, $j=3,4,\cdots,n-1$.

然而, 将系统(9) 的第 n 行展开时, 同样的推理要求存在另一个节点 j (取 $j=n+1$), 使得 $\bar{o}_{n+1}^*>\bar{o}_n^*>\cdots>\bar{o}_j^*\cdots>\bar{o}_2^*>\bar{o}_1^*$, 但网络中一共只有 n 个节点, 所以不存在这样的新节点, 假设矛盾. 因此 $\bar{o}_1^*\leqslant 1$. 用同样的方法可以证得 $\bar{o}_1^*\geqslant 0$.

因此, 对所有的 $i\in[n]$, 有 $\bar{o}_i^*\in[0,1]$, 即 $\bar{o}^*\in[0,1]^n$.

引理 3. 如果 E^* 是系统 (7)-(9) 的地方病平衡点, 那么 $\mathbf{0}_n\ll x^*\ll\mathbf{1}_n$, $\mathbf{0}_m\ll x^{\nu*}\ll\mathbf{1}_m$, $\mathbf{0}_n\ll o^*\ll\mathbf{1}_n$.

证明. 设 E^* 是系统 (7)-(9) 的一个非零平衡点, 根据引理1 知, $\mathbf{0}_n\leqslant x^*,x^{\nu*},o^*\leqslant\mathbf{1}_n$.

首先证明 $x^* \gg \mathbf{0}_n$. 将 E^* 带入系统(4)-(6), 整理可得:

$$\begin{aligned} x^* = &\big[I_n + (D_{\min}^{-1}D - I_n)O^* + \operatorname{diag}(D_{\min}^{-1}(B - O^*(B - \beta_{\min}A))x^*) \\ &+ \operatorname{diag}(D_{\min}^{-1}(B^\nu - O^*(B^\nu - \beta_{\min}^\nu \Lambda))x^{\nu *})\big]^{-1}\big(D_{\min}^{-1}(I_n - O^*)B \\ &+ D_{\min}^{-1}O^*\beta_{\min}A + D_{\min}^{-1}(B^\nu - O^*(B^\nu - \beta_{\min}^\nu \Lambda)) \\ &\times (I_m + \operatorname{diag}((D^\nu)^{-1}C^\nu x^*))^{-1}(D^\nu)^{-1}C^\nu\big)x^*. \end{aligned} \tag{12}$$

我们记

$$Z_1 = \left[I_n + (D_{\min}^{-1}D - I_n)O^* + \operatorname{diag}(D_{\min}^{-1}(B - O^*(B - \beta_{\min}A))x^*) + \operatorname{diag}\left(D_{\min}^{-1}\left(B^\nu - O^*\left(B^\nu - \beta_{\min}^\nu \Lambda\right)\right)x^{\nu *}\right)\right]^{-1},$$

$$Z_2 = \left(D_{\min}^{-1}\left(I_n - O^*\right)B + D_{\min}^{-1}O^*\beta_{\min}A + D_{\min}^{-1}\left(B^\nu - O^*\left(B^\nu - \beta_{\min}^\nu \Lambda\right)\right)\left(I_m + \operatorname{diag}((D^\nu)^{-1}C^\nu x^*)\right)^{-1}\left(D^\nu\right)^{-1}C^\nu\right),$$

所以式(12) 可以表示成: $x^* = Z_1 Z_2 x^*$.

根据假设2-3 可知, Z_1 是正对角矩阵, Z_2 是非负矩阵, 所以 Z_1Z_2 是非负矩阵. 根据假设4 知, $\mathcal{G}^x, \mathcal{G}^o$ 是强连通的, 所以 Z_1Z_2 是不可约非负矩阵.

假设 x^* 至少有一个零元素, 根据文献[17]中的引理1 知, x^* 和 $Z_1Z_2x^*$ 不可能具有相同的符号模式, 即 x^* 和 $Z_1Z_2x^*$ 的零元素分布必须不同, 这是不可能的, 假设不成立. 因此 $x^* \gg \mathbf{0}_n$.

接下来证明 $x^* \ll \mathbf{1}_n$. 因为 E^* 是一个平衡点, 根据式(4), $\forall i \in [n]$, 都有

$$x_i^* = \frac{\sum_{j=1}^n (\beta_{ij} - (\beta_{ij} - \beta_{\min})\, o_i^*)\, x_j^* + \sum_{j=1}^m \left(\beta_{ij}^\nu - \left(\beta_{ij}^\nu - \beta_{\min}^\nu\right) o_i^*\right) x_j^{\nu *}}{\delta_{\min} + (\delta_i - \delta_{\min})\, o_i^* + \sum_{j=1}^n (\beta_{ij} - (\beta_{ij} - \beta_{\min})\, o_i^*)\, x_j^* + \sum_{j=1}^m \left(\beta_{ij}^\nu - \left(\beta_{ij}^\nu - \beta_{\min}^\nu\right) o_i^*\right) x_j^{\nu *}}.$$

根据假设2 和引理1 知, $\sum_{j=1}^n (\beta_{ij} - (\beta_{ij} - \beta_{\min})\, o_i^*)\, x_j^* \geqslant 0$, $\sum_{j=1}^m (\beta_{ij}^\nu - (\beta_{ij}^\nu - \beta_{\min}^\nu) o_i^*) x_j^{\nu *} \geqslant 0$, $\delta_{\min} + (\delta_i - \delta_{\min})\, o_i^* > 0$, 所以$\forall i \in [n]$, $x_i^* < 1$. 因此, $x^* \ll \mathbf{1}_n$.

下面证明 $x^{\nu *} \gg \mathbf{0}_m$. 根据式(5), $\forall j \in [m]$, 都有

$$x_j^{\nu *} = \frac{\sum_{l=1}^n c_{jl}^\nu x_l^*}{\delta_j^\nu + \sum_{l=1}^n c_{jl}^\nu x_l^*}. \tag{13}$$

假设 $\exists\, j \in [m]$, 使得 $x_j^{\nu *} = 0$, 带入上式得 $\sum_{l=1}^n c_{jl}^\nu x_l^* = 0$, 根据假设2 知, 当 $j \in [m]$, 如果 $c_{jl}^\nu > 0$, 当且仅当 $x_l^* = 0$, 等式成立, 这与 $x_l^* > 0$ 矛盾. 因此, $\forall j \in [m]$, $x_j^{\nu *} > 0$, 即 $x^{\nu *} \gg \mathbf{0}_m$.

接下来证明 $x^{\nu *} \ll \mathbf{1}_m$. 假设 $\exists\, j \in [m]$, 使得 $x_j^{\nu *} = 1$, 带入式(13) 得 $\delta_j^\nu = 0$, 这与假设 $\delta_j^\nu > 0$ 矛盾. 因此 $\forall j \in [m]$, $x_j^{\nu *} < 1$, 即 $x^{\nu *} \ll \mathbf{1}_m$.

下面证明 $o^* \gg \mathbf{0}_n$. 根据式(6), $\forall i \in [n]$, 都有

$$o_i^* = \theta_i x_i^* + \theta_i^\nu \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} x_j^{\nu *} + (1 - \theta_i - \theta_i^\nu)\,(\varphi_i \sum_{j=1}^n \omega_{ij} o_j^* + (1 - \varphi_i)\, o_i\,(0)). \tag{14}$$

由于 $x_i^*, x_j^{\nu *} > 0$, 结合假设2 和引理1 知, $\theta_i x_i^* > 0$, $\theta_i^\nu \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} x_j^{\nu *} > 0$, $(1 - \theta_i - \theta_i^\nu) \times (\varphi_i \sum_{j=1}^n \omega_{ij} o_j^* + (1 - \varphi_i)\, o_i\,(0)) \geqslant 0$, 所以$\forall i \in [n]$, $o_i^* > 0$. 因此, $o^* \gg \mathbf{0}_n$.

接下来证明 $o^* \ll \mathbf{1}_n$. 式(14) 可以重新整理成:

$$o_i^* = \frac{\theta_i x_i^* + \theta_i^\nu \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} x_j^{\nu *} + (1-\theta_i-\theta_i^\nu)\left(\varphi_i \sum_{j=1,j\neq i}^n \omega_{ij} o_j^* + (1-\varphi_i)\, o_i(0)\right)}{1-(1-\theta_i-\theta_i^\nu)\,\varphi_i\omega_{ii}}.$$

假设 $\exists i \in [n]$, 使得 $o_i^* = 1$, 由上式可得:

$$1 = \frac{\theta_i x_i^* + \theta_i^\nu \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} x_j^{\nu *} + (1-\theta_i-\theta_i^\nu)\left(\varphi_i \sum_{j=1,j\neq i}^n \omega_{ij} o_j^* + (1-\varphi_i)\, o_i(0)\right)}{1-(1-\theta_i-\theta_i^\nu)\,\varphi_i\omega_{ii}}.$$

根据引理1 知, $o_i(k) \in [0,1]$, 所以

$$1 \leqslant \frac{\theta_i x_i^* + \theta_i^\nu \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} x_j^{\nu *} + (1-\theta_i-\theta_i^\nu)\left(\varphi_i \sum_{j=1,j\neq i}^n \omega_{ij} + 1 - \varphi_i\right)}{1-(1-\theta_i-\theta_i^\nu)\,\varphi_i\omega_{ii}}.$$

又因为 $W = [\omega_{ij}]_{n\times n}$ 是一个行随机矩阵, 所以 $\sum_{j=1,j\neq i}^n \omega_{ij} = 1-\omega_{ii}$, 带入上式整理可得

$$(1-x_i^*)\,\theta_i + (1-\sum_{j=1}^m \lambda_{ij} x_j^{\nu *})\theta_i^\nu \leqslant 0.$$

因为 θ_i, $\theta_i^\nu \in (0,1)$, 由此推出 $x_i^* \geqslant 1$ 或 $\sum_{j=1}^m \lambda_{ij} x_j^{\nu *} \geqslant 1$, 这与 $x_i^* < 1$, $x_i^{\nu *} < 1$ 矛盾. 因此, $\forall i \in [n]$, $o_i^* < 1$, 即 $o^* \ll \mathbf{1}_n$.

3. 系统平衡点的稳定性分析

在分析系统(4)-(6) 平衡点的稳定性之前, 我们使用以下符号:

$$y(k) = \left[x(k)^T, x^\nu(k)^T\right]^T,\ Y(k) = \operatorname{diag}(y(k)),$$

$$B_f(o(k)) = \begin{bmatrix} B - O(k)(B-\beta_{\min}A) & B^\nu - O(k)(B^\nu - \beta_{\min}^\nu \Lambda) \\ C^\nu & 0 \end{bmatrix}, D_f(o(k)) = \begin{bmatrix} D_{\min} + (D-D_{\min})\,O(k) & \\ & D^\nu \end{bmatrix},$$

将系统(7) 和(8) 重写为:

$$y(k+1) = y(k) + h\left(\left(I_{n+m} - Y(k)\right) B_f(o(k)) - D_f(o(k))\right) y(k). \tag{15}$$

参照文献[6]中提供的方法, 我们定义

$$R^o(o(k)) = \rho\left(I_{n+m} + hB_f(o(k)) - hD_f(o(k))\right)$$

为系统(7)-(9) 的基本再生数, 且该数随着观点的变化而变化

特别的, 当 $o(k) = o_{\max} = \mathbf{1}_n$ 时, 所有个体均认为流行病会造成很严重的后果, 会采取防护措

施, 此时 $R^o_{\min}=\rho\left(I_{n+m}+hB_f\left(\mathbf{1}_n\right)-hD_f\left(\mathbf{1}_n\right)\right)$.

当 $o(k)=o_{\min}=\mathbf{0}_n$ 时, 所有个体均认为流行病不会构成任何威胁, 不会采取防护措施, 此时 $R^o_{\max}=\rho\left(I_{n+m}+hB_f\left(\mathbf{0}_n\right)-hD_f\left(\mathbf{0}_n\right)\right)$.

参考文献[18]中的方法, 我们根据 $R^o\left(o(k)\right)$ 的大小将流行病的传播程度分为轻度, 中度和重度三种情况, 并将分别讨论三种情况下平衡状态的稳定性.

定义 3. 在系统(7)-(9) 中, 根据 $R^o\left(o(k)\right)$ 的不同取值, 定义流行病的传播程度如下: (1) 若 $R^o\left(o(k)\right)\leqslant R^o_{\max}\leqslant 1$, 则流行病轻度传播. (2) 若 $\mathrm{R}^o_{\min}\leqslant 1, \mathrm{R}^o_{\max}>1$, 则流行病中度传播. (3) 若 $R^o\left(o(k)\right)\geqslant \mathrm{R}^o_{\min}>1$, 则流行病重度传播.

3.1. 无病平衡点的稳定性分析

在本节, 我们分析传染病在不同传播程度下, 系统(7)-(9) 健康状态的稳定性. 首先考虑传染病轻度传播的情形. 在这之前, 我们需要以下假设和命题.

假设5: 矩阵 $B_f\left(o(k)\right)$ 是不可约的.

命题 1. 如果 $R^o_{\max}\leqslant 1$, 则系统(7)-(9) 只存在健康状态 E_0.

证明. 我们记 $B_f\left(o(k)\right)\triangleq B_f\left(\mathbf{0}_n\right)-B^o_f\left(o(k)\right), D_f\left(o(k)\right)\triangleq D_f\left(\mathbf{0}_n\right)+D^o_f\left(o(k)\right)$.

假设当 $R^o_{\max}\leqslant 1$ 时, 系统存在地方病平衡点 E^*, 将 E^* 带入系统(15), 带入上述记号整理得:

$$h\left(B_f\left(\mathbf{0}_n\right)-D_f\left(\mathbf{0}_n\right)\right)y^*=h\left(\left(I_{n+m}-Y^*\right)B^o_f\left(o^*\right)+Y^*B_f\left(\mathbf{0}_n\right)+D^o_f\left(o^*\right)\right)y^*.$$

记 $Q_1=h\left(B_f\left(\mathbf{0}_n\right)-D_f\left(\mathbf{0}_n\right)\right), Q_2=h((I_{n+m}-Y^*)B^o_f\left(o^*\right)+Y^*B_f\left(\mathbf{0}_n\right)+D^o_f\left(o^*\right))$. 因为 $h>0$, 结合假设2-3, 5 和引理3 知, 矩阵 Q_2 是非负不可约矩阵. 因为 $y^*\gg\mathbf{0}_{n+m}$, 所以 $Q_2y^*\gg\mathbf{0}_{n+m}$, 这意味着 $Q_1y^*\gg\mathbf{0}_{n+m}$, 两边同时加 y^* 可得 $(I_{n+m}+Q_1)y^*\gg y^*$. 根据假设2-3, 5 可知, $(I_{n+m}+Q_1)$ 是非负不可约矩阵, 根据文献[19]中的推论8.1.29 和推论8.1.30 可知, $\rho(I_{n+m}+Q_1)>1$, 即 $R^o_{\max}>1$, 这与假设矛盾. 因此, 当 $R^o_{\max}\leqslant 1$ 时, 系统(7)-(9) 只存在健康状态 E^o.

定理 1. 如果 $R^o_{\max}\leqslant 1$, 则系统(7)-(9) 唯一的健康状态 E_0 是渐近稳定的.

证明. 结合命题1 证明过程中的记号, 系统(15) 可整理为:

$$\begin{aligned}y(k+1)-y(k)&=h\left(\left(I_{n+m}-Y(k)\right)B_f\left(\mathbf{0}_n\right)-D_f\left(\mathbf{0}_n\right)\right)y(k)\\&\quad-h\left(\left(I-Y(k)\right)B^o_f\left(o(k)\right)+D^o_f\left(o(k)\right)\right)y(k)\\&\leqslant h\left(\left(I_{n+m}-Y(k)\right)B_f\left(\mathbf{0}_n\right)-D_f\left(\mathbf{0}_n\right)\right)y(k).\end{aligned}$$

令:

$$z(k+1)=z(k)+h\left(\left(I_{n+m}-Z(k)\right)B_f\left(\mathbf{0}_n\right)-D_f\left(\mathbf{0}_n\right)\right)z(k), \tag{16}$$

显然 $y(k)$ 的轨迹以 $z(k)$ 的轨迹为上界, 即前者不超过后者. 下面考虑系统(16) 的收敛情况.

首先考虑 $R^o_{\max}=\rho\left(I_{n+m}+hB_f\left(\mathbf{0}_n\right)-hD_f\left(\mathbf{0}_n\right)\right)<1$. 令 $M=I_{n+m}+hB_f\left(\mathbf{0}_n\right)-hD_f\left(\mathbf{0}_n\right)$,

$\hat{M}=I_{n+m}+hB_f(\mathbf{0}_n)-hD_f(\mathbf{0}_n)-hZ(k)B_f(\mathbf{0}_n)$. 根据假设3, 5 知, M 是非负不可约矩阵, 根据文献[20]中的命题1 知, 存在一个正对角矩阵 P, 使得 M^TPM-P 是负定的.

定义Lyapunov 函数

$$V(z(k))=(z(k))^T Pz(k). \tag{17}$$

对所有的 $z(k)$, 有

$$\begin{aligned}\triangle V(z(k))&=V(z(k+1))-V(z(k))=(\hat{M}z(k))^T P\hat{M}z(k)-(z(k))^T Pz(k)\\&=z(k)^T\left(M^TPM-P\right)z(k)+h^2z(k)^T B_f(\mathbf{0}_n)^T Z(k)PZ(k)B_f(\mathbf{0}_n)z(k)\\&-hz(k)^T M^TPZ(k)B_f(\mathbf{0}_n)z(k)-hz(k)^T B_f(\mathbf{0}_n)^T Z(k)PMz(k) \qquad (18)\\&\leqslant h^2z(k)^T B_f(\mathbf{0}_n)^T Z(k)PZ(k)B_f(\mathbf{0}_n)z(k)-hz(k)^T M^TPZ(k)B_f(\mathbf{0}_n)z(k)\\&-hz(k)^T B_f(\mathbf{0}_n)^T Z(k)PMz(k), \qquad (19)\end{aligned}$$

式(19) 可以重新整理成

$$\begin{aligned}&z(k)^T\Big(h^2B_f(\mathbf{0}_n)^T Z(k)PZ(k)B_f(\mathbf{0}_n)-h\left(I_{n+m}+hB_f(\mathbf{0}_n)-hD_f(\mathbf{0}_n)\right)^T PZ(k)B_f(\mathbf{0}_n)\\&-hB_f(\mathbf{0}_n)^T Z(k)P\left(I_{n+m}+hB_f(\mathbf{0}_n)-hD_f(\mathbf{0}_n)\right)\Big)z(k)\\&\leqslant z(k)^T h^2\Big(B_f(\mathbf{0}_n)^T Z(k)PZ(k)B_f(\mathbf{0}_n)-B_f(\mathbf{0}_n)^T PZ(k)B_f(\mathbf{0}_n)-B_f(\mathbf{0}_n)^T Z(k)PB_f(\mathbf{0}_n)\Big)z(k)\\&\leqslant z(k)^T h^2\Big(-B_f(\mathbf{0}_n)^T Z(k)P\left(I_{n+m}-Z(k)\right)B_f(\mathbf{0}_n)-B_f(\mathbf{0}_n)^T PZ(k)B_f(\mathbf{0}_n)\Big)z(k)\leqslant 0.\end{aligned}$$

这表明当 $z(k)=\mathbf{0}_{n+m}$ 时, $\triangle V(z(k))=0$, 且对所有的 $z(k)\neq\mathbf{0}_{n+m}$, $\triangle V(z(k))<0$, Lyapunov 函数严格递减, 这确保了在 $R^o_{\max}<1$ 时, 系统(16) 渐近收敛到 $\mathbf{0}_{n+m}$.

其次考虑 $R^o_{\max}=\rho\left(I_{n+m}+hB_f(\mathbf{0}_n)-hD_f(\mathbf{0}_n)\right)=1$, 根据文献[6]中的引理3 知, 存在一个正对角矩阵 $\bar{P}$, 使得 $(M)^T\bar{P}M-\bar{P}$ 是半负定的.

定义Lyapunov 函数 $\bar{V}(z(k))=(z(k))^T\bar{P}z(k)$, 同理可得, 对所有的 $z(k)$, 有 $\triangle\bar{V}(z(k))\leqslant 0$, 这表明当 $z(k)=\mathbf{0}_{n+m}$ 时, $\triangle\bar{V}(z(k))=0$, 且对所有的 $z(k)\neq\mathbf{0}_{n+m}$, $\triangle\bar{V}(z(k))<0$, Lyapunov 函数严格递减, 这确保了在 $R^o_{\max}=1$ 时, 系统(16) 渐近收敛到 $\mathbf{0}_{n+m}$.

由于 $y(k)$ 的轨迹在 $z(k)$ 的轨迹为之下, 所以在满足 $R^o_{\max}\leqslant 1$ 的条件下, $y(k)$ 渐近收敛到 $\mathbf{0}_{n+m}$.

接下来考虑 $o(k)$ 的动态. 根据引理2 的证明过程可知, $\rho((I_n-\Theta-\Theta^\nu)\Phi W)<1$, 所以矩阵 $(I_n-\Theta-\Theta^\nu)\Phi W$ 在离散时间条件下是稳定的, 故 $(I_n-\Theta-\Theta^\nu)\Phi Wo(k)$ 渐近收敛到 $\mathbf{0}_n$. 根据文献[21]的引理4.6 可知, 系统(6) 是输入到状态稳定的. 因此, 当 $x(k)$ 渐近收敛到 $\mathbf{0}_n$, $x^\nu(k)$ 渐近收敛到 $\mathbf{0}_m$ 时, $o(k)$ 会渐近收敛到 $\bar{o}^*$.

定理 2. 如果 $R^o_{\max}<1$, 则系统(15) 中的 $y(k)$ 指数收敛到 $\mathbf{0}_{n+m}$.

证明. 根据定理1 的证明可知, $y(k)$ 的轨迹在 $z(k)$ 的轨迹之下.

由于 P 是正对角矩阵, $\lambda_{\min}(P)I_{n+m}\leqslant P\leqslant\lambda_{\max}(P)I_{n+m}$, 根据式(17) 定义的Lyapunov 函数

可得:

$$\sigma_1 \|z(k)\|^2 \leqslant V(z(k)) \leqslant \sigma_2 \|z(k)\|^2, \tag{20}$$

其中 $\sigma_1 = \lambda_{\min}(P) > 0, \sigma_2 = \lambda_{\max}(P) > 0$.

结合式(18)-(19) 可知, $\triangle V(z(k)) \leqslant z(k)^T \left(M^T P M - P\right) z(k)$, 由于 $M^T P M - P$ 是负定矩阵, 可得:

$$\triangle V(z(k)) \leqslant -\sigma_3 \|z(k)\|^2, \tag{21}$$

其中 $\sigma_3 = \lambda_{\min}\left(P - M^T P M\right) > 0$.

结合式(20)-(21) 与文献[22]中的定理28 可知 $V(z(k))$ 是一个具有指数衰减性质的Lyapunov 函数, 因此 $z(k)$ 以指数速度收敛到健康状态. 由于 $y(k)$ 的轨迹在 $z(k)$ 的轨迹为之下, 所以在满足 $R^o_{\max} < 1$ 的条件下, $y(k)$ 以指数速度收敛到健康状态.

推论 1. 如果 $R^o_{\max} < 1$, 则 $y(k)$ 的收敛速度是 $\sqrt{1 - \frac{\sigma_3}{\sigma_2}} \in [0, 1)$, 其中 σ_2, σ_3 如定理2 的证明过程中所定义.

证明. 根据文献[23]中的定理23.3 知, $y(k)$ 的收敛速度为 $\sqrt{1 - \frac{\sigma_3}{\sigma_2}}$. 下面证明 $\sigma_3 \leqslant \sigma_2$. 因为矩阵 P 是正定的, $M^T P M - P$ 是负定的, 所以有 $\sigma_3 I \leqslant P - M^T P M \leqslant P \leqslant \sigma_2 I$, 这表明 $\sigma_3 \leqslant \sigma_2$. 因此, $y(k)$ 以指数速度收敛到健康状态, 且收敛速度至少为 $\sqrt{1 - \frac{\sigma_3}{\sigma_2}} \in [0, 1)$.

接下来考虑传染病中度传播的情形. 在这种情况下, 病毒包含轻微病毒和严重病毒的特性, 此时疫情的行为会受到社区观点的影响. 假设至少存在一个观点 $\bar{o}$ 使得 $R^o(\bar{o}) = 1$, 则系统(7)-(9) 可能存在 $\mathrm{R}^o_{\min} > 1$ 和 $\mathrm{R}^o_{\max} < 1$ 两种情况. 由于 $R^o(o(k))$ 的取值范围依赖于观点状态 $o(k)$, 所以我们通过观点状态 $\bar{o}^*$ 所对应的 $R^o(\bar{o}^*)$ 来分析健康状态. 令 $R^o(\bar{o}^*) = I_{n+m} + hB_f(\bar{o}^*) - hD_f(\bar{o}^*)$.

定理 3. 如果 $\mathrm{R}^o_{\min} \leqslant 1, \mathrm{R}^o_{\max} > 1$, 则以下陈述成立:

(1) 当 $R^o(\bar{o}^*) \leqslant 1$ 时, 系统(7)-(9) 的健康状态 E_0 是渐近稳定的.

(2) 当 $R^o(\bar{o}^*) > 1$ 时, 系统(7)-(9) 的健康状态 E_0 是不稳定的.

证明. 陈述(1) 的证明过程和定理1 类似, 下面我们证明陈述(2). 系统(7)-(9) 在 E_0 处的雅可比矩阵是:

$$J_{E_0} = \begin{bmatrix} J_{11} & 0_{(n+m)\times n} \\ J_{21} & (I_n - \Theta - \Theta^\nu)\Phi W \end{bmatrix},$$

其中, $J_{21} = \begin{bmatrix} \Theta & \Theta^\nu \Lambda \end{bmatrix}$,

$$J_{11} = \begin{bmatrix} I_n + h\left(B - \bar{O}^*\left(B - \beta_{\min} A\right)\right) - h\left(D_{\min} + (D - D_{\min})\bar{O}^*\right) & h\left(B^\nu - \bar{O}^*\left(B^\nu - \beta^\nu_{\min}\Lambda\right)\right) \\ hC^\nu & I_m - hD^\nu \end{bmatrix}.$$

根据引理2 的证明过程可知, $\rho\left((I_n - \Theta - \Theta^\nu)\Phi W\right) < 1$.

因为 $\rho(J_{11}) = \rho\left(I_{n+m} + hB_f(\bar{o}^*) - hD_f(\bar{o}^*)\right) = R^o(\bar{o}^*)$, 所以 $\rho(J_{11}) = R^o(\bar{o}^*) > 1$, 结合文献[22]中的定理42 知, J_{E_0} 不是收缩矩阵, 此时 E_0 是不稳定的.

定理 4. 如果 $R^o_{\min} > 1$, 则系统(7)-(9) 的健康状态 E_0 是不稳定的.

证明过程和定理3 的陈述2 类似.

3.2. 地方病平衡点的稳定性分析

在本节, 我们分析传染病在不同传播程度下, 系统(7)-(9) 地方病平衡点的稳定性. 根据命题1 知, 当 $R^o_{\max} \leqslant 1$ 时, 系统只存在健康状态 E^o. 当 $\mathrm{R}^o_{\min} \leqslant 1, \mathrm{R}^o_{\max} > 1$ 时, 病毒包含轻微病毒和严重病毒的特性. 因此, 我们分析传染病重度传播的情形下, 地方病平衡点的稳定性.

定理 5. 如果 $R^o_{\min} > 1$, 则系统(7)-(9) 的地方病平衡点 E^* 是渐近稳定的.

证明. 首先证明 $(x(k), x^\nu(k))$ 是渐近收敛到 $(x^*, x^{\nu*})$ 的, 其中 $x^* \neq \mathbf{0}_n$, $x^{\nu*} \neq \mathbf{0}_m$. 将 $x_i(k+1) = x_i(k) = x_i^*$, $x_j^\nu(k+1) = x_j^\nu(k) = x_j^{\nu*}$ 带入(4)-(5) 式, 得:

$$0 = (1 - x_i^*)\Big(\sum_{j=1}^{n}(\beta_{ij} - (\beta_{ij} - \beta_{\min})\, o_i(k))\, x_j^* + \sum_{j=1}^{m}(\beta_{ij}^\nu - (\beta_{ij}^\nu - \beta_{\min}^\nu)o_i(k))x_j^{\nu*}\Big)$$

$$- (\delta_{\min} + (\delta_i - \delta_{\min})\, o_i(k))\, x_i^*, \tag{22}$$

$$0 = \big(1 - x_j^{\nu*}\big)\sum_{l=1}^{n} c_{jl}^\nu x_l^* - \delta_j^\nu x_j^{\nu*}. \tag{23}$$

定义 $e_i^x(k) = x_i(k) - x_i^*$, $e_j^\nu(k) = x_j^\nu(k) - x_j^{\nu*}$, 可得 $e_i(k)$, $e_j^\nu(k)$ 的迭代式如下:

$$\begin{aligned} e_i^x(k+1) &= x_i(k+1) - x_i^* \\ &= (1 - h\sum_{j=1}^{n}(\beta_{ij} - (\beta_{ij} - \beta_{\min})\, o_i(k))\, x_j^* - h\,(\delta_{\min} + (\delta_i - \delta_{\min})\, o_i(k)) \\ &\quad - h\sum_{j=1}^{m}(\beta_{ij}^\nu - (\beta_{ij}^\nu - \beta_{\min}^\nu)o_i(k))x_j^{\nu*}))e_i^x(k) + h\,(1 - x_i(k)) \\ &\quad \times (h\sum_{j=1}^{n}(\beta_{ij} - (\beta_{ij} - \beta_{\min})\, o_j(k))\, e_j^x(k) + \sum_{j=1}^{m}(\beta_{ij}^\nu - (\beta_{ij}^\nu - \beta_{\min}^\nu)o_i(k))e_j^\nu(k)). \end{aligned}$$

由式(22) 可得: $\sum_{j=1}^{n}(\beta_{ij} - (\beta_{ij} - \beta_{\min})\, o_i(k))\, x_j^* + \sum_{j=1}^{m}(\beta_{ij}^\nu - (\beta_{ij}^\nu - \beta_{\min}^\nu)o_i(k))x_j^{\nu*} = \frac{(\delta_{\min} + (\delta_i - \delta_{\min})o_i(k))x_i^*}{1 - x_i^*}$, 带入上式整理得:

$$\begin{aligned} e_i^x(k+1) = &\left(1 - \frac{h\,(\delta_{\min} + (\delta_i - \delta_{\min})\, o_i(k))}{1 - x_i^*}\right) e_i^x(k) + h\,(1 - x_i(k))\sum_{j=1}^{m}(\beta_{ij}^\nu - (\beta_{ij}^\nu - \beta_{\min}^\nu)o_i(k))e_j^\nu(k) \\ &+ h\,(1 - x_i(k))\sum_{j=1}^{n}(\beta_{ij} - (\beta_{ij} - \beta_{\min})\, o_i(k))\, e_j^x(k). \end{aligned} \tag{24}$$

$$e_j^\nu(k+1) = x_j^\nu(k+1) - x_j^{\nu*} = (1 - h\delta_j^\nu - h\sum_{l=1}^{n} c_{jl}^\nu x_l^*)e_j^\nu(k) + h\,\big(1 - x_j^\nu(k)\big)\sum_{l=1}^{n} c_{jl}^\nu e_l^x(k).$$

由式(23) 可得: $\sum_{l=1}^{n} c_{jl}^{\nu} x_l^* = \frac{\delta_j^{\nu} x_j^{\nu *}}{1-x_j^{\nu *}}$, 带入上式整理得:

$$e_j^{\nu}(k+1) = \left(1 - \frac{h\delta_j^{\nu}}{1-x_j^{\nu *}}\right) e_j^{\nu}(k) + h\left(1 - x_j^{\nu}(k)\right) \sum_{l=1}^{n} c_{jl}^{\nu} e_l^{x}(k). \tag{25}$$

将式(24)-(25) 写成如下矩阵的形式:

$$e(k+1) = F(k)\, e(k), \tag{26}$$

其中, $F(k) = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ h\left(I_m - X^{\nu}(k)\right) C^{\nu} & I_m - \operatorname{diag}\left(\frac{h\delta_j^{\nu}}{1-x_j^{\nu *}}\right) \end{bmatrix}$, $e(k) = \left[e^{x}(k)^T, e^{\nu}(k)^T\right]^T$,
$F_{11} = I_n - \operatorname{diag}\left(\frac{h(\delta_{\min} + (\delta_i - \delta_{\min}) o_i(k))}{1-x_i^*}\right) + h\left(I_n - X(k)\right)\left(B - O(k)\left(B - \beta_{\min} A\right)\right)$,
$F_{12} = h\left(I_n - X(k)\right)\left(B^{\nu} - O(k)\left(B^{\nu} - \beta_{\min}^{\nu} \Lambda\right)\right)$, $e^{x}(k) = \left[e_1^{x}(k), e_2^{x}(k), \cdots, e_n^{x}(k)\right]^T$,
$e^{\nu}(k) = \left[e_1^{\nu}(k), e_2^{\nu}(k), \cdots, e_m^{\nu}(k)\right]^T$.

构造矩阵:

$$F(k) = \begin{bmatrix} I_n - \operatorname{diag}\left(\frac{h(\delta_{\min} + (\delta_i - \delta_{\min}) o_i(k))}{1-x_i^*}\right) + h\left(B - O(k)\left(B - \beta_{\min} A\right)\right) & h\left(B^{\nu} - O(k)\left(B^{\nu} - \beta_{\min}^{\nu} \Lambda\right)\right) \\ hC^{\nu} & I_m - \operatorname{diag}\left(\frac{h\delta_j^{\nu}}{1-x_j^{\nu *}}\right) \end{bmatrix}.$$

由式(22)-(23) 结合假设3 知:

$$\begin{aligned} x_i^* &= 1 - \frac{h\left(\delta_{\min} + (\delta_i - \delta_{\min}) o_i(k)\right)}{h\left(\sum_{j=1}^{n} \left(\beta_{ij} - (\beta_{ij} - \beta_{\min}) o_i(k)\right) x_j^* + \sum_{j=1}^{m} \left(\beta_{ij}^{\nu} - (\beta_{ij}^{\nu} - \beta_{\min}^{\nu}) o_i(k)\right) x_j^{\nu *}\right) + h\left(\delta_{\min} + (\delta_i - \delta_{\min}) o_i(k)\right)} \\ &\leqslant 1 - h\left(\delta_{\min} + (\delta_i - \delta_{\min}) o_i(k)\right), \\ x_j^{\nu *} &= 1 - \frac{h\delta_j^{\nu}}{h\sum_{l=1}^{n} c_{jl}^{\nu} x_l^* + h\delta_j^{\nu}} \leqslant 1 - h\delta_j^{\nu}, \end{aligned}$$

结合假设3, 5 知 $F(k)$ 是非负不可约矩阵. 显然 $F(k) \leqslant F(k)$, 当且仅当 $x(k) = \mathbf{0}_n$, $x^{\nu}(k) = \mathbf{0}_m$ 时取等号.

令 $\xi = \left[1, \frac{x_1^*}{x_1^*}, \cdots, \frac{x_n^*}{x_1^*}, \frac{x_1^{\nu *}}{x_1^*}, \frac{x_2^{\nu *}}{x_1^*}, \cdots, \frac{x_m^{\nu *}}{x_1^*}\right]^T$, 可得:

$$F(k)\, \xi = \xi.$$

因为 $F(k)$ 是一个非负不可约矩阵, 且 $\xi \gg \mathbf{0}_{n+m}$, 根据文献[19]的推论8.1.29 和8.1.30 可知, $\rho(F(k)) = 1$, 根据文献[24]的定理2.7 知, $F(k)$ 存在唯一的左特征向量 $\mu^T \gg \mathbf{0}_{n+m}$, 使得 $\mu^T F(k) = \mu^T$.

我们对任意 $k \geqslant s$ 考虑如下辅助系统:

$$\bar{e}(k+1) = F(k)\, \bar{e}(k), \tag{27}$$

初始条件为, 对所有的 $i \in V$, $\bar{e}_i(s) = |e_i(s)|$, 此外, 我们还有 $e(k+1) = F(k)\, e(k)$. 因为 $F(k)$ 是非负矩阵, 所以对所有 $k \geqslant 0$, 有 $-\bar{e}(k) \leqslant e(k) \leqslant \bar{e}(k)$. 因此, 如果系统(27) 的原点是渐近稳定的,

则系统(26) 也是渐近稳定的.

构造Lyapunov 函数 $\hat{V}(k)=\mu^{T}\bar{e}(k)$, 得到:

$$\begin{aligned}\triangle\hat{V}(k)&=\hat{V}(k+1)-\hat{V}(k)=\mu^{T}\left(F(k)-I_{n+m}\right)\bar{e}(k)=\mu^{T}\left(F(k)-F(k)\right)\bar{e}(k)\\&=\mu^{T}\begin{bmatrix}-hX(k)\left(B-O(k)\left(B-\beta_{\min}A\right)\right) & -hX(k)\left(B^{\nu}-O(k)\left(B^{\nu}-\beta_{\min}^{\nu}\Lambda\right)\right)\\ -hX^{\nu}(k)C^{\nu} & 0\end{bmatrix}\bar{e}(k)\\&=-h\mu^{T}\begin{bmatrix}X(k) & X(k)\\ X^{\nu}(k) & 0\end{bmatrix}B_{f}\left(o(k)\right)\bar{e}(k)\leqslant 0.\end{aligned}$$

由于 $h>0$, $\mu^{T}\gg\mathbf{0}_{n+m}$, $B_{f}\left(o(k)\right)$ 是非负矩阵, 当系统处于疾病平衡状态时, $x\gg\mathbf{0}_{n}$, $x^{\nu}\gg\mathbf{0}_{m}$, 这意味着 $\triangle\hat{V}(k)=0$ 当且仅当 $\bar{e}(k)=\mathbf{0}_{n+m}$。因此，根据LaSalle's 不变原理，系统(27) 的原点是渐近稳定的. 基于比较原理, 我们知: 对于任意非零初始条件, 系统(26) 是渐近稳定的. 故系统(7)-(8) 的地方病平衡点是是渐进稳定的.

接下来证明系统(6) 渐近收敛到 o^{*}. 当系统处于疾病平衡状态时, 将 $x_{i}(k)=x_{i}^{*}$, $x_{j}^{\nu}(k)=x_{j}^{\nu*}$, $o_{i}(k+1)=o_{i}(k)=o_{i}^{*}$ 带入(6) 式得:

$$o_{i}^{*}=\theta_{i}x_{i}^{*}+\theta_{i}^{\nu}\sum_{j=1}^{m}\lambda_{ij}x_{j}^{\nu*}+\left(1-\theta_{i}-\theta_{i}^{\nu}\right)\left(\varphi_{i}\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}o_{j}^{*}+\left(1-\varphi_{i}\right)o_{i}(0)\right).$$

定义 $e_{i}^{o}(k)=o_{i}(k)-o_{i}^{*}$, 可得 $e_{i}^{o}(k)$ 的迭代式如下:

$$e_{i}^{o}(k+1)=o_{i}(k+1)-o_{i}^{*}=\left(1-\theta_{i}-\theta_{i}^{\nu}\right)\varphi_{i}\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}e_{j}^{o}(k),\tag{28}$$

式(28) 成立是因为系统(26) 是原点渐近稳定的, 即 $e_{i}^{x}(k)=0$, $e_{j}^{\nu}(k)=0$. 将式(28) 写成如下矩阵形式:

$$e^{o}(k+1)=\left(I_{n}-\Theta-\Theta^{\nu}\right)\Phi We^{o}(k),\tag{29}$$

其中, $e^{o}(k)=\left[e_{1}^{o}(k),e_{2}^{o}(k),\cdots,e_{n}^{o}(k)\right]^{T}$.

由于 W 是行随机矩阵, 所以 $\rho(W)=1$. 根据文献[24]的定理2.7 知, W 存在唯一的左特征向量 $\eta^{T}\gg\mathbf{0}_{n}$, 使得 $\eta^{T}W=\eta^{T}$.

同理, 对任意 $k\geqslant s$ 考虑如下辅助系统:

$$\bar{e}^{o}(k+1)=\left(I_{n}-\Theta-\Theta^{\nu}\right)\Phi W\,\bar{e}^{o}(k),\tag{30}$$

初始条件为, 对所有的 $i\in V$, $\bar{e}_{i}^{o}(s)=|e_{i}^{o}(s)|$, 此外, 我们还有 $e^{o}(k+1)=\left(I_{n}-\Theta-\Theta^{\nu}\right)We^{o}(k)$. 根据假设2 知 $\left(I_{n}-\Theta-\Theta^{\nu}\right)\Phi W$ 是非负矩阵, 所以对所有 $k\geqslant 0$, 有 $-\bar{e}^{o}(k)\leqslant e^{o}(k)\leqslant\bar{e}^{o}(k)$. 因此, 如果系统(30) 的原点是渐近稳定的，则系统(29) 也是渐近稳定的.

构造Lyapunov 函数 $\tilde{V}(k)=\eta^T\bar{e}^o(k)$, 得到:

$$\begin{aligned}\triangle\tilde{V}(k)&=\tilde{V}(k+1)-\tilde{V}(k)\\&=\eta^T\left(\left(I_n-\Theta-\Theta^\nu\right)\Phi W-I_n\right)\bar{e}^o(k)=\eta^T\left(\left(I_n-\Theta-\Theta^\nu\right)\Phi W-W\right)\bar{e}^o(k)\\&=-\eta^T\left(\Theta+\Theta^\nu\right)\Phi\bar{e}^o(k)\leqslant 0.\end{aligned}$$

由于 $\eta^T\gg\mathbf{0}_n$, Θ 和 Θ^ν 是正对角矩阵, Φ 是非负矩阵, 这意味着 $\triangle\tilde{V}(k)=0$ 当且仅当 $\bar{e}^o(k)=\mathbf{0}_n$. 因此, 根据LaSalle's 不变原理, 系统(30) 的原点是渐近稳定的. 基于比较原理, 我们知: 对于任意非零初始条件, 系统(29) 是渐近稳定的. 故系统(9) 渐近收敛到地方病平衡点 o^*.

因此, 当 $R^o_{\min}>1$ 时, 系统(7)-(9) 的地方病平衡点是渐近稳定的.

4. 数值模拟

在本节, 我们分别针对传染病轻度传播, 中度传播和重度传播三种情形进行数值仿真, 以直观展示系统(7)-(9) 在不同传播强度下健康状态与地方病平衡点的动态收敛行为. 假设病毒在一个由 $n=20$ 个群体组成的网络中传播, 且网络中同时存在 $m=15$ 种感染媒介. 在接来下的数值仿真中, 我们用红色表示个体感染比例, 蓝色表示媒介感染比例, 绿色表示观点. 取 $h=0.1$; $\forall\, i\in[n]$, $j\in[m]$, 设定初始条件如下: $x_i(0)\in[0.2,0.7]$, $x^\nu_j(0)\in[0.1,0.6]$, $o_i(0)\in[0.1,0.6]$.

图 1展示了当传染病轻度传播时, 系统(6)-(9) 的动态收敛行为. 参数设置为: β_{ij}, β^ν_{ij}, δ_i, δ^ν_i, c^ν_{jl} 分别在 $[0.01,0.03]$, $[0.005,0.01]$, $[0.15,0.25]$, $[0.15,0.25]$, $[0,0.01]$ 上随机分布, θ_i, θ^ν_i 都在 $[0,0.3]$ 上随机分布, $\varphi_i=1$. 此时 $R^o_{\max}=0.99\leqslant 1$, 系统渐近收敛到健康状态, 其中 $\bar{o}^*=\mathbf{0}_n$.

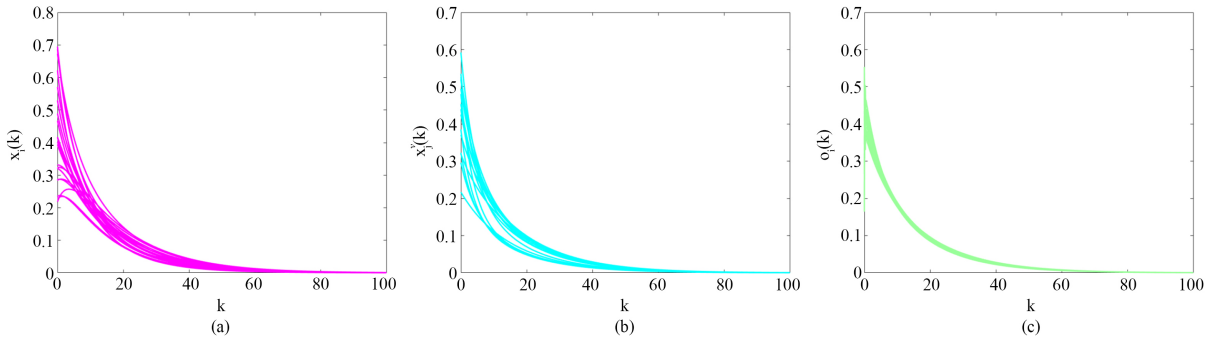

Figure 1. Evolutionary trajectories of the infected proportion, the infected media proportion, and the opinion when $R^o_{\max}\leqslant 1$

图 1. 当 $R^o_{\max}\leqslant 1$ 时, 感染者比例, 媒介感染比例和观点的演化轨迹图

图 2展示了当传染病重度传播时, 系统(6)-(9) 的动态收敛行为. 参数设置为: β_{ij}, β^ν_{ij}, δ_i, δ^ν_i, c^ν_{jl} 分别在 $[0.02,0.05]$, $[0.01,0.02]$, $[0.1,0.2]$, $[0.1,0.2]$, $[0,0.02]$ 上随机分布, 其他参数取值不变. 此时 $R^o_{\max}=1.03>1$, 系统渐近收敛到地方病平衡点.

图 3 和图 4分别展示了当传染病中度传播时, 系统(6)-(9) 的动态收敛行为. 图 3 表明, 当存在观点使得 $R^o(\bar{o}^*)=0.98\leqslant 1$ 时, 系统渐近收敛到健康状态, 其中 $\bar{o}^*\neq\mathbf{0}_n$; 当存在观点使得

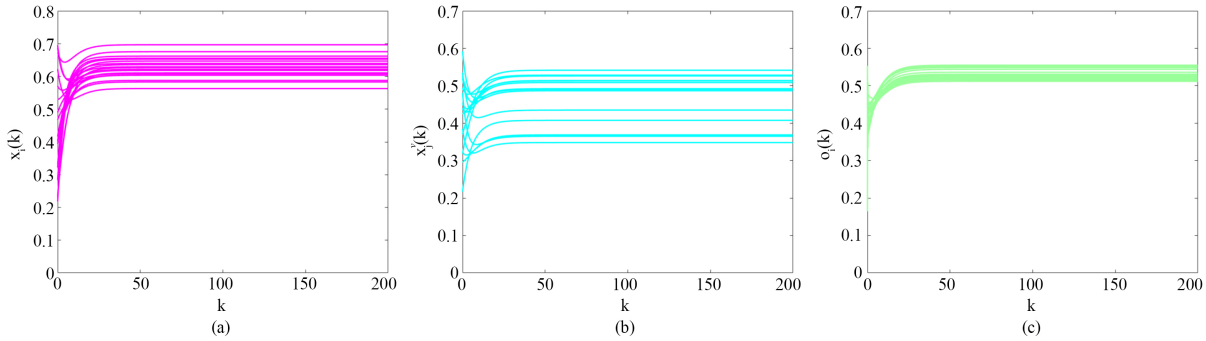

Figure 2. Evolutionary trajectories of the infected proportion, the infected media proportion, and the opinion when $R^o_{\min} > 1$

图 2. 当 $R^o_{\min} > 1$ 时, 感染者比例, 媒介感染比例和观点的演化轨迹图

$R^o(\bar{o}^*) = 1.11 > 1$ 时, 系统渐近收敛到地方病平衡点.

对比图 1与图 3 可以发现, 当病毒本身倾向于轻度传播, 但个体对病毒严重性的认知较高时, 人们会因恐惧而采取保护措施, 此时社区中感染者比例和媒介感染比例收敛至健康状态的速度, 快于人们认为病毒不严重时的情形. 对比图 2 和图 4可以发现, 当病毒本身倾向于重度传播, 但个体对病毒严重性的认知较低时, 人们会放松警惕而不采取保护措施, 此时社区中感染者比例和媒介感染比例上升的幅度, 大于人们认为病毒很严重时的情形. 上述结果揭示了社区观点在降低群体感染水平方面具有积极作用.

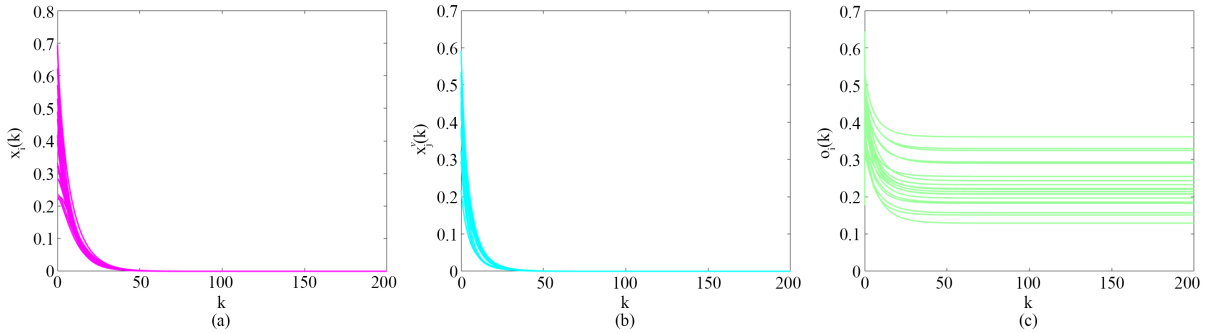

Figure 3. Evolutionary trajectories of the infected proportion, the infected media proportion, and the opinion when there exists $\bar{o}^*$ such that $R^o(\bar{o}^*) \leqslant 1$

图 3. 当存在 $\bar{o}^*$ 使得 $R^o(\bar{o}^*) \leqslant 1$ 时, 感染者比例, 媒介感染比例和观点的演化轨迹图

5. 结论

本文建立了一类具有社区观点和感染媒介的离散时间网络化 SIS 传染病模型, 研究了相互关联社区中含感染媒介的疫情传播与观点传播之间的相互作用. 理论研究表明, 当传染病轻度传播时, 系统 (7)-(9) 仅存在健康状态, 我们给出了健康状态渐近稳定与指数稳定的充分条件, 并给出了指数收敛速度; 当传染病重度传播时, 系统 (7)-(9) 的健康状态不稳定, 我们给出了地方病平衡点渐近稳定

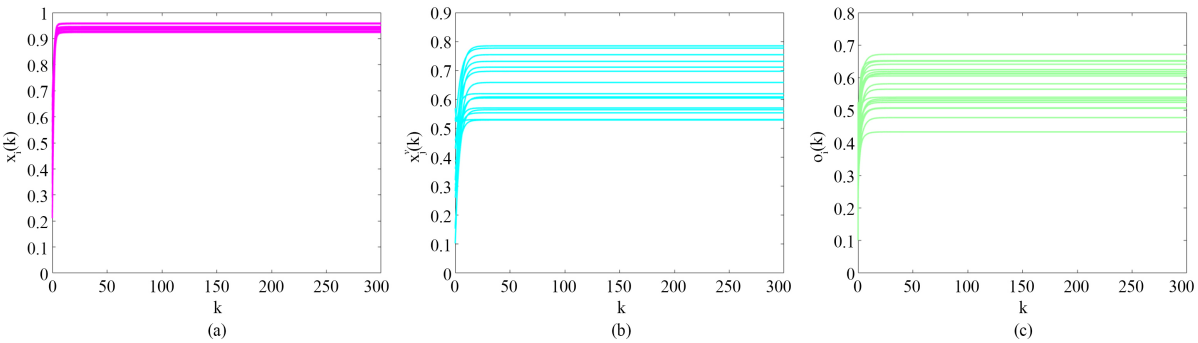

Figure 4. Evolutionary trajectories of the infected proportion, the infected media proportion, and the opinion when there exists $\bar{o}^*$ such that $R^o(\bar{o}^*) > 1$

图 4. 当存在 $\bar{o}^*$ 使得 $R^o(\bar{o}^*) > 1$ 时, 感染者比例, 媒介感染比例和观点的演化轨迹图

的充分条件; 当传染病中度传播时, 病毒兼具轻度传播和重度传播时病毒的特性, 若存在某一观点使得基本再生数小于或等于 1, 则健康状态渐近稳定, 若存在某一观点使得基本再生数大于 1, 则健康状态不稳定, 且地方病平衡点是渐近稳定的. 最后我们用数值模拟展示了这些结果, 揭示了社区观点在降低群体感染水平方面具有积极作用.

但该工作目前存在一些不足, 如 (1) 模型假设要求网络传播图是强连通的, 但现实中可能存在孤立子群, 强连通性可能不成立. 若网络不是强连通的, 系统会分解为多个强连通分量, 这导致阈值, 稳定性, 平衡点结构和参数估计都要按分量讨论, 工作量很大; (2) 目前所有结果都是理论推导和数值仿真, 缺乏真实数据验证. 在未来的研究中, 可以从以下几个方面考虑, 如 (1) 网络传播图在非强连通的情况下, 分析系统的动力学行为; (2) 可用真实数据来验证离散时间模型; (3) 可将现有单病毒模型推广为多病毒模型, 并在观点演化模型中同时引入合作性与对抗性互动.

参考文献

[1] Kraemer, M.U.G., Tsui, J.L.H., Chang, S.Y., Lytras, S., Khurana, M.P., Vanderslott, S., *et al.* (2025) Artificial Intelligence for Modelling Infectious Disease Epidemics. *Nature*, **638**, 623-635. https://doi.org/10.1038/s41586-024-08564-w

[2] Nowzari, C., Preciado, V.M. and Pappas, G.J. (2016) Analysis and Control of Epidemics: A Survey of Spreading Processes on Complex Networks. *IEEE Control Systems Magazine*, **36**, 26-46.

[3] Cui, S., Liu, F., Jardón-Kojakhmetov, H. and Cao, M. (2024) Discrete-Time Layered-Network Epidemics Model with Time-Varying Transition Rates and Multiple Resources. *Automatica*, **159**, Article ID: 111303. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2023.111303

[4] 王玉, 陈姗姗, 傅新楚. 传播动力学模型回顾与展望[J]. 应用数学与计算数学学报, 2018, 32(2): 267-294.

[5] Van Mieghem, P., Omic, J. and Kooij, R. (2009) Virus Spread in Networks. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, **17**, 1-14. https://doi.org/10.1109/tnet.2008.925623

[6] Pare, P.E., Liu, J., Beck, C.L., Kirwan, B.E. and Basar, T. (2020) Analysis, Estimation, and Validation of Discrete-Time Epidemic Processes. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, **28**, 79-93. https://doi.org/10.1109/tcst.2018.2869369

[7] Masuda, N. and Konno, N. (2006) Multi-State Epidemic Processes on Complex Networks. *Journal of Theoretical Biology*, **243**, 64-75. https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2006.06.010

[8] Shi, H., Duan, Z. and Chen, G. (2008) An SIS Model with Infective Medium on Complex Networks. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, **387**, 2133-2144. https://doi.org/10.1016/j.physa.2007.11.048

[9] Xie, Y. and Wang, Z. (2021) Transmission Dynamics, Global Stability and Control Strategies of a Modified SIS Epidemic Model on Complex Networks with an Infective Medium. *Mathematics and Computers in Simulation*, **188**, 23-34. https://doi.org/10.1016/j.matcom.2021.03.029

[10] Wang, Y., Jin, Z., Yang, Z., Zhang, Z., Zhou, T. and Sun, G. (2012) Global Analysis of an SIS Model with an Infective Vector on Complex Networks. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **13**, 543-557. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2011.07.033

[11] Pare, P.E., Vrabac, D., Sandberg, H. and Johansson, K.H. (2020) Analysis, Online Estimation, and Validation of a Competing Virus Model. *2020 American Control Conference (ACC)*, Denver, 1-3 July 2020, 2556-2561. https://doi.org/10.23919/acc45564.2020.9147568

[12] Xuan, W., Ren, R., Paré, P.E., Ye, M., Ruf, S. and Liu, J. (2020) On a Network SIS Model with Opinion Dynamics. *IFAC-PapersOnLine*, **53**, 2582-2587. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2020.12.305

[13] Lin, Y., Xuan, W., Ren, R. and Liu, J. (2021) On a Discrete-Time Network SIS Model with Opinion Dynamics.*2021 60th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, Austin, 14-17 December 2021, 2098-2103. https://doi.org/10.1109/cdc45484.2021.9683347

[14] 王光杰. 具有观点动态的网络化离散时间流行病模型分析与应用[D]: [硕士学位论文]. 武汉: 武汉科技大学, 2024.

[15] Degroot, M.H. (1974) Reaching a Consensus. *Journal of the American Statistical Association*, **69**, 118-121. https://doi.org/10.1080/01621459.1974.10480137

[16] Friedkin, N.E. and Johnsen, E.C. (1990) Social Influence and Opinions. *The Journal of Mathematical Sociology*, **15**, 193-206. https://doi.org/10.1080/0022250x.1990.9990069

[17] Liu, J., Pare, P.E., Nedic, A., Tang, C.Y., Beck, C.L. and Basar, T. (2019) Analysis and Control of a Continuous-Time Bi-Virus Model. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **64**, 4891-4906. https://doi.org/10.1109/tac.2019.2898515

[18] She, B., Liu, J., Sundaram, S. and Pare, P.E. (2022) On a Networked SIS Epidemic Model with Cooperative and Antagonistic Opinion Dynamics. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, **9**, 1154-1165. https://doi.org/10.1109/tcns.2022.3145748

[19] Horn, R.A. and Johnson, C.R. (2013) Matrix Analysis. 2nd Edition, Cambridge University Press.

[20] Rantzer, A. (2011) Distributed Control of Positive Systems. *IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, Orlando, 12-15 December 2011, 6608-6611. https://doi.org/10.1109/cdc.2011.6161293

[21] Khalil, H.K. (2002) Nonlinear Systems. 3rd Edition, Prentice Hall Inc.

[22] Vidyasagar, M. (2002) Nonlinear Systems Analysis. 2nd Edition, Society for Industrial and Applied Mathematics. https://doi.org/10.1137/1.9780898719185

[23] Rugh, W.J. (1996) Linear System Theory. 2nd Edition, Prentice-Hall Inc.

[24] Varga, R.S. (2000) Matrix Iterative Analysis. 2nd Edition, Springer.